

|   | А                         | В                    | С  | Д  | Е         | F     |
|---|---------------------------|----------------------|----|----|-----------|-------|
| 1 |                           | Питательные вещества |    |    | Норма     | Вошло |
| 2 |                           | А                    | В  | С  |           |       |
| 3 | Весовая единица корма I   | 4                    | 3  | 1  | 33        | 33    |
| 4 | Весовая единица корма II  | 3                    | 2  | 1  | 23        | 24,75 |
| 5 | Весовая единица корма III | 2                    | 1  | 2  | 12        | 16,5  |
| 6 | Цена                      | 20                   | 20 | 10 | Стоимость | 165   |
| 7 | План                      | 8,25                 | 0  | 0  |           |       |

Рис. 3. Оптимальное решение составления рациона питания

По окончании счета появляется диалоговое окно **Результаты поиска решения.**

Нажав соответствующую кнопку, можно сохранить найденное решение во влияющих ячейках модели или восстановить исходные значения.

В результате применения «Поиска решения» была достигнута минимальная стоимость рациона при соблюдении нормы питательных веществ.

#### Список литературы

1. Горчаков А.А. Компьютерные экономико-математические модели. — М.: ЮНИТИ, 1995. — 201 с.
2. Додж М. и др. Эффективная работа с Microsoft Excel 2000. — СПб.: Питер, 2001. — 161 с.
3. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике: Учебник. — М.: МГУ им. М.В.Ломоносова, Изд-во «ДИС», 1997. — 368 с.
4. Карасев А.И., Кремер Н.Ш., Савельева Т.И. Математические методы и модели в планировании. — М., 1987. — 263 с.

УДК 517.5

А.Н.Есбаев<sup>1</sup>, М.И.Рамазанов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Казахстанский филиал МГУ им. М.В.Ломоносова, Астана;

<sup>2</sup>Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова

#### ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРЫ ВТОРОГО РОДА ПРИ ЗАДАННЫХ УСЛОВИЯХ

*Мақалада Меллин түрлендіру әдісімен Вольтерраның екінші текті интегралдық теңдеуі зерттелген. Сәйкес келетін интегралдық операторының ядросына белгілі шарттар қойылған. Берілген теңдеудің шешілгіштік шарттарымен спектрі табылған.*

*In the given article the integral equation of Volterr of the second kind with the given conditions, some properties of the kernel of this equation, the spectrum and also the solution of the study equation with the application of the integral transformation of Mellin have been investigated.*

Данная статья посвящена исследованию интегрального уравнения Вольтерры второго рода при заданных условиях, постановке задачи, изучению свойств ядра исследуемого интегрального уравнения, вопросу о спектре и разрешимости уравнения, а также решению соответствующего однородного интегрального уравнения при помощи преобразования Меллина.

### Интегральные уравнения и их классификация [1]

Пусть

1)  $\Omega$  — область из  $R^n$ ;

2)  $G(t, \phi, \psi)$  — скалярная функция точки  $t \in \Omega$  и действительных переменных  $\phi$  и  $\psi$ , которая зависит от  $\psi$ ;

3)  $K(t, \tau, z)$  — зависящая от  $z$  скалярная функция точек  $t, \tau \in \Omega$  и действительной переменной  $z$ .

Уравнение

$$G(t, \phi(t), \int_{\Omega} K(t, \tau, \phi(\tau)) d\tau) = 0, \quad (1.1)$$

где

$$d\tau = d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n,$$

называется *интегральным уравнением* относительно функции  $\phi(t)$  точки  $t \in \Omega$ .

Интегральное уравнение (1.1) называется *линейным*, если функция  $G(t, \phi, \psi)$  линейна относительно переменных  $\phi$  и  $\psi$ .

Линейное интегральное уравнение

$$w(t)\phi(t) + \int_{\Omega} K(t, \tau)\phi(\tau) d\tau = f(t), \quad (1.2)$$

следуя Пикару, будем называть интегральным уравнением третьего рода.

