УДК 517.512

Б.В.Симонов

Волгоградский государственный технический университет, Россия (E-mail: Simonov-b2002@yandex.ru)

Об элементе наилучшего порогового приближения в пространстве Орлича

В статье введено понятие наилучшего порогового приближения в пространстве Орлича, обобщающее понятие наилучшего приближения. Также определены понятия псевдоэлемента наилучшего порогового приближения, элемента наилучшего порогового приближения и приведены примеры, объясняющие смысл введения понятия псевдоэлемента наилучшего порогового приближения. Указаны условия существования псевдоэлемента порового приближения и элемента наилучшего порогового приближения.

Ключевые слова: пространство Орлича, наилучшее пороговое приближение функции, псевдоэлемент, μ-измеримые функции, минимизирующая последовательность.

Пусть Φ — совокупность неотрицательных, непрерывных, неубывающих и выпуклых вниз на полупрямой $[0,+\infty)$ функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих Δ_2-условию (т.е. найдется такая положительная постоянная С, что $\varphi(2t) \le C\varphi(t)$ для всех $t \in (0,+\infty)$). Пусть (T,Ω,μ) — пространство с (положительной) мерой [1]. Пространством Орлича $\varphi(L)$ назовем множество всех μ-измеримых, конечных почти всюду функций $f(x)$, для которых $\|f\|_\varphi = \int_T \varphi(|f(x)|)\,d\mu < \infty$. Зададим на T μ-измеримые, конечные почти всюду функции $\alpha(x), \rho_1(x), \rho_2(x), \rho_3(x)$ ($\alpha(x)$ — «пороговая» функция). Введем обозначения:

$$f_+(x) = \max(f(x),0),\ f_-(x) = \max(-f(x),0);$$

$$\overline{f} = \begin{cases} f(x)\rho_1(x)\,\text{при}\, f(x) > \alpha(x); \\ f(x)\rho_2(x)\,\text{при}\, f(x) = \alpha(x); \\ f(x)\rho_3(x)\,\text{при}\, f(x) < \alpha(x). \end{cases}$$

Заметим, что если $\alpha(x) \equiv 0, \rho_1(x) \equiv \rho_2(x) \equiv 1$, то $\overline{f}(x) = f(x)$. На $\varphi(L)$ рассмотрим функционал $\|\overline{f}\|_\varphi$. Если $\alpha(x) \equiv 0$, то $\overline{f}(x)$ будет функцией со знакочувствительным весом, рассмотренной в [2, 3]. Если $\varphi(u) = u^r\,(r \ge 1), \alpha(x) \equiv 0, \rho_1(x) \equiv \alpha > 0, \rho_2(x) \equiv \beta > 0$, то $\|\overline{f}\|_\varphi$ совпадает с функционалом $\|f\|^r_{r,(\alpha,\beta)}$, рассмотренным в [4]. Пусть H — конечномерное подпространство пространства $\varphi(L)$, $f, g \in \varphi(L)$. Положим

$$\rho(f,g) = \|\overline{(f-g)}\|_\varphi;$$

$$\rho(f,H) = \inf_{g \in H} \rho(f,g). \tag{1}$$

Величину $\rho(f,H)$ назовем наилучшим пороговым приближением (н.п.п.) функции f элементами из H в «метрике» $\varphi(L)$, а элемент $g_0 \in H$, на котором достигается inf в (1), — элементом н.п.п. функции f в $\varphi(L)$ подпространством H. Если $\varphi(u) = u^r\,(r \ge 1), T = [a,b], \alpha(x) \equiv 0, \rho_1(x) \equiv \rho_3(x) \equiv 1$, то $\rho^{1/r}(f,H)$ является наилучшим приближением f элементами из H в метрике $L_r(a,b)$.

По аналогии с наилучшим пороговым приближением можно рассматривать наилучшее n-пороговое приближение функции f. Так, например, введем наилучшее двупороговое приближение функции f. Для этого зададим на T μ-измеримые функции $\alpha(x), \beta(x), \rho_1(x), \rho_2(x), \rho_3(x), \rho_4(x)$, $\rho_5(x), \rho_6(x)$ и, не уменьшая общности, посчитаем, что $\alpha(x) \ge \beta(x)$ для почти всех $x \in T$. Введем обозначение

$$\begin{aligned} \overline{f}(x) = f(x)[&\rho_1(x) sign(f(x)-\alpha(x))_+ + \rho_2(x) sign(f(x)-\alpha(x))_- sign(f(x)-\beta(x))_+ + \\ &+\rho_3(x) sign(f(x)-\beta(x))_+ (1 - sign(f(x)-\alpha(x))_+ - sign(f(x)-\alpha(x))_-) + \rho_5(x) sign(\alpha(x) - \\ &-\beta(x))_+ (1 - sign(f(x)-\beta(x))_+ - sign(f(x)-\beta(x))_-) + \rho_6(x)(1 - sign(\alpha(x)-\beta(x))_+ - sign(f(x)-\alpha(x))_-)], \end{aligned}$$

а далее, как и для наилучшего порогового приближения, введем $\rho(f,g)$ и $\rho(f,H)$. В дальнейшем для простоты записи будем рассматривать только наилучшее пороговое приближение функции f.

Введем некоторые обозначения. Пусть H — конечномерное подпространство в $\varphi(L)$, $Q=\{q_i\}_{i=1}^n$ — его базис. Для g из H положим $\|g\|_G=\sum_{i=1}^n|\lambda_i|$, где $g(x)=\sum_{i=1}^n\lambda_i q_i(x)$. Последовательность элементов $\{P_k\}_{k=1}^\infty\subset H$ назовем минимизирующей для $f\in\varphi(L)$, если $\rho(f,P_k)<\infty$ при всех к=1,2,… и $\lim_{k\to\infty}\rho(f,P_k)=\rho(f,H)$ (см. [5]).

