УДК 517.95

Б.Т.Торебек

Международный казахско-турецкий университет им. Х.А.Ясави, Туркестан (E-mail: berik_mktu@mail.ru)

О разрешимости одной нелокальной задачи для уравнения Лапласа с граничным оператором дробного порядка в смысле Капуто

В статье исследована нелокальная краевая задача первого типа для уравнения Лапласа в единичном шаре. В качестве граничного оператора рассмотрен оператор дробного дифференцирования в смысле Капуто. Рассмотренная задача — простейшее обобщение задачи Бицадзе-Самарского на граничные операторы нецелого порядка. Доказаны теоремы единственности и существования решения.

Ключевые слова: оператор дробного дифференцирования, Капуто, задача Бицадзе-Самарского, Дирихле, однородность, гармонические полиномы.

Пусть $\Omega=\left\{x\in R^n:\ |x|<1\right\}$ — единичный шар; $\partial\Omega=\left\{x\in R^n:\ |x|=1\right\}$ — его граница; $u(x)$ — гармоническая функция в области Ω; m — натуральное число, $r=|x|$, $\theta=\dfrac{x}{|x|}$, $0<\alpha<1$.

Рассмотрим оператор

$$D_*^{\alpha}[u](x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^r\left(r-\tau\right)^{-\alpha}\frac{du(\tau\theta)}{d\tau}d\tau.$$

D_*^{α} называется оператором дифференцирования α-го порядка в смысле Капуто.

Для любого $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)$, $0<\alpha_j<1$, $j=1,2,...,m$, введем обозначения

$$B_*^{\alpha}=r^{\alpha_1}D_*^{\alpha_1}\left[r^{\alpha_2}D_*^{\alpha_2}...\left[r^{\alpha_m}D_*^{\alpha_m}\right]...\right],\ B^{-\alpha}[u](x)=\int_0^1\frac{ds_1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^1\frac{ds_2}{\Gamma(\alpha_2)}...\int_0^1\frac{s^{-\alpha}\left(1-s\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha_m)}u(sx)ds_m;$$

$$\gamma_{k,m}=\frac{\Gamma^m(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha_1)\Gamma(k+1-\alpha_2)...\Gamma(k+1-\alpha_m)},\ s=s_1s_2...s_m,\ s^{-\alpha}=s_1^{-\alpha_1}s_2^{-\alpha_2}...s_m^{-\alpha_m};$$

$$\left(1-s\right)^{\alpha-1}=\left(1-s_1\right)^{\alpha_1-1}...\left(1-s_m\right)^{\alpha_m-1}.$$

Пусть a_j — действительные числа, $0<\delta_j<1$, $j=1,2,...,N$. Причем будем считать a_j — числа одного знака, т.е. при всех $j=1,2,...,N$, выполняются $a_j\le 0$ или $a_j\ge 0$.

Рассмотрим в Ω следующую нелокальную задачу:

$$\Delta u(x)=0,\ x\in\Omega; \tag{1}$$

$$B_*^{\alpha}\left[u\right](x)-\sum_{j=1}^{N}a_ju(\delta_jx)=f\left(x\right),\ x\in\partial\Omega; \tag{2}$$

$$u(0)=b, \tag{3}$$

где $f\left(x\right)$ — непрерывная функция; b — некоторое заданное число.

Свойства и некоторые применения операторов B_*^{α} и $B^{-\alpha}$ изучены в [1].

Рассматриваемая задача является простейшим обобщением задачи Бицадзе-Самарского [2] на граничные операторы нецелого порядка. Заметим, что аналогичные задачи в случае $\alpha=0$ изучались в [3–6], а в случае $b=0$ и $\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|\le\gamma_{0,m}$ изучались в [1, 7–9].

Задача *N*. Найти функцию $u(x)\in C^2\left(\Omega\right)\cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ гармоническую в шаре Ω, для которой функция $B_*^{\alpha}[u](x)$ непрерывна в $\overline{\Omega}$ и удовлетворяет условиям (2), (3).

Приведем некоторые свойства операторов B_*^{α} и $B^{-\alpha}$, доказанных в [1].

Лемма 1. Если $u(x)$ гармоническая функция в области Ω, то функции $B^{-\alpha}[u](x)$ и $B_*^{\alpha}[u](x)$ также являются гармоническими в области Ω и $B_*^{\alpha}[u](0)=0$.