Интегральное уравнение (1.2) называется интегральным уравнением первого или второго рода, в зависимости от того,  $w(t) \equiv 0$  или  $w(t) \neq 0$  для всех  $t \in \bar{\Omega}$ .

Пусть  $n = 1$ ,  $\Omega = \{t : a < t < b\}$  — интервал числовой прямой  $R$ .

Линейным одномерным интегральным уравнением Вольтерры называется уравнение вида

$$w(t)\phi(t) - \lambda \int_{t_0}^t K(t, \tau)\phi(\tau) d\tau = f(t),$$

где  $t_0$  — фиксированная точка из  $[a, b]$ .

### 2. Преобразование Меллина и его применение к решению некоторых интегральных уравнений [2]

Пусть функция  $f(t)$  определена при положительных  $t$  и удовлетворяет условиям

$$\int_0^1 |f(t)| t^{\sigma_1 - 1} dt < +\infty, \quad \int_1^{\infty} |f(t)| t^{\sigma_2 - 1} dt < +\infty \quad (2.1)$$

при надлежащем выборе чисел  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ .

*Преобразованием Меллина функции  $f(t)$*  называется функция

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) t^{s-1} dt, \quad (s = \sigma + it, \sigma_1 < \sigma < \sigma_2). \quad (2.2)$$

Формула обращения преобразования Меллина имеет вид

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(s) t^{-s} ds \quad (t > 0, \sigma_1 < \sigma < \sigma_2), \quad (2.3)$$

где интеграл берется вдоль прямой  $l: \operatorname{Re} s = \sigma$ , параллельной мнимой оси плоскости  $s$ , и понимается в смысле главного значения. Формулы (2.2), (2.3) называют *формулами обращения Меллина*.

*Частный случай* их хорошо известен:

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt, \quad e^{-t} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s) t^{-s} ds, \quad (c > 0),$$

где  $\Gamma(s)$  — гамма-функция Эйлера.

В случае, когда поведение функции  $f(t)$  при  $t \rightarrow 0$  и  $t \rightarrow \infty$  известно, например, из физических соображений, границы полосы  $(\sigma_1, \sigma_2)$  могут быть установлены из условий абсолютной сходимости интеграла (2.2).

Если же поведение  $f(t)$  известно лишь на одном конце интервала  $(0, +\infty)$ , например, при  $t \rightarrow 0$ , то определяется только  $\sigma_1$ , прямая интегрирования  $l$  в (2.3) должна быть выбрана правее прямой  $\sigma = \sigma_1$  и левее ближайшей особой точки функции  $F(s)$ .

Преобразование Меллина тесно связано с преобразованиями Фурье и Лапласа, и многие теоремы, относящиеся к преобразованию Меллина, могут быть получены из соответствующих теорем для преобразований Фурье и Лапласа путем замены переменных.

Пусть функция  $\phi(t)$  определена на всей оси  $t$ , и интеграл

$$\Phi(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) e^{-pt} dt$$

сходится хотя бы на одной прямой  $\operatorname{Re} p = \sigma$ . Функцию  $\Phi(p)$  называют преобразованием Лапласа функции  $\phi(t)$ .

Если обозначить через  $\Phi(p)$  преобразование Лапласа функции  $\phi(t) = f(e^{-t})$ , то будем иметь

$$\Phi(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) e^{-pt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(e^{-t}) e^{-pt} dt = - \int_{+\infty}^0 f(u) u^p \frac{du}{u} = \int_0^{+\infty} f(u) u^{p-1} du = F(p) \quad \text{—}$$

преобразование Меллина функции  $f(t)$ .

Это соотношение позволяет выводить формулы преобразования Меллина из формул преобразования Лапласа.