Пусть $\{P_k\}_{k=1}^\infty\subset H$ — минимизирующая последовательность элементов для $f\in\varphi(L)$. Элемент $P\in H$ назовем псевдоэлементом н.п.п. функции $\lim_{k\to\infty}\|P_k-P\|_G=0$, если из $\{P_k\}_{k=1}^\infty$ можно выбрать такую ее подпоследовательность $\{P_{k_i}\}_{i=1}^\infty$, что $\lim_{i\to\infty}\|P_{k_i}-P\|_G=0$.

Рассмотрим вопрос о существовании элемента н.п.п. В [6] для случая $\alpha(x)\equiv 0$ доказано, что элемент н.п.п. существует. В общем случае это не так. Приведем пример.

Пусть $\varphi(u)=u$; $T=[0,2]$; $\alpha(x)=x, x\in[0,2]$; $\rho_1(x)=M$, если $f(x)>\alpha(x)$; $\rho_2(x)=A$, если $f(x)=\alpha(x)$; $\rho_3(x)=B$, если $f(x)<\alpha(x)$. В качестве функции $f(x)$ возьмем функцию $f(x)=x$. Будем ее приближать функциями из подпространства $H_1=\{c:c\in R\}$.

1-й случай. A=3, B=2, M=1. Тогда $\rho(x,H_1)=2=\rho(x,1)$, т.е. 1 — элемент н.п.п. и он единственный. Последовательности $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^\infty$ и $\left\{-\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^\infty$ являются минимизирующими, так как $\lim_{n\to\infty}\rho\left(f,1+\frac{1}{n}\right)=2$ и $\lim_{n\to\infty}\rho\left(f,-\frac{1}{n}\right)=2$. Рассмотрим псевдоэлементы для этих двух последовательностей: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1, \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$. Псевдоэлемент н.п.п. 1 является элементом н.п.п., в то же время псевдоэлемент н.п.п. 0 не является элементом н.п.п., так как $\rho(f,0)=6>2$.

2-й случай. A=1, B=2, M=1. Тогда $\rho(x,H_1)=2=\rho(x,1)=\rho(x,0)$. 1 и 0 — два элемента н.п.п. Из любой минимизирующей для функции f последовательности элементов $\{P_k\}_{k=1}^\infty$ можно выбрать такую ее подпоследовательность, что ее псевдоэлемент будет элементом н.п.п.

3-й случай. A=3, B=2, M=1/2. Тогда $\rho(x,H_1)=1$. Элемента н.п.п. нет. Любая минимизирующая последовательность элементов имеет псевдоэлемент, равный 0, но он не является элементом н.п.п., так как $\rho(x,0)=6>1$.

4-й случай. A=3, B=2, M=2. Тогда $\rho(x,H_1)=2=\rho(x,1)$. 1 — элемент н.п.п. и он единственный. Для любой минимизирующей последовательности элементов ее псевдоэлемент является элементом н.п.п.

Приведенные примеры показывают, что не всегда существуют элементы н.п.п., что не всегда псевдоэлемент н.п.п. является элементом н.п.п.

Рассмотрим вопрос о существовании псевдоэлемента н.п.п.

Утверждение 1. Пусть $\varphi\in\Phi$ и $\lim_{t\to\infty}\varphi(t)=\infty$, $\alpha(x)$ — μ-измеримая, конечная почти всюду на T функция, а μ-измеримые, конечные почти всюду на T функции $\rho_1(x)$, $\rho_2(x),\rho_3(x)$ таковы, что

$$0<\sup_{x\in T} vrai\,|\,\rho_i(x)=M_{\rho_i}<\infty, i=1,2,3; \tag{2}$$

$$0<\inf_{x\in T} vrai\,|\,\rho_i(x)=m_{\rho_i}<\infty, i=1,2,3. \tag{3}$$

Тогда для любого конечномерного подпространства $H\subset\varphi(L)$ и любой функции $f\in\varphi(L)$ существует псевдоэлемент н.п.п. функции f.

Для доказательства нам понадобится следующая

Лемма 1. Пусть $\varphi \in \Phi$ и $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t)=\infty$, μ-измеримые, конечные почти всюду на T функции ρ_1, ρ_2, ρ_3 таковы, что выполняются условия (2) и (3), $\alpha(x)-\mu$-измеримая, конечная почти всюду на T функция. Пусть, далее, H — конечномерное подпространство в $\varphi(L)$, $Q=\{q_i\}_{i=1}^n$ — его базис. Тогда для каждой функции $f \in \varphi(L)$ существует такое число $A = A(f) > 0$, что для любой функции $g \in \varphi(L)$, для которой $|g| \le |f|$ почти всюду на T, и для любого элемента $p \in H$ с $\|p\|_Q > A$ выполняется неравенство $\rho(g, p) > \rho(f, 0) + 1$.

Лемма 1 для случая $\alpha(x)\equiv 0, \rho_1(x)\equiv\rho_3(x)\equiv 1$ доказана в [5]. В общем случае доказательство аналогично.

Приводимое ниже доказательство утверждения 1 с некоторыми изменениями следует ходу рассуждений из [5], что, в свою очередь, развивает идеи доказательства из [7].

Доказательство утверждения 1. Пусть $f \in \varphi(L)$, H — конечномерное подпространство в $\varphi(L)$, $Q=\{q_i\}_{i=1}^n$ — его базис, $\{P_k\}_{k=1}^\infty$ — минимизирующая для f последовательность элементов из H. Начиная с некоторого k_0, для всех $k \ge k_0$ справедливо неравенство $\rho(f, P_k) \le \rho(f,0)+1$. Тогда из леммы 1 следует, что $\|P_k\|_Q \le A < \infty$ для всех к=1, 2,… Таким образом, из $\{P_k\}_{k=1}^\infty$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся почти всюду к некоторой функции $P \in H$. А это и означает, по определению, что функция P будет псевдоэлементом н.п.п. Утверждение 1 доказано.

