

А.А.Асетов, Г.А.Акишев

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: bekaaskar@mail.ru)

## Наилучшее приближение функции и класс $RBSVS$

В статье рассмотрено пространство Лебега  $L_p[0, 2\pi]$ ,  $1 \leq p < +\infty$ , и  $RBVS$ ,  $RBSVS$  классы числовых последовательностей. Установлены двусторонние оценки наилучшего приближения функции  $f \in L_p[0, 2\pi]$ ,  $1 < p < +\infty$ , при условии, что коэффициенты Фурье  $\{a_n(f)\}$ ,  $\{b_n(f)\} \in RBSVS$ . Получено точное соотношение между наилучшими приближениями в разных метриках.

*Ключевые слова:* наилучшее приближение, квазимоноотонная последовательность, классы  $RBVS$  и  $RBSVS$ , коэффициенты Фурье, пространство Лебега, сопряженная функция, ряд Фурье.

Пусть  $1 \leq p < +\infty$  — измеримая,  $2\pi$ -периодическая функция  $f \in L_p[0, 2\pi]$ , если

$$\|f\|_p = \left( \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Рассмотрим ряд Фурье функции  $f \in L_1[0, 2\pi]$  (см. [1]):

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) \cos nx + b_n(f) \sin nx,$$

где  $a_n(f)$ ,  $b_n(f)$  — коэффициенты Фурье функции  $f \in L_1[0, 2\pi]$ .

Множество всех числовых последовательностей  $\{\alpha_n\}$  таких, что  $\alpha_n \downarrow 0$ ,  $n \rightarrow +\infty$ , обозначается через  $MS$ .

Положительная числовая последовательность  $\{\alpha_n\}$  называется квазимоноотонной, если  $\exists \tau > 0$  такое, что  $\frac{\alpha_n}{n^\tau} \downarrow 0$  при  $n \rightarrow +\infty$ . Множество квазимоноотонных последовательностей обозначается  $QMS$  [2].

Известно, что  $MS \subset QMS$ .

Через  $E_n(f)_p$  обозначим наилучшее приближение функции  $f \in L_p[0, 2\pi]$  тригонометрическими полиномами порядка не выше  $n$  [1].

Для двух положительных величин  $A, B$  запись  $A \asymp B$  означает, что существуют положительные числа  $C_1, C_2$  такие, что  $C_1 A \leq B \leq C_2 A$ .

Известна следующая теорема.

**Теорема А (А.А.Конюшков [2]).** Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2} (a_n^p(f) + b_n^p(f)) < +\infty,$$

$1 < p < +\infty$ , и  $\{a_n(f)\}, \{b_n(f)\} \in MS$ , то  $f \in L_p$  и

$$E_n(f)_p \leq \left\{ (n+1)^{1-\frac{1}{p}} (a_n(f) + b_n(f)) + \left( \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{p-2} (a_k^p(f) + b_k^p(f)) \right)^{\frac{1}{p}} \right\}.$$

Эту теорему на квазимоноотонную последовательность обобщил В.М.Кокилашвили [3], обратное неравенство доказано в [4].

Л.Лейндлер [5] ввел новый класс последовательностей  $RBVS$ .

**Определение.** Если положительное  $\alpha_n \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow +\infty$ , и  $\exists C > 0$

$$\sum_{k=n}^{\infty} |\alpha_k - \alpha_{k+1}| \leq C \cdot \alpha_n, \quad \forall n \in N,$$

то будем говорить, что  $\{\alpha_n\} \in RBVS$  (*sequence rest bounded variation*).

Известно, что  $MS \subset RBVS$ , но  $QMS \neq RBVS$  [4].

Л.Лейндлер [5] доказал обобщение теоремы А на класс  $RBVS$ .

В 2009 году В.Szal [6] определил более широкий класс последовательностей, чем  $RBVS$ .

**Определение (В.Szal [6]).** Последовательность  $\{\alpha_n\}$ ,  $\alpha_n \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow +\infty$ , неотрицательных чисел  $\alpha = \{\alpha_n\} \in RBSVS$  (rest bounded second variation sequence), если  $\exists C > 0$ :

$$\sum_{k=n}^{\infty} |\alpha_k - \alpha_{k+2}| \leq C \cdot \alpha_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Известно, что  $RBVS \subset RBSVS$  и  $QMS \neq RBSVS$  [6].