*Теорема о свертке для преобразования Меллина* имеет следующий вид:

$$M \left\{ \int_0^{\infty} f(t) \phi\left(\frac{x}{t}\right) \frac{dt}{t} \right\} = F(s) \cdot \Phi(s). \quad (2.4)$$

Отсюда можно заключить, что преобразование Меллина удобно применять при решении интегральных уравнений вида

$$\phi(t) = f(t) + \int_0^{\infty} K\left(\frac{t}{\tau}\right) \phi(\tau) \frac{d\tau}{\tau}. \quad (2.5)$$

В самом деле, пусть функции  $\phi(t)$ ,  $f(t)$  и  $K(t)$  допускают преобразование Меллина и пусть

$$\phi(t) \rightarrow \Phi(s), \quad f(t) \rightarrow F(s), \quad K(t) \rightarrow \tilde{K}(s),$$

причем области аналитичности  $F(s)$  и  $\tilde{K}(s)$  имеют общую полосу

$$\sigma_1 < \operatorname{Re} s = \sigma < \sigma_2.$$

Применяя к обеим частям уравнения (2.5) преобразование Меллина и используя теорему о свертке (2.4), получим:

$$\Phi(s) = F(s) + \tilde{K}(s) \cdot \Phi(s),$$

откуда

$$\Phi(s) = \frac{F(s)}{1 - \tilde{K}(s)}, \quad \tilde{K}(s) \neq 1.$$

Это операторное решение интегрального уравнения (2.5). По формуле обращения (2.3) находим решение  $\phi(t)$  этого уравнения:

$$\phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{F(s)}{1 - \tilde{K}(s)} t^{-s} ds.$$

### 3. Исследование интегрального уравнения Вольтерра второго рода при заданных условиях

При отыскании решений краевых, начальных или смешанных задач для некоторых дифференциальных уравнений естественным образом (особенно в случае, когда часть границы области задания уравнения освобождена от граничных условий) возникают интегральные уравнения Вольтерры третьего рода

$$t^\alpha \phi(t) - \lambda \int_0^t \frac{\phi(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} = f(t), \quad 0 < \alpha < 1. \quad (3.1)$$

Заметим, что интегральное уравнение (3.1) было объектом изучения многих авторов [1, 3, 4]. В отличие от работы [1], в которой интегральное уравнение (3.1) подробно исследовано для действи-

тельных значений  $\lambda \in R_+ \equiv (0; +\infty)$  и для ограниченного временного интервала  $0 < t < 1$ , в данной работе будет исследован вопрос о спектре и разрешимости уравнения (3.1) при условиях

$$\lambda \in C, t \in R_+.$$

### Постановка задачи

Уравнение (3.1.) простым преобразованием

$$\mu(t) = t^\alpha \phi(t)$$

можно представить как особое интегральное уравнение второго рода

$$\mu(t) - \lambda \int_0^t \frac{\mu(\tau) d\tau}{\tau^\alpha (t-\tau)^{1-\alpha}} = f(t), t \in R_+, 0 < \alpha < 1, \lambda \in C. \quad (3.2)$$

Использование термина «особое интегральное уравнение» для (3.2) будет обосновано ниже.

Будем считать, что правая часть и решение интегрального уравнения (3.2) принадлежат классам функций, суммируемых с соответствующими весами:

$$e^{-t} f(t) \in L_1(R_+), t^{-\alpha} e^{-t} \mu(t) \in L_1(R_+). \quad (3.3)$$

Очевидно, что из (3.3) также следует, что  $e^{-t} \mu(t) \in L_1(R_+)$ .

Ставятся следующие задачи:

**Задача 1.** Исследовать разрешимость особого интегрального уравнения Вольтерры второго рода (3.2) при условиях (3.3).

**Задача 2.** Исследовать спектральные вопросы для особого интегрального уравнения Вольтерры второго рода (3.2) при условиях (3.3).