Теперь рассмотрим случай, когда псевдоэлемент н.п.п. является элементом н.п.п. Заметим, что если минимизирующая для $f \in \varphi(L)$ последовательность элементов $\{P_k\}_{k=1}^\infty \subset H$ имеет псевдоэлемент н.п.п. $P \in H$ и $\lim\limits_{k\to\infty}\rho(f, P_k)=\rho(f,P)$, то P является элементом н.п.п.

Утверждение 2. Пусть $\varphi \in \Phi$, а μ-измеримые, конечные почти всюду на T функции ρ_1, ρ_2, ρ_3 таковы, что выполнены условия (2) и (3), $\alpha(x)-\mu$-измеримая, конечная почти всюду на T функция, H — конечномерное подпространство в $\varphi(L)$, $Q=\{q_i\}_{i=1}^n$ — его ограниченный базис, т.е. $\sup\limits_{x\in T} vrai\,|q_i(x)| = M_{q_i} < \infty$, $i=1,...,n$. Пусть также $\{P_k\}_{k=1}^\infty \subset H$ — минимизирующая для $f \in \varphi(L)$ последовательность элементов, а $P \in H$ — такой ее псевдоэлемент н.п.п., что

$$\mu\{x \in T : f(x)-P(x)=\alpha(x), \alpha(x)\ne 0\}=0; \tag{4}$$

$$\inf_{x\in E^\alpha} vrai\,|f(x)-P(x)-\alpha(x)|\, r > 0, \tag{5}$$

где $E^\alpha = \{x \in T : f(x)-P(x)\ne\alpha(x), \alpha(x)\ne 0\}$.

Тогда псевдоэлемент н.п.п. является элементом н.п.п.

При доказательстве будет использоваться следующая

Лемма 2 ([8]). Непрерывная на оси *Ox* выпуклая вниз функция *M(x)* имеет в каждой точке правую $M'_\Pi(x)$ и левую $M'_\Lambda(x)$ производные, причем $M'_\Lambda(x) \le M'_\Pi(x)$. Кроме того, если $a < x_1 < x_2 < b$, то

$$M'_\Pi(a) \le \frac{M(x_2)-M(x_1)}{x_2-x_1} \le M'_\Lambda(b).$$

Доказательство утверждения 2. Считаем, что $\varphi(u)\ne const$, так как иначе утверждение 2 тривиально. Ниже будем рассматривать только те точки x, в которых функции конечны функции $\alpha(x), q_i(x) (i=1,...,n), P(x), P_k(x) (k=1,2,...)$, так как мера точек, не удовлетворяющих этому условию, равна нулю.

Покажем, что $\rho(f,H)=\rho(f,P)$. Так как P является псевдоэлементом н.п.п., то согласно определению из минимизирующей последовательности $\{P_k\}_{k=1}^\infty$ можно выделить такую ее подпоследовательность $\{P_{i_k}\}_{k=1}^\infty = \{P_k^*\}_{k=1}^\infty$, что $\lim\limits_{k\to\infty}\|P_k^*-P\|_Q = 0$. Покажем, что $\lim\limits_{k\to\infty}\rho(f, P_k^*) = \rho(f,P)$. Пусть $T_1 = \{x \in T : \alpha(x)\ne 0\}$, $T_2 = \{x\in T : \alpha(x)=0\}$. Рассмотрим множество T_1. Так как $Q=\{q_i\}_{i=1}^n$ — ограниченный базис и $P(x)$ является псевдоэлементом, то найдется такое число k_0, что для всех $k > k_0$ почти всюду будет выполняться неравенство $|P_k^*(x)-P(x)| < r/3$. На множестве T_1 выделим, учитывая (5), следующие два множества: $T_{11}=\{x\in T_1 : f(x)-P(x)-\alpha(x)\geq r;\quad T_{12}=\{x\in T_1 : f(x)-P(x)-\alpha(x)\leq -r\}$. В силу (4) $\mu(T_{11}\cup T_{12})=\mu(T_1)$. Тогда для почти всех $x\in T_{11}$ и всех $k>k_0$ будем иметь

$$f(x)-P_k^*(x)-\alpha(x)=(f(x)-P(x)-\alpha(x))-(P_k^*(x)-P(x))\geq$$
$$\geq 2r/3,\overline{(f(x)-P(x))}=\rho_1(x)(f(x)-P(x)),\overline{(f(x)-P_k^*(x))}=\rho_1(x)(f(x)-P_k^*(x)).$$

Для этих x, применяя лемму 2, получим при $|f(x)-P(x)|>|f(x)-P_k^*(x)|$:

$$|\varphi(|\rho_1(x)(f(x)-P(x))|)-$$
$$-\varphi(|\rho_1(x)(f(x)-P_k^*(x))|)\leq c_1(\varphi(|f(x)|)+\varphi(|P(x)|)+\sum_{m=1}^{n}\varphi(|q_m|))\max_{m=1,\dots,n}|\lambda_m-\lambda_m^{(k)}|.$$

Далее при $|f(x)-P(x)|<|f(x)-P_k^*(x)|$ будем иметь

$$|\varphi(|\rho_1(x)(f(x)-P(x))|)-$$
$$-\varphi(|\rho_1(x)(f(x)-P_k^*(x))|)\leq c_2(\varphi(|f(x)|)+\sum_{k=1}^{n}\varphi(|\lambda_m^{(k)}|+1)|q_m|)\max_{m=1,\dots,n}|\lambda_m-\lambda_m^{(k)}|,$$

а при $|f(x)-P(x)|=|f(x)-P_k^*(x)|$:

$$|\varphi(|\overline{(f(x)-P(x))}|)-\varphi(|\overline{(f(x)-P_k^*(x))}|)|\leq(\varphi(|f(x)|)+$$
$$+\varphi(|P(x)|)+\sum_{m=1}^{n}\varphi(|q_m|))\max_{m=1,\dots,n}|\lambda_m-\lambda_m^{(k)}|.$$