**Теорема (В.Szal [6], лемма 7).** Пусть

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) \cos nx$$

и  $\{a_n(f)\} \in RBSVS$ .

Если

$$1 < p < +\infty;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2} a_n^p(f) < +\infty,$$

то  $f \in L_p[0, 2\pi]$  и

$$E_n(f)_p \asymp C_p \cdot \left\{ (n+1)^{1-\frac{1}{p}} a_n(f) + \left( \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{p-2} a_k^p(f) \right)^{\frac{1}{p}} \right\}.$$

Известна следующая теорема:

**Теорема Б** (см. [7]). Пусть  $1 < p < +\infty$  и  $\{a_n(f)\}, \{b_n(f)\} \in QM$ . Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2} (a_n^p(f) + b_n^p(f)) < +\infty,$$

то

$$E_n(f)_p \asymp \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} (k-n+1)^{p-2} (a_k^p(f) + b_k^p(f)) \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Возникает вопрос: верна ли **теорема Б** для класса  $RBSVS$ ? Ответ содержится в следующей теореме:

**Теорема 1.** Пусть  $1 < p < +\infty$  и  $\{a_n\} \in RBSVS$ . Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2} a_n^p < +\infty, \tag{1}$$

то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

будет рядом Фурье некоторой функции  $f \in L_p[0, 2\pi]$  и

$$E_n(f)_p \asymp \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} (k-n)^{p-2} a_k^p \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

**Доказательство.** В.Szal [6] (см. лемма 6) доказал, что условие (1) влечет, что

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) \cos nx$$

и

$$\|f\|_p \asymp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2} a_n^p \right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{2}$$

Рассмотрим частичную сумму

$$S_n(f, x) = \sum_{k=1}^n a_k \cos kx.$$

Тогда

$$\begin{aligned} f(x) - S_n(x) &= \cos nx \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \cos(k-n)x + \sin nx \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \sin(k-n)x = \\ &= \cos nx \cdot g_n(x) + \sin nx \cdot \tilde{g}_n(x), \end{aligned}$$

где

$$g_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \cos(k-n)x;$$

$\tilde{g}_n(x)$  — сопряженная функция к  $g_n(x)$  (см. [1]). Тогда в силу ограниченности оператора сопряжения (см. [1]) получим

$$E_n(f)_p \leq \|f - S_n\|_p \leq \|g_n\|_p + \|\tilde{g}_n\|_p \leq C \cdot \|g_n\|_p. \quad (3)$$

Далее

$$\|g_n\|_p = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \cos(k-n)x \right\|_p = \left\| \sum_{v=1}^{\infty} a_{v+n} \cos vx \right\|_p. \quad (4)$$

Так как  $\{a_k\} \in RBSVS$ , то

$$\sum_{v=m}^{\infty} |a_{v+n} - a_{v+n+2}| = \sum_{j=m+n}^{\infty} |a_j - a_{j+2}| \leq C \cdot a_{m+n},$$

т.е. при фиксированном  $n \in N$  последовательность  $\{a_{v+n}\} \in RBSVS$ . Поэтому в силу соотношения (2) из (4) получим

$$\|g_n\|_p \asymp \left\{ \sum_{v=1}^{\infty} v^{p-2} a_{v+n}^p \right\}^{\frac{1}{p}} = \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} (k-n)^{p-2} a_k^p \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Следовательно, из (3) и (4) получим

$$E_n(f)_p \leq C \cdot \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} (k-n)^{p-2} a_k^p \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Теперь докажем противоположное неравенство. Нетрудно убедиться, что

$$g_n(x) = \cos nx [f(x) - S_n(f, x)] + \sin nx [\tilde{f}(x) - S_n(\tilde{f}, x)].$$

Поэтому, в силу ограниченности оператора сопряженной функции в пространстве  $L_p$ ,  $1 < p < +\infty$  (см. [1]), имеем

$$\begin{aligned} \|g_n\|_p &\leq \|\cos nx [f - S_n(f)]\|_p + \|\sin nx [\tilde{f} - S_n(\tilde{f})]\|_p \leq \\ &\leq \|f - S_n(f)\|_p + \|\tilde{f} - S_n(\tilde{f})\|_p \leq C_p \cdot \|f - S_n(f)\|_p. \end{aligned}$$