### Свойства интегрального оператора (3.2.)

Запишем интегральное уравнение (3.2) в виде

$$K_{\lambda\mu} \equiv (I - \lambda K)\mu \equiv \mu(t) - \lambda \int_0^t K(t, \tau) \mu(\tau) d\tau = f(t), t \in R_+, \quad (3.4)$$

где  $K(t, \tau)$  определяется из равенства

$$K(t, \tau) = \frac{1}{\tau^\alpha (t-\tau)^{1-\alpha}}, 0 < \tau < t < \infty. \quad (3.5)$$

Заметим, что это ядро интегрального уравнения (3.2) обладает следующими свойствами:

1) Ядро  $K(t, \tau)$ ,  $0 < \tau < t < \infty$ , непрерывно.

2) Ядро  $K(t, \tau) \geq 0$ ,  $0 < \tau < t < \infty$ .

3) Для каждого  $t_0 \geq \varepsilon > 0$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \int_{t_0}^t K(t, \tau) d\tau = 0.$$

4) Норма интегрального оператора, определяемого ядром  $K(t, \tau)$  и действующего в пространстве суммируемых функций, равна  $\frac{\pi}{\sin \pi \alpha} \neq 0$ .

Свойства 1)–3) очевидны, а справедливость 4) следует из соотношения:

$$\int_0^t \frac{d\tau}{\tau^\alpha (t-\tau)^{1-\alpha}} = B(\alpha, 1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} > 0.$$

В связи с этими свойствами ядра  $K(t, \tau)$  уравнение (3.2) названо особым интегральным уравнением Вольтерры.

### Преобразование уравнения (3.2)

Если ввести функцию  $k(z)$  по формуле

$$k(z) = \begin{cases} 0, & 0 < z < 1; \\ \frac{1}{(z-1)^{1-\alpha}}, & 1 < z < \infty, \end{cases} \quad (3.6)$$

то можно записать уравнение (3.4) в виде

$$\mu(t) - \lambda \int_0^\infty k\left(\frac{t}{\tau}\right) \mu(\tau) \frac{d\tau}{\tau} = f(t), \quad (3.7)$$

т.е. в виде (2.5), удобном для применения преобразования Меллина при решении этого уравнения.

### Решение однородного интегрального уравнения

Исследуем однородное интегральное уравнение, соответствующее (3.7):

$$\mu(t) - \lambda \int_0^{\infty} k\left(\frac{t}{\tau}\right) \mu(\tau) \frac{d\tau}{\tau} = 0. \quad (3.8)$$

Применяя к нему преобразование Меллина с учетом теоремы о свертке (2.4), получим:

$$\tilde{\mu}(s) (1 - \lambda \tilde{k}(s)) = 0, \quad s = s_1 + is_2,$$

где

$$\tilde{\mu}(s) = \int_0^{\infty} \mu(t) t^{s-1} dt, \quad \operatorname{Re} s > 0$$
 —

изображение функции  $\mu(t)$ , а изображение ядра интегрального уравнения имеет вид

$$\tilde{k}(s) = \int_0^1 z^{-s-\alpha} (1-z)^{\alpha-1} dz = B(\alpha, -s+1-\alpha), \quad \operatorname{Re} s < 1-\alpha, \quad (3.9)$$

здесь  $B(x, y)$  — Бета-функция.

Наличие и вид собственных функций однородного интегрального уравнения (3.8) определяется наличием и количеством корней следующего трансцендентного уравнения относительно комплексного параметра  $s$

$$1 - \lambda \tilde{k}(s) = 0, \quad (s = s_1 + is_2), \quad (3.10)$$

а именно:

1) действительным некротным корням  $s^{(k)}$  уравнения (3.10) соответствуют собственные функции

$$\mu_k(t) = t^{s^{(k)}},$$

2) комплексным некротным корням  $s^{(k)} = s_1^{(k)} + is_2^{(k)}$  уравнения (3.10) отвечает пара собственных функций:

$$\begin{aligned} \mu_k^1(t) &= t^{s_1^{(k)}} \cdot \cos(s_2^{(k)} \ln t), \\ \mu_k^2(t) &= t^{s_1^{(k)}} \cdot \sin(s_2^{(k)} \ln t). \end{aligned}$$

Общее решение однородного уравнения (3.8) представляет собой линейную комбинацию собственных функций этого уравнения.