В силу того, что P является псевдоэлементом, для заданного $\varepsilon>0$ найдется такое число k_1, что при всех $k>k_1$ $\max\limits_{m=1,\dots,n}|\lambda_m-\lambda_m^{(k)}|<\varepsilon,|\lambda_m^{(k)}|\leq\ \leq 2|\lambda_m|+1, m=1,\dots,n.$ Тогда для всех $k>\max(k_0,k_1)$ получим

$$\left|\varphi\left(\left|\overline{(f(x)-P(x))}\right|\right)-\varphi\left(\left|\overline{\left(f(x)-P_k^*(x)\right)}\right|\right)\right|\leq c_3\left\{\varphi\left(\left|f(x)\right|\right)+\sum_{m=1}^{n}\varphi\left(\left|q_m(x)\right|\right)\right\}\varepsilon. \tag{6}$$

Аналогично для почти всех $x\in T_{12}$ и всех $k>k_0$ будем иметь $f(x)-P(x)-\alpha(x)\leq 2r/3$,

$$\overline{\left(f(x)-P(x)\right)}=\rho_3(x)(f(x)-P(x)),\overline{\left(f(x)-P_k^*(x)\right)}=\rho_3(x)\left(f(x)-P_k^*(x)\right).$$

Далее оценки повторяются, только вместо функции $\rho_1(x)$ нужно поставить функцию $\rho_3(x)$.

Рассмотрим теперь множество T_2. На этом множестве выделим следующие три множества: $T_{21}=\{x\in T_2 : f(x)-P(x)>0\}$; $T_{22}=\{x\in T_2 : f(x)-P(x)=0\}$; $T_{23}=\{x\in T_2 : f(x)-P(x)<0\}$.

Тогда для почти всех $x\in T_{21}$ будем иметь:

а) если $f(x)-P_k^*(x)<0$, то $\overline{\left(f(x)-P(x)\right)}=\rho_1(x)(f(x)-P(x)),\overline{\left(f(x)-P_k^*(x)\right)}=\rho_3(x)\left(f(x)-P_k^*(x)\right)$.

Так как $f(x)-P(x)>0$, то из того, что $f(x)-P_k^*(x)-(P_k^*(x)-P(x))<0$, следует $P_k^*(x)-P(x)>0$. Тогда

$$\left|\varphi\left(\left|\rho_1(x)\left(f(x)-P(x)\right)\right|\right)-\varphi\left(\left|\rho_3(x)\left(f(x)-P_k^*(x)\right)\right|\right)\right|\leq$$
$$\leq|\varphi(|\rho_1(x)(f(x)-P(x))|)-\varphi(0)|+|\varphi(0)-\varphi(|\rho_3(x)(f(x)-P_k^*(x))|)|.$$

Оценим $|\varphi(|\rho_1(x)(f(x)-P(x))|)-\varphi(0)|$. Применяя лемму 2, получаем

$$|\varphi(|\rho_1(x)(f(x)-P(x))|)-\varphi(0)|\leq\varphi'_{\Pi}(|\rho_1(x)(f(x)-P(x))|)|\rho_1(x)|(f(x)-P(x)).$$

Так как $f(x)-P(x)=f(x)+P_k^*(x)-P_k^*(x)-P(x)\leq P_k^*(x)-P(x)$, то

$$|\varphi(|\rho_1(x)(f(x)-P(x))|)-\varphi(0)|\leq\varphi'_{\Pi}(|\rho_1(x)(f(x)-P(x))|)|\rho_1(x)|(P_k^*(x)-P(x)).$$

Оценим $|\varphi(|\rho_3(x)(f(x)-P_k^*(x))|)-\varphi(0)|$. Вновь, применяя лемму 2, будем иметь

$$|\varphi(|\rho_3(x)(f(x)-P_k^*(x))|)-\varphi(0)|\leq\varphi'_{\Pi}(|\rho_3(x)(f(x)-P_k^*(x))|)|\rho_3(x)|(f(x)-P_k^*(x)).$$

Так как $f(x)-P(x)=f(x)+P_k^*(x)-P_k^*(x)-P(x)\leq P_k^*(x)-P(x)$, то

$$|\varphi(|\rho_3(x)(f(x)-P_k^*(x))|)-\varphi(0)|\leq\varphi'_{\Pi}(|\rho_3(x)(f(x)-P_k^*(x))|)|\rho_3(x)|(P_k^*(x)-P(x)).$$

Далее, аналогично случаю $x\in T_{11}$, будем иметь для всех $k>k_1$ оценку (6), только с некоторой другой постоянной c_4;

б) если $f(x)-P_k^*(x)=0,$ то $\overline{\left(f(x)-P(x)\right)}=\rho_1(x)(f(x)-P(x)),\overline{\left(f(x)-P_k^*(x)\right)}=\rho_1(x)(f(x)-$
$-P_k^*(x)),|\varphi(|\overline{(f(x)-P(x))}|)-\varphi(|\overline{(f(x)-P_k^*(x))}|)|\le\varphi'_\Pi(|\rho_1(x)(f(x)-P(x))|)|\rho_1(x)|(f(x)-$
$-P(x))|$. Так как $f(x)-P(x)=f(x)+P_k^*(x)-P_k^*(x)-P(x)=P_k^*(x)-P(x),$ то

$$|\varphi(|\overline{(f(x)-P(x))}|)-\varphi(|\overline{(f(x)-P_k^*(x))}|)|\le\varphi'_\Pi(|\rho_1(x)(f(x)-P(x))|)|\rho_1(x)|(f(x)-P(x))|,$$

и тогда для всех $k>k_1$ будем иметь оценку (6) с некоторой постоянной c_5;

в) если $f(x)-P_k^*(x)>0,$ то $\overline{(f(x)-P_k^*(x))}=\rho_1(x)(f(x)-P_k^*(x)),$ и далее проводим рассуждения, аналогичные пункту а).

Таким образом, мы показали, что для почти всех $x\in T_{21}$ и всех $k>k_1$ будем иметь оценку (6) с некоторой постоянной c_6.

Результаты, аналогичные приведенным выше для $T_{21},$ можно получить почти для всех $x\in T_{22}\cup T_{23}$.