Известно, что (см. [1])

$$\|f - S_n(f)\|_p \leq C_p \cdot E_n(f)_p, \quad f \in L_p, \quad 1 < p < +\infty, \quad (5)$$

Поэтому

$$\|g_n\|_p \leq C_p \cdot E_n(f)_p, \quad 1 < p < +\infty.$$

Теперь, применяя к функции  $g_n$  соотношение (2), получим

$$E_n(f)_p \geq C_p \cdot \|g_n\|_p \geq C_p \cdot \left( \sum_{v=1}^{\infty} v^{p-2} a_{v+n}^p \right)^{\frac{1}{p}} = C_p \cdot \left( \sum_{k=n+1}^{\infty} (k-n)^{p-2} a_k^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Теорема 1 доказана.

Далее рассмотрим соотношение между наилучшими приближениями в разных метриках. Известна следующая теорема.

**Теорема (П.Л.Ульянов [8]).** Пусть  $1 \leq p < q < +\infty$ . Если  $f \in L_p[0, 2\pi]$  и

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{q-2}{p}} E_n^q(f)_p < +\infty,$$

то  $f \in L_q[0, 2\pi]$  и

$$E_n(f)_q \leq C_{q,p} \cdot \left\{ (n+1)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} E_n(f)_p + \left( \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{\frac{q-2}{p}} E_k^q(f)_p \right)^{\frac{1}{q}} \right\}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (6)$$

Улучшенные варианты оценки (6) доказали В.И.Коляда [9] и Х.П.Рустамов [10].

М.Ф.Тиман [11] доказал, что если  $\{a_n(f)\}, \{b_n(f)\} \in MS$ , то верна и обратная оценка к (6)

$$(n+1)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} E_n(f)_p + \left( \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{\frac{q-2}{p}} E_k^q(f)_p \right)^{\frac{1}{q}} \leq C_{q,p} \cdot E_n(f)_q.$$

В [7] доказано, что если  $\{a_n(f)\}, \{b_n(f)\} \in MS$ , то

$$\left( \sum_{k=n+1}^{\infty} (k-n)^{\frac{q-2}{p}} E_k^q(f)_p \right)^{\frac{1}{p}} \asymp C_{q,p} \cdot E_n(f)_q, \quad 1 < p < q < +\infty. \quad (7)$$

**Задача 2.** Пусть  $\{a_n(f)\}, \{b_n(f)\} \in RBSVS$ . Тогда верна ли оценка (7)?

**Теорема 2.** Пусть  $1 < p < q < +\infty$ ,  $f \in L_q[0, 2\pi]$ . Если  $\{a_n(f)\}, \{b_n(f)\} \in RBSVS$ , то

$$\left( \sum_{k=n+1}^{\infty} (k-n)^{\frac{q-2}{p}} E_k^q(f)_p \right)^{\frac{1}{q}} \leq C_{p,q} \cdot E_n(f)_q.$$

**Доказательство.** В.Szal [6] доказал, что

$$E_n(f)_p \leq C_{p,q} \left\{ (n+1)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \cdot (a_n(f) + b_n(f)) + \left( \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{p-2} (a_k^p(f) + b_k^p(f)) \right)^{\frac{1}{p}} \right\}.$$

Поэтому, пользуясь неравенством Харди (см. [12]), получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{q-2}{p}} E_n^q(f)_p &\leq C_{p,q} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{q-2}{p}} \left[ (n+1)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} (a_n(f) + b_n(f)) + \left( \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{p-2} (a_k^p(f) + b_k^p(f)) \right)^{\frac{1}{p}} \right]^q \leq \\ &\leq C_{p,q} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{q-2}{p}} \left( (n+1)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} (a_n^p(f) + b_n^p(f)) \right)^q + \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{q-2}{p}} \left( \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{p-2} (a_k^p(f) + b_k^p(f)) \right)^{\frac{q}{p}} \right\} \leq \\ &\leq C_{p,q} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^{q-2} (a_n^q(f) + b_n^q(f)) \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