Исследуем подробнее вопрос о корнях уравнения (3.10).

Согласно (3.9) уравнение (3.10) примет вид

$$\lambda \cdot B(\alpha, -s+1-\alpha) = 1. \quad (3.11)$$

Учитывая свойство Бета-функции  $B(x, y) = B(y, x)$  и пользуясь ее представлением в виде ряда [5]

$$B(x, y) = \frac{1}{y} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y(y-1)\dots(y-n)}{n!(x+n)},$$

получим:

$$\begin{aligned} B(1-\alpha-s, \alpha) &= \frac{1}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!(n+1-\alpha-s)} = \\ &= \frac{1}{1-\alpha-s} - \frac{\alpha-1}{1!(2-\alpha-s)} + \dots + (-1)^k \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k)}{k!(k+1-\alpha-s)} + \dots = \\ &= \frac{1}{1-\alpha-s} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n+1-\alpha-s}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где

$$b_n = \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(n-\alpha)}{n!} = \left(1 - \frac{\alpha}{1}\right) \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\alpha}{k}\right) > 0.$$

Таким образом, изображение ядра интегрального уравнения (3.8) можно представить в следующем виде:

$$B(-s+1-\alpha, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n+1-\alpha-s}, \quad b_0 = 1.$$

Записывая равенство (3.11) в виде

$$\frac{1}{\lambda_1 + i\lambda_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n+1-\alpha-s_1-is_2},$$

получим соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_1}{|\lambda|^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{n+(1-\alpha-s_1)}{(n+1-\alpha-s_1)^2 + s_2^2}, \\ -\frac{\lambda_2}{|\lambda|^2} &= s_2 \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{1}{(n+1-\alpha-s_1)^2 + s_2^2}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 1.** Для всех значений  $s$  таких, что

$$\operatorname{Re} s = s_1 < 1 - \alpha,$$

значения сумм в правых частях равенств (3.13) положительны. Это означает, что величина  $\lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda > 0$ , а  $\lambda_2 = \operatorname{Im} \lambda$  имеет знак, равный противоположному знаку числа  $s_2 = \operatorname{Im} s$ .

Справедливость утверждения 1 сразу же следует из представления Бета-функции (3.12), соотношений (3.13) и условия, что  $b_n > 0$  для любых  $n = 0, 1, 2, \dots$

Из утверждения 1 непосредственно следует справедливость следующей теоремы о разрешимости однородного интегрального уравнения (3.8).

**Теорема 1.** Для любых  $\lambda$  при  $\operatorname{Re} \lambda \geq \frac{\pi}{\sin \pi \alpha}$  однородное интегральное уравнение (3.8), наряду с тривиальным решением, имеет нетривиальное решение вида  $\mu(t) = t^{s^*}$ , где  $s^*$  определяется как корень уравнения (3.10), и  $\operatorname{Re} s^* < 1 - \alpha$ . Если же  $\operatorname{Re} \lambda < \frac{\pi}{\sin \pi \alpha}$ , то однородное интегральное уравнение (3.8) имеет только тривиальное решение.

#### Список литературы

1. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. — М.: Высш. шк., 1995. — С. 92–93.
2. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. — М.: Наука, 1975. — С. 160–163.
3. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. — М. — Л.: Гостехиздат, 1948. — 480 с.
4. Полянин А.Д., Манжиров А.В. Справочник по интегральным уравнениям. — М.: Физматлит, 2003. — 608 с.
5. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматлит, 1963. — С. 962–964.