Заметим, что для получения оценок сверху в случае, когда $x\in T_2,$ мы нигде не использовали ограниченности базиса $Q=\{q_i\}_{i=1}^n$.

Таким образом, для всех $k>\max(k_0,k_1)$ будем иметь

$$\left|\rho\left(f,P_k^*\right)-\rho\left(f,P\right)\right|\le c_7\int_T\left(\varphi\left(\left|f\left(x\right)\right|\right)+\sum_{m=1}^n\varphi\left(\left|q_m\left(x\right)\right|\right)\right)d\mu\cdot\varepsilon\le c_8\varepsilon,$$

а это означает, что $\lim_{k\to\infty}\rho(f,P_k^*)=\rho(f,P).$ Утверждение 2 доказано.

Перейдем теперь к условиям существования элемента н.п.п.

Хорошо известна

Теорема ([9]). Пусть H — фиксированное конечномерное подпространство в $L_p(a,b)$ $(1\le p<\infty)$. Для того чтобы функция $g_0\in H$ доставляла функции $f\in L_p(a,b)$ наилучшее приближение в подпространстве H, достаточно и (при $p=1$ в случае, если разность $f(x)-g_0(x)$ почти всюду отлична от нуля) необходимо выполнение условия

$$\int_a^b g(x)\left|f\left(x\right)-g_0\left(x\right)\right|^{p-1}sign(f(x)-g_0(x))dx=0$$

для любого g из H.

Эта теорема распространена в [4] на случай несимметричных (α,β)-приближений. Аналог этой теоремы при несимметричных $(\rho_1(x),\rho_2(x))$-приближениях (что соответствует пороговому приближению, когда $\alpha(x0\equiv0)$ в пространстве Орлича рассмотрен в [6].

Утверждение 3. Пусть $\varphi\in\Phi,$ а μ-измеримые, конечные почти всюду на T функции $\rho_1(x),$ $\rho_2(x),\rho_3(x)$ таковы, что выполнены условия (2) и (3); $\alpha(x)$ — μ-измеримая, конечная почти всюду на T функция; H — фиксированное конечномерное подпространство в $\varphi(L)$; $Q=\{q_i\}_{i=1}^n$ — его ограниченный базис. Пусть далее для функции $f\in\varphi(L)$ функция $g_0\in H$ удовлетворяет условиям (4) и (5), где вместо функции $P(x)$ нужно подставить функцию $g_0(x)$.

Тогда для того чтобы функция $g_0\in H$ доставляла функции $f\in\varphi(L)$ наилучшее пороговое приближение в подпространстве $H,$ необходимо выполнение условия

$$\begin{aligned}\int_{T/E}&\{\varphi'_\Lambda(|\overline{(f(x)-g_0(x))}|)sign\{(f(x)-g_0(x))(g(x)-g_0(x))\}_-+\varphi'_\Pi(|\overline{(f(x)-g_0(x))}|)sign\{(f(x)-\\&-g_0(x))(g(x)-g_0(x))\}_+\}(g(x)-g_0(x))sign(f(x)-g_0(x))(|\rho_1(x)|sign(f(x)-g_0(x)-\alpha(x))_++\\&+|\rho_3(x)|sign(f(x)-g_0(x)-\alpha(x))_-)d\mu+\varphi'_\Pi(0)\int_E\{|\overline{(g_0(x)-g(x))}|(1-sign|\alpha(x)|)+\\&+|g_0(x)-g(x)|(|\rho_1(x)|sign(\alpha(x))_-+|\rho_3(x)|sign(\alpha(x))_+)\}d\mu\ge0\end{aligned}\qquad(7)$$

для любого g из H, где $E=\{x\in T:f(x)-g_0(x)=0\}$.

При доказательстве утверждения 3 будет использована следующая

Лемма 3 ([10]). Если последовательность функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к f на множестве A и для некоторой интегрируемой на A функции $\varphi(x)$ $|f_n(x)| \le \varphi(x)$ для всех n, то предельная функция интегрируема на A и

$$\int\limits_A f_n(x)d\mu \to \int\limits_A f(x)d\mu\ (n \to +\infty).$$

Доказательство утверждения 3. Считаем, что $\varphi(u) \ne const$, так как иначе утверждение 3 тривиально. Разложим элемент $g_0 \in H$ по базису $Q = \{q_i\}_{i=1}^n : g_0(x) = \sum\limits_{i=1}^n a_i^{(0)} q_i(x)$. Ниже будем рассматривать только те точки x, в которых конечны функции $f(x), \alpha(x), q_i(x), i = 1, ..., n,$ так как мера точек, не удовлетворяющих этому условию, равна нулю.

Пусть g_0 является элементом н.п.п. Рассмотрим функцию

$$I(a_1, ..., a_n) = \int\limits_T \varphi\left(\left|\overline{\left(f(x) - \sum_{k=1}^n a_k q_k(x)\right)}\right|\right) d\mu.$$

Покажем, что эта функция имеет в точке $\left(a_1^{(0)}, ..., a_n^{(0)}\right)$ правую производную по всем направлениям. Пусть $\overline{e} = (a_1 - a_1^{(0)}, ..., a_n - a_n^{(0)}), (a_1 - a_1^{(0)})^2 + ... + (a_n - a_n^{(0)})^2 \ne 0$ и $g(x) = \sum\limits_{k=1}^n a_k q_k(x)$. Возьмем какую-либо последовательность действительных чисел $\{h_m\}_{m=1}^{\infty}$, для которой $0 < h_m \le 1, m = 1, ...,$ $h_m \to 0 (m \to +\infty)$. Для каждого фиксированного направления найдем предел

$$\lim_{m\to\infty}\left(I\left(a_1^{(0)} + h_m(a_1 - a_1^{(0)}), ..., a_n^{(0)} + h_m(a_n - a_n^{(0)})\right) - I\left(a_1^{(0)}, ..., a_n^{(0)}\right)\right) / h_m = \lim_{m\to\infty}\int\limits_T I_m d\mu,$$

где $I_m = \left\{\varphi\left(\left|\overline{(f(x) - g_0(x) - h_m(g(x) - g_0(x)))}\right|\right) - \varphi\left(\left|\overline{(f(x) - g_0(x))}\right|\right)\right\} / h_m$.