По условию теоремы  $f \in L_q[0, 2\pi]$ ,  $1 < q < +\infty$  и  $\{a_n(f)\}, \{b_n(f)\} \in RBSVS$ . Следовательно, по теореме В.Szal [6]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{q-2} (a_n^q(f) + b_n^q(f)) \leq C \cdot \|f\|_q^q. \quad (9)$$

Из неравенств (8) и (9) следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{q-2}{p}} E_n^q(f)_p \leq C_{p,q} \cdot \|f\|_q^q. \quad (10)$$

Как в доказательстве теоремы 1,

$$f(x) - S_n(f, x) = g_n(x) \cos nx + \tilde{g}_n(x) \sin nx.$$

К функции  $g_n$  применим неравенство (10), тогда

$$\|g_n\|_q \geq C \cdot \left\{ \sum_{v=1}^{\infty} v^{q-2} E_v^q(g_n)_p \right\}^{\frac{1}{q}}. \tag{11}$$

По определению функции  $g_n$  и в силу неравенства (5) имеем

$$E_v(g_n)_p \geq C \cdot \|g_n - S_v(g_n)\|_p = C \cdot \left\| \sum_{k=v+1}^{\infty} a_{k+n}(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx \right\|_p.$$

Положим

$$F_{v+1+n}(x) = \sum_{j=v+1+n}^{\infty} (a_j(f) \cos(j-n)x + b_j(f) \sin(j-n)x);$$

$$\tilde{F}_{v+1+n}(x) = \sum_{j=v+1+n}^{\infty} (a_j(f) \cos(j-n)x - b_j(f) \sin(j-n)x).$$

Тогда

$$\cos nx \cdot F_{v+1+n}(x) - \sin nx \cdot \tilde{F}_{v+1+n}(x) = f(x) - S_{n+v+1}(f, x).$$

Поэтому по определению наилучшего приближения, свойства нормы и в силу ограниченности оператора сопряжения имеем

$$E_{n+v}(f)_p \leq \|f - S_{n+v+1}(f)\|_p = \|\cos nx \cdot F_{v+1+n} - \sin nx \cdot \tilde{F}_{v+1+n}\|_p \leq$$

$$\leq \|F_{v+1+n}\|_p + \|\tilde{F}_{v+1+n}\|_p \leq C_p \cdot \|F_{v+1+n}\|_p = C \cdot \|g_n - S_v(g_n)\|_p. \tag{12}$$

Теперь из неравенств (10–12) получим

$$\|f - S_n(f)\|_p \geq C \cdot \|g_n\|_p \geq C \cdot \left\{ \sum_{v=1}^{\infty} v^{q-2} E_v^q(g_n)_p \right\}^{\frac{1}{q}} \geq C \cdot \left\{ \sum_{v=1}^{\infty} v^{q-2} \|g_n - S_v(g_n)\|_p^q \right\}^{\frac{1}{q}} \geq$$

$$\geq C \cdot \left\{ \sum_{v=1}^{\infty} v^{q-2} E_{n+v}^q(g)_p \right\}^{\frac{1}{q}} = C \cdot \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} (k-n)^{q-2} E_k^q(f)_p \right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Следовательно,

$$E_n(f)_q \geq C \cdot \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} (k-n)^{q-2} E_k^q(f)_p \right\}^{\frac{1}{q}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Теорема доказана.

### Список литературы

- 1 *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. — М.: Физматлит, 1961.
- 2 *Коптошков А.А.* Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье // Матем. сб. 1958. — Т.44. — №1. — С. 53–84.
- 3 *Коклашвили В.М.* О приближении периодических функций // Тр. Тбилис. матем. ин-та. — 1968. — Т. 34. — С. 51–81.
- 4 *Смаилов Е.С., Акишев Г.А., Есмаганбетов М.Г.* Теория приближения и вложения классов функций многих переменных. — Караганда, 1986.
- 5 *Leindler L.* A new class of numerical sequences and its applications to sine and cosine series // Analysis Mathematica. — 2002. — № 28. — P. 279–286.
- 6 *Szal B.* Generalization of a theorem on Besov-Nikol'skii classes // Acta Math. — № 125 (1–2). — Hungar, 2009. — P. 161–181.
- 7 *Акишев Г., Волкова Е.* О коэффициентах Фурье и теоремы вложения в пространствах с весом // Рукопись депон. в КазНИИНТИ, 1990. — № 3097. — С. 20.
- 8 *Ульянов П.Л.* Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках // Матем. сб. — 1970. — Т. 81. — №1. — С. 104–131.
- 9 *Коляда В.И.* О соотношениях между наилучшими приближениями в разных метриках // Матем. заметки. — 1986. — Т. 36. — №3. — С. 383–387.

