

**О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ НАГРУЖЕННОГО
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ПЕРВОГО ПОРЯДКА НА ОТРЕЗКЕ
Иманбаев Н.С.**

*Институт Математики и Математического Моделирования,
г. Алматы, Казахстан;
Южно-Казахстанский государственный педагогический университет,
г. Шымкент, Казахстан
E-mail: imanbaevnur@mail.ru*

В функциональном пространстве $W_2^1(-1,1)$ рассмотрим задачу на собственные значения нагруженного оператора дифференцирование

$$L_1 y = y'(t) + \lambda y(-1)\Phi(t) = \lambda y(t), \quad -1 \leq t \leq 1 \quad (1)$$

с краевым условием

$$y(-1) = y(1), \quad (2)$$

где $\Phi(t)$ - функция ограниченной вариации и $\Phi(-1) = \Phi(1) = 1$, $\lambda \in \mathbb{C}$, - спектральный параметр.

Требуется найти те комплексные значения λ , при которых операторное уравнение (1), имеет не нулевые решения.

Одной из особенностей рассматриваемой задачи, сопряженной к (1)-(2) является спектральная задача с вхождением спектрального параметра $\bar{\lambda}$ в краевую условие с интегральным возмущением:

$$L_1^* v = v'(t) = \bar{\lambda} v(t), \quad -1 \leq t \leq 1, \quad (3)$$

$$v(-1) - v(1) = -\bar{\lambda} \cdot \int_{-1}^1 v(t)\Phi(t)dt, \quad (4)$$

где $\Phi(t)$ - ограниченной вариации и $\Phi(-1) = \Phi(1) = 1$, $\bar{\lambda} \in \mathbb{C}$ - спектральный параметр.

Лемма 1. Характеристический определитель $\Delta_1(\lambda)$ спектральных задач (1)-(2) и (3)-(4) представляется в виде

$$\Delta_1(\lambda) = e^{-\lambda} - e^{\lambda} + \lambda \cdot \int_{-1}^1 e^{\lambda t} \Phi(t) dt \quad (5)$$

На основе формулы (5) делаются выводы о собственных значениях дифференциальных операторов первого порядка L_1 и L_1^* . Имеет место следующая

Теорема 1. Если $\Phi(t)$ -функция ограниченной вариации и $\Phi(-1) = \Phi(1) = 1$, - то все нули целой функции $\Delta_1(\lambda)$, то есть все собственные значений операторов дифференцирования L_1 и L_1^* принадлежат полосе $|\operatorname{Re} \lambda| = |x| < k$, при некотором k , где $\lambda = x + iy$, а также образуют счётное множество и имеют асимптотику $\lambda_n^1 = im + O(1)$ при $n \rightarrow \infty$.

Заметим, что $\lambda_0 = 0$ - является собственным значением, $y_0(t) = C \neq 0$ собственной функцией операторов L_1 и L_1^* .

В случае, когда функция $\Phi(t) \equiv 0$, получается $\Delta_0(\lambda) = e^{-\lambda} - e^{\lambda}$ - характеристический определитель «невозмущённой» спектральной задачи:

$$L_0 y = y'(t) = \lambda y(t), \quad -1 \leq t \leq 1, \quad (6)$$

$$y(-1) = y(1)$$

Числа $\lambda_n^0 = in\pi$, $n = 1, 2, 3, \dots$ являются собственными значениями, при этом $\forall C > 0$, $y_n^0 = C \cdot e^{in\pi} -$ собственными функциями «невозмущённого» оператора L_0 , которая образует полную ортонормированную систему и базис Рисса в $L_2(-1, 1)$.

Лемма 2. Система собственных функций $y_n^{(1)} = v_n^{(1)} \approx C \cdot e^{in\pi} \cdot e^{\epsilon t}$ спектральных задач (1)-(2) и (3)-(4) при $n \rightarrow \infty, \forall C > 0$ одновременно обладают свойством базисности Рисса в $L_2(-1, 1)$, но не является ортонормированным.

Теорема 2. Пусть в краевом условии (4) отсутствует спектральный параметр $\bar{\lambda}$ и подынтегральная функция $\Phi(t)$ -непрерывная, $\Phi(-1) = \Phi(1) = 1$. Тогда все собственные значений оператора L_1^* будет сосредоточены в некоторой вертикальной полосе $|\operatorname{Re} \bar{\lambda}| = |x| < k \cdot r \cdot \omega \left(\frac{1}{r}\right)$, при некотором k , $r = |\bar{\lambda}|$, которое расширяется в зависимости от свойств $\omega(\delta)$ - модуля непрерывности $\Phi(t)$, образует счётное множество и справедлива асимптотическая формула $\lambda_n = i\pi n + O\left(n\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$, при $n \rightarrow \infty$.

Работа выполнена при финансовой поддержке КН МНВО РК (грант № AP09260752).

Список использованной литературы

1. Кангужин Б.Е., Садыбеков М.А. Дифференциальные операторы на отрезке. Распределение собственных значений. Шымкент: «Ғылым», 1996. – 270 с.
2. Иманбаев Н.С., Садыбеков М.А. Базисные свойства корневых функций нагруженных дифференциальных операторов второго порядка// Доклады НАН РК. 2010, №2. С. 11-13.
3. [Imanbaev N.S., On nonlocal perturbation of the problem on eigenvalues of differentiation operator on a segment/Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki, 31, issue 2 \(2021\), 186-193. https://doi.org/10.35634/vm210202](https://doi.org/10.35634/vm210202)

ВОЛЬТЕРРА ЕРЕКШЕ ИНТЕГРАЛДЫҚ ТЕНДЕУДІҢ СИПАТТАУШЫ ТЕНДЕУІ ЖАЙЫНДА

Искаков С.А., Омаров М.Т., Танин А.О.

Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды университеті, Қарағанды, Қазақстан

E-mail: tan_alibek@mail.ru

$G = \{x, t | 0 < x < \gamma(t), t > 0\}$ облысында келесі шекаралық есепті қарастырамыз:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad \{0 < x < \gamma(t), \quad t > 0\} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = u_0(t), \quad \frac{d\tilde{u}(t)}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\gamma(t)} = u_1(t), \quad (2)$$

мұнда $\tilde{u}(t) = u(\gamma(t), t)$, $\gamma(0) = 0$, ал $\gamma(t) = [t(1 + \alpha_0(t))]^\omega$, $\omega > \frac{1}{2}$

$\gamma(t): (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ функциясы келесі шарттарды қанағаттандырады:

1. $t \rightarrow 0$ және $t \rightarrow \infty$ $\gamma(t)$ функциясының асимптотикасының бейнесі t^ω , мұнда $\omega > \frac{1}{2}$
2. қандайда бір t_1^* уақыт мезетінен бастап t_2^* уақыт мезетіне дейін $\gamma(t)$ функциясы еркін, қатаң бірсарынды және өзара бірімәнді, яғни кері түрлендіруі $\gamma^{-1}(t)$ бар.

Шешімінің және берілген функцияларының класын келесі түрде енгіземіз:

$$(x + [\gamma(t)]^{\frac{3}{2\omega-1}})^{-1} u(x, t) \in L_\infty(G), \quad \text{яғни } u(x, t) \in L_\infty(G; (x + [\gamma(t)]^{3/2\omega-1})^{-1}),$$

$$f(x, t) \in W_\infty^{1,0} \left(G; [\gamma(t)]^{3/2\omega-1} \exp \left\{ [\gamma(t)]^{\frac{2\omega-1}{\omega}} / (4a^2) \right\} \right);$$