Выясним, к чему сходится подынтегральная функция. Для этого совершим предельный переход в следующих трех случаях: 1) $f(x) - g_0(x) > \alpha(x)$; 2) $f(x) - g_0(x) < \alpha(x)$; 3) $f(x) - g_0(x) = \alpha(x)$.

Выделим на T три множества

$$T_1 = \{x \in T : \alpha(x) > 0;\ T_1 = \{x \in T : \alpha(x) < 0;\ T_1 = \{x \in T : \alpha(x) = 0.$$

Рассмотрим множество T_1. В случае 1) имеем

$$I_m = \left(\varphi\left(|\rho_1(x)|(f(x) - g_0(x) - h_m(g(x) - g_0(x)))\right) - \varphi\left(|\rho_1(x)|(f(x) - g_0(x))\right)\right) / h_m,$$

если m достаточно велико.

Если $g(x) - g_0(x) > 0,$ то при $m \to \infty$

$$I_m \to -\varphi'_{\Lambda}(|\overline{(f(x) - g_0(x))}|)|\rho_1(x)|(g(x) - g_0(x)) = -\{\varphi'_{\Lambda}(|\overline{(f(x) - g_0(x))}|) sign((f(x) - \\ -g_0(x))(g(x) - g_0(x)))_+ + \varphi'_{\Pi}(|\overline{(f(x) - g_0(x))}|) sign((f(x) - g_0(x))(g(x) - g_0(x)))_-(g(x) - \\ -g_0(x)) sign((f(x) - g_0(x) - \alpha(x))(f(x) - g_0(x)))(|\rho_1(x)| sign(f(x) - g_0(x) - \alpha(x))_+ - \\ -|\rho_3(x)| sign(f(x) - g_0(x) - \alpha(x))_-) = B(x).$$

Если $g(x) - g_0(x) < 0,$ то при $m \to \infty$

$$I_m \to -\varphi'_{\Pi}(|\overline{(f(x) - g_0(x))}|)|\rho_1(x)|(g(x) - g_0(x)) = B(x).$$

Если $g(x) - g_0(x) = 0,$ то $I_m = 0 = B(x)$.

В случае 2) возникают три возможности:

а) $0 < f(x) - g_0(x) < \alpha(x)$; б) $f(x) - g_0(x) < 0$; в) $f(x) - g_0(x) = 0$.

В случае а) при достаточно больших m

$$I_m = (\varphi(|\rho_3(x)|(f(x) - g_0(x) - h_m(g(x) - g_0(x)))) - \varphi(|\rho_3(x)|(f(x) - g_0(x)))) / h_m.$$

Тогда, если $g(x) - g_0(x) > 0,$ то при $m \to \infty$

$$I_m \to -\varphi'_{\Lambda}(|\overline{(f(x) - g_0(x))}|)|\rho_3(x)|(g(x) - g_0(x)) = B(x);$$

если $g(x)-g_0(x)<0,$ то при $m\to\infty$

$$I_m \to -\varphi'_{\Pi}(|\overline{(f(x)-g_0(x))}|)|\rho_3(x)|(g(x)-g_0(x))=B(x);$$

если $g(x)-g_0(x)=0,$ то $I_m=0=B(x).$

В случае б) при достаточно больших m

$$I_m=(\varphi(-|\rho_3(x)|(f(x)-g_0(x)-h_m(g(x)-g_0(x))))-\varphi(-|\rho_3(x)|(f(x)-g_0(x))))/h_m.$$

Тогда, если $g(x)-g_0(x)>0,$ то при $m\to\infty$

$$I_m\to\varphi'_{\Pi}(|\overline{(f(x)-g_0(x))}|)|\rho_3(x)|(g(x)-g_0(x))=B(x);$$

если $g(x)-g_0(x)<0,$ то при $m\to\infty$

$$I_m\to\varphi'_{\Lambda}(|\overline{(f(x)-g_0(x))}|)|\rho_3(x)|(g(x)-g_0(x))=B(x);$$

если $g(x)-g_0(x)=0,$ то $I_m=0=B(x).$

В случае в) имеем:

если $g(x)-g_0(x)>0,$ то при достаточно больших m

$$I_m=(\varphi(h_m(g(x)-g_0(x))|\rho_3(x)|)-\varphi(0))/h_m.$$

Тогда при $I_m\to\varphi'_{\Pi}(0)|\rho_3(x)||g(x)-g_0(x)|$ при $m\to\infty,$ если $g(x)-g_0(x)<0,$ то при достаточно больших m

$$I_m=(\varphi(h_m(g_0(x)-g(x))|\rho_3(x)|)-\varphi(0))/h_m.$$

Тогда при $I_m\to\varphi'_{\Pi}(0)|\rho_3(x)||g(x)-g_0(x)|$ при $m\to\infty,$ если $g(x)-g_0(x)=0,$ то

$$I_m=0=\varphi'_{\Pi}(0)|g(x)-g_0(x)||\rho_3(x)|.$$

В силу (4) мера множества точек, удовлетворяющих условию 3), равна нулю.