10 Рустамов Х.П. О вложении разных метрик для наилучших приближений // Рукопись депон. в ВИНТИ. — 1986. — № 6900-86. — С. 32.

11 Тиман М.Ф. О вложении  $L_p^{(k)}$  классов функций // Изв. вузов. Сер. «Математика». — 1974. — № 10. — С. 61–74.

12 Харди Г.Г., Литтлвуд Дж.Е., Полиа Г. Неравенства. — М.: ИЛ, 1948.

А.А.Әсетов, Ғ.А.Ақышев

### Функцияның ең жақсы жуықтауы және *RBSVS* класы

Мақалада  $L_p[0, 2\pi]$ ,  $1 \leq p < +\infty$ , Лебег кеңістігі және сандық тізбектердің *RBVS*, *RBSVS* кластары қарастырылды. Фурье коэффициенттері үшін  $\{a_n(f)\}, \{b_n(f)\} \in RBSVS$  шарты орындалатындай  $f \in L_p[0, 2\pi]$ ,  $1 < p < +\infty$ , функциясының ең жақсы жуықтауының екіжақты бағалаулары орнатылған. Әр түрлі метрикалардағы ең жақсы жуықтаулар арасында дәл байланыс алынды.

A.A.Asetov, G.A.Akisev

### The best approximation of function and class *RBSVS*

In article space Lebesgue  $L_p[0, 2\pi]$ ,  $1 \leq p < +\infty$  and *RBVS*, *RBSVS* classes of numerical sequences are considered. The double-sided estimation of the best approximation of function  $f \in L_p[0, 2\pi]$ ,  $1 < p < +\infty$  are established if the Fourier coefficients are  $\{a_n(f)\}, \{b_n(f)\} \in RBSVS$ . The exact relation of best approximations in different metrics is obtained.

### References

- 1 Bary N.K. *Trigonometrical series*. — Moscow: Fizmatlit, 1961.
- 2 Konyushkov A.A. *Best approximations by trigonometric polynomials and Fourier coefficients* // Math. Collection, 1958, vol. 44, № 1, p. 53–84.
- 3 Kokilashvili V.M. *Approximation of periodic functions* // Proceedings of Tbilisi Math. Institute, 1968, vol. 34, p. 51–81.
- 4 Smailov E.S., Akisev G.A., Esmaganbetov M.G. *Approximation theory and nested classes of functions of several variables*. — Karaganda, 1986.
- 5 Leindler L. *A new class of numerical sequences and its applications to sine and cosine series* // Analysis Mathematica, 2002, № 28, p. 279–286.
- 6 Szal B. *Generalization of a theorem on Besov-Nikol'skii classes* // Acta Math., № 125 (1–2), Hungar, 2009, P. 161–181.
- 7 Akisev G.A., Volkova E. *Fourier coefficients and the embedding theorem in weighted spaces* // Manuscript is deposited in KazNIINTI, 1990, № 3097, p. 20.
- 8 Ul'janov P.L. *Imbedding theorems and relations between best approximations (moduli of continuity) in different metrics* // Math. Collection, 1970, vol. 81, № 1, p. 104–131.
- 9 Kolyada V.I. *Relationships between the best approximations in different metrics* // Math. notes, 1986, vol. 36, № 3, p. 383–387.
- 10 Rustamov Kh.P. *Embedding the various metrics for best approximations* // Manuscript is deposited in RISTI, 1986, № 6900–86, p. 32.
- 11 Timan M.F. *The imbedding of the  $L_p^{(k)}$  classes of functions* // News Vuz. Mathematica, 1974, № 10, p. 61–74.
- 12 Hardy G.H., Littlewood J.E., Polya G. *Inequalities*. Moscow: FL, 1948.