Случаи, когда $x\in T_2\cup T_1,$ исследуются аналогично случаю, когда $x\in T_1.$

Таким образом, подынтегральная функция при $m\to\infty$ стремится к функции $F(x),$ определенной следующим образом: при $x\in T/E$ функция $F(x)$ равна $B(x),$ а при $x\in E$

$$(1-sign|\alpha(x)|)|\overline{(g(x)-g_0(x))}|+sign|\alpha(x)|(|\rho_1(x)|sign(f(x)-g_0(x)-\alpha(x))_+ +$$
$$+|\rho_3(x)|sign(f(x)-g_0(x)-\alpha(x))_-)|g_0(x)-g(x)|.$$

Проводя рассуждения, аналогичные тем, которые проводились при доказательстве утверждения 2, получаем, что найдется такая положительная постоянная c_8, что для любых m и при почти всех $x\in T$, будет справедливо следующее неравенство:

$$|I_m|\le c_8\varphi'_{\Pi}(A(|f(x)-g_0(x)|+|g(x)-g_0(x)|)A|g(x)-g_0(x)|=c_8B_1(x),$$

где $A=\max(M_{\rho_1},M_{\rho_2}).$

Покажем теперь, что функция $B_1(x)$ суммируема. Используя свойства функции $\varphi(u)(u\ge 0),$ для $h>0$ имеем $\varphi(u)+\varphi'_{\Pi}(u)h\le\varphi(u+h).$ Тогда существует интеграл

$$\int_T\varphi'_{\Pi}(A(|f(x)-g_0(x)|+|g(x)-g_0(x)|))A(|f(x)-g_0(x)|+|g(x)-g_0(x)|)d\mu\le$$
$$\le\int_T\varphi(2A(|f(x)-g_0(x)|+|g(x)-g_0(x)|))d\mu.$$

Значит, последовательность $\{I_m\}_{m=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям леммы 3, применение которой позволяет совершить предельный переход под знаком интеграла. А так как $g_0(x)$ является элементом н.п.п., то разность

$$I(a_1^{(0)}+h_m(a_1-a_1^{(0)}),\dots,a_n^{(0)}+h_m(a_n-a_n^{(0)}))-I(a_1^{(0)},\dots,a_n^{(0)})\ge 0,$$

и поэтому $\int_T F(x)d\mu\ge 0.$ Отсюда следует (7). Утверждение 3 доказано.

Утверждение 4. Пусть $\varphi\in\Phi,$ H — фиксированное конечномерное подпространство в $\varphi(L);$ $\rho_1(x),\rho_2(x),\rho_3(x)$ — μ-измеримые, конечные почти всюду на T функции, такие что $\rho_i(x)\cdot f(x)\in\varphi(L)$ $(i=1,2,3)$ для любой функции $f\in\varphi(L)$ и для почти всех $x\in T$

$$\left|\rho_1(x)\right|\le\left|\rho_2(x)\right|; \qquad (8)$$

$\alpha(x)$ — μ-измеримая, неотрицательная, конечная почти всюду на T функция. Пусть далее для функции $f \in \varphi(L)$ функция $g_0 \in H$ такова, что

$$\mu\{x \in T : 0 < f(x) \le \alpha(x)\} = 0 \qquad (9)$$

и для любой функции g из H

$$\int\limits_{T/E} \{\varphi'_\Lambda(|\overline{(f(x)-g_0(x))}|)sign((f(x)-g_0(x))g(x))_- + \varphi'_\Pi(|\overline{(f(x)-g_0(x))}|)sign((f(x)- -g_0(x))g(x))_+\}\, g(x)\, sign((f(x)-g_0(x)-\alpha(x))(g(x)-g_0(x)))(|\rho_1(x)|\, sign(f(x)-g_0(x)- -\alpha(x))_+ - |\rho_3(x)|\, sign(f(x)-g_0(x)-\alpha(x))_-)d\mu + \varphi'_\Pi(0)\int\limits_E |\overline{g(x)}|d\mu \ge 0, \qquad (10)$$

где $E = \{x \in T : f(x) - g_0(x) = 0\}$. Тогда g является элементом н.п.п.

Доказательство. Для любого элемента g из H справедливы следующие равенства:

$$\int\limits_{T/E} \{\varphi'_\Lambda(|\overline{(f(x)-g_0(x))}|)sign\{(f(x)-g_0(x))(g(x)-g_0(x))\}_+ + \varphi'_\Pi(|\overline{(f(x)-g_0(x))}|)sign\{(f(x)- -g_0(x))(g(x)-g_0(x))\}_-\}|\overline{(f(x)-g_0(x))}|\,d\mu = \int\limits_{T/E} \{\varphi'_\Lambda(|\overline{(f(x)-g_0(x))}|)sign\{(f(x)- -g_0(x))(g(x)-g_0(x))\}_+ + \varphi'_\Pi(|\overline{(f(x)-g_0(x))}|)sign\{(f(x)-g_0(x))(g(x)-g_0(x))\}_-\}(g(x)- -g_0(x))sign((f(x)-g_0(x)-\alpha(x))(f(x)-g_0(x)))(|\rho_1(x)|\, sign(f(x)-g_0(x)-\alpha(x))_+ - -|\rho_3(x)|\, sign((f(x)-g_0(x)-\alpha(x))_-)d\mu - \varphi'_\Pi(0)\int\limits_E |\overline{(g_0(x)-g(x))}|\,d\mu + +\varphi'_\Pi(0)\int\limits_E |\overline{(g_0(x)-g(x))}|\,d\mu + \int\limits_{T/E} \{\varphi'_\Lambda(|\overline{(f(x)-g_0(x))}|)sign\{(f(x)-g_0(x))(g(x)-g_0(x))\}_+ + +\varphi'_\Pi(|\overline{(f(x)-g_0(x))}|)sign\{(f(x)-g_0(x))(g(x)-g_0(x))\}_-\}(f(x)-g(x))sign((f(x)-g_0(x)- -\alpha(x))(f(x)-g_0(x)))(|\rho_1(x)|\, sign(f(x)-g_0(x)-\alpha(x))_+ - |\rho_3(x)|\, sign(f(x)-g_0(x)-\alpha(x))_-)d\mu.$$

Отбрасывая первый и второй из входящих в правую часть последнего равенства интегралы (так как их разность неположительна в силу (10)) и заметив, что

$$(f(x)-g(x))sign((f(x)-g_0(x)- -\alpha(x))(f(x)-g_0(x)))(|\rho_1(x)|\, sign(f(x)-g_0(x)-\alpha(x))_+ - |\rho_3(x)|\, sign(f(x)-g_0(x)-\alpha(x))_-) \le \le |\overline{(f(x)-g(x))}|,$$ получим

$$B = \varphi'_\Pi(0)\int\limits_E |\overline{(g_0(x)-g(x))}|\,d\mu + \int\limits_{T/E} \{\varphi'_\Lambda(|\overline{(f(x)-g_0(x))}|)sign\{(f(x)-g_0(x))(g(x)-g_0(x))\}_+ + +\varphi''_\Pi(|\overline{(f(x)-g_0(x))}|)sign\{(f(x)-g_0(x))(g(x)-g_0(x))\}_-\}\{|\overline{(f(x)-g(x))}|- -|\overline{(f(x)-g_0(x))}|\}d\mu \ge 0.$$

Далее функция $\varphi(u)$ имеет в каждой точке $u \in [0, +\infty)$ правую производную $\varphi'_\Pi(u)$ и, за исключением точки $u = 0$, левую производную $\varphi'_\Lambda(u)$, причем $\varphi'_\Lambda(u) \le \varphi'_\Pi(u)$. Для любых a и x справедливы следующие неравенства:

$$\varphi(x) \ge \varphi(0) + x\varphi'_\Pi(0); \qquad (11)$$

$$\varphi(|a+x|) \ge \varphi(|a|) + \varphi'_\Pi(|a|)x\, sign\, a, \quad \varphi(|a+x|) \ge \varphi(|a|) + \varphi'_\Lambda(|a|)x\, sign\, a,$$

последние два из которых перепишем в виде

$$\varphi(|a+x|) \ge \varphi(|a|) + x\, sign\, a\{\varphi'_\Lambda(|a|)B_+ + \varphi'_\Pi(|a|)B_-\} \qquad (12)$$

для любого $B \ne 0$. Если $x = 0$, то неравенство (12) будет справедливо и при $B = 0$. Применяя (11) и (12), будем иметь

$$\int\limits_T \varphi(|\overline{(f(x)-g(x))}|)d\mu = \int\limits_T \varphi(|\overline{(f(x)-g_0(x))}| + (|\overline{(f(x)-g(x))}| - |\overline{(f(x)-g_0(x))}|))d\mu \ge B + + \int\limits_{T/E} \varphi(|\overline{(f(x)-g_0(x))}|)d\mu + \int\limits_E \varphi(0)d\mu \ge \int\limits_T \varphi(|\overline{(f(x)-g_0(x))}|)d\mu$$

для любого g из H. Утверждение 4 доказано.

Замечание. Утверждение 4 будет справедливо и в случае, когда функция $\alpha(x)$ будет неположительной, но тогда вместо условий (8) и (9) нужно потребовать следующие условия:

$$|\rho_3(x)| \le |\rho_1(x)| \text{ для почти всех } x \in T;$$

$$\mu\{x \in T : \alpha(x) \le f(x) - g_0(x) < 0\} = 0.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09–01–00175) и Гранта поддержки ведущих научных школ НШ-3252–2010.1.

Reference

1 *Kantorovich L.V., Akilov G.P.* Functional analysis. — M.: Science, 1977. — 741 p.

2 *Dolzhenko E.P., Sevastyanov A.A.* Sign-sensitive approximations. The space of sign-sensitive weights. The rigity and the freedom of a system // Russ. Acad. Sci. Dokl. Mat. — 1993. — Vol. 332. — № 6. — P. 686–689.

3 *Dolzhenko E.P., Sevastyanov A.A.* Sign-sensitive approximations. Uniqueness and stability questions // Russ. Acad. Sci. Dokl. Mat. — 1993. — Vol. 333. — № 1. — P. 5–7.

4 *Babenko V.F.* Nonsymmetric approximations in spaces of summable functions // Ukr. Math. J. — 1982. — Vol. 34. — № 4.

5 *Rakhmetov N.K.* Uniqueness of the polynomial of best approximation in classes $\varphi(L)$ // MSU Messenger. — Series Math., Mekh. — 1990. — № 4.

6 *Simonova I.E., Simonov B.V.* On the polynomial of best approximation in an Orlicz space // Bulletin of institution of higher education Mat. — 1995. — № II (378).

7 *Garkavi A.L.* The theorems of existence of a best approximating element in (F) — spaces with integral metric // Math. notes. — 1970. — Vol. 8. — № 5. — P. 583–594.

8 *Krasnosel'skii M.A., Rutitskii Y.B.* Convex functions and Orlicz spaces. — M., 1958. — 271 p.

9 *Korneichuk N.P.* Extremal problem of approximation theory. — M.: Science, 1976. — 320 p.

10 *Rudin W.* Principles of mathematical analysis. — M.: World, 1976. — 319 p.

Б.В.Симонов

Орлич кеңістігінде ең жақсы жуықтау элементі туралы

Мақалада Орлич кеңістігінде шекаралық ең жақсы жуықтау элементі туралы түсінік енгізілген. Бұл түсінік — ең жақсы жуықтау элементі анықтамасының жалпыланған түрі. Сонымен бірге шекаралық ең жақсы жуықтау псевдоэлементі, шекаралық ең жақсы жуықтау элементі туралы түсініктер анықталған және шекаралық ең жақсы жуықтау псевдоэлементінің мағынасын түсіндіретін мысалдар келтірілген. Шекаралық ең жақсы жуықтау псевдоэлементі және шекаралық ең жақсы жуықтау элементі бар болу шарттары көрсетілген.

B.V.Simonov

About the element of the best approximation in Orlich space

The article introduces the notion of the best threshold approximation in Orlich space and in this way generalizes the ideas of the best approximation. The notions of the pseudoelement of the best threshold approximation and those of the element of the best threshold approximation are also determined. The examples explaining the idea of introducing the notion of the pseudoelement of the best threshold approximation are given. The conditions of the existence of the pseudoelement of the best threshold approximation and those of the element of the best threshold approximation are indicated.