Лемма 2. Если $u(x)$ гармоническая функция в области Ω, то для любого $x\in\Omega$ справедливо равенство

$$u(x)=u(0)+\int_0^1\frac{ds_1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^1\frac{ds_2}{\Gamma(\alpha_2)}\ldots\int_0^1\frac{s^{-\alpha}\left(1-s\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha_m)}B_*^{\alpha}\left[u\right](sx)ds_m.$$

Лемма 3. Если $u(x)$ — гармоническая функция в области Ω, то для любого $x\in\Omega$ справедливы равенства

$$B^{-\alpha}[B_*^{\alpha}[u]](x)=u(x)-u(0);\ B_*^{\alpha}[B^{-\alpha}[u]](x)=u(x).$$

Приведем основные утверждения этой работы.

Теорема 1. Если $\sum\limits_{j=1}^{N}a_j\le\gamma_{0,m}$ и решение задачи ***N*** существует, то оно единственно.

Доказательство. Пусть существует два решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$. Обозначим $u(x)=u_1(x)-u_2(x)$. Тогда функция $u(x)$ будет удовлетворять однородным условиям (2) и (3).

Обозначим

$$w(x)=B_*^{\alpha}\left[u\right](x)-\sum_{j=1}^{N}a_ju(\delta_jx).$$

Так как функция $u(x)$ является гармонической в шаре Ω, то в силу утверждения леммы 1 функция $B_*^{\alpha}[u](x)$ также является гармонической в Ω и $B_*^{\alpha}[u](0)=0$. Кроме того, при любом δ_j функция $u(\delta_jx)$ гармоническая в шаре Ω.

Тогда $w(x)$ — решение следующей задачи Дирихле:

$$\Delta w(x)=0, x\in\Omega,\ w(x)=0, x\in\partial\Omega.$$

Отсюда в силу единственности решения задачи Дирихле получаем, что $w(x)\equiv0, x\in\bar{\Omega}$.

Следовательно, при всех $x\in\bar{\Omega}$ выполняется равенство

$$B_*^{\alpha}\left[u\right](x)\equiv\sum_{j=1}^{N}a_ju(\delta_jx).\tag{4}$$

Разложим гармоническую функцию $u(x)$ в ряд вида

$$u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{h_k}u_k^{(i)}H_k^{(i)}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}r^k\sum_{i=1}^{h_k}u_k^{(i)}H_k^{(i)}(\theta);$$

где $H_k^{(i)}(x)$ — полная система однородных гармонических полиномов степени k; $u_k^{(i)}$ — коэффициенты разложения. Применяя оператор B_*^{α} к функции $u(x)$, получаем (см. [1])

$$B_*^{\alpha}\left[u\right](x)=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_{k,m}\sum_{i=1}^{h_k}u_k^{(i)}H_k^{(i)}(x).\tag{5}$$

Далее, используя однородность гармонических полиномов $H_k^{(i)}(x)$, имеем

$$\sum_{j=1}^{N}a_j\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{h_k}u_k^{(i)}H_k^{(i)}(\delta_jx)=\sum_{j=1}^{N}a_j\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{h_k}u_k^{(i)}\delta_j^kH_k^{(i)}(x).\tag{6}$$

Подставляя (5) — в левую, а (6) в правую части равенства (4), получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{h_k}\gamma_{k,m}u_k^{(i)}H_k^{(i)}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{h_k}\sum_{j=1}^{N}a_j\delta_j^ku_k^{(i)}H_k^{(i)}(x).$$

Так как $\sum\limits_{i=1}^{h_k}u_0^{(i)}=u(0)=0$, то отсюда получаем $(\gamma_{k,m}-\sum\limits_{j=1}^{N}a_j\delta_j^k)u_k^{(i)}=0$.

Следовательно, либо выполняется равенство $\gamma_{k,m}-\sum\limits_{j=1}^{N}a_j\delta_j^k=0$, либо $u_k^{(i)}=0$, $k=1,2,\ldots$, $i=1,2,\ldots,h_k$. Если $u_k^{(i)}=0$, то $u(x)=0, x\in\Omega$ и по непрерывности $u(x)\equiv0, x\in\bar{\Omega}$.

Если $u_k^{(i)} \neq 0$ для некоторого индекса $k = k_0$, то необходимо выполнение условия $\gamma_{k_0,m} - \sum_{j=1}^{N} a_j \delta_j^{k_0} = 0,$ или то же самое $\gamma_{k_0,m} = \sum_{j=1}^{N} a_j \delta_j^{k_0}$.

Если для всех $j = 1,2,...,N,$ $a_j \equiv 0,$ то $\gamma_{k_0,m} = 0.$ Так как $\gamma_{k_0,m} > 0,$ то в этом случае $u(x) \equiv 0, x \in \overline{\Omega}.$

Если $a_j \le 0, j = 1,2,...,N,$ то, в силу неравенств $\sum_{j=1}^{N} a_j \delta_j^{k_0} < 0$ и $\gamma_{k_0,m} > 0,$ равенство $\gamma_{k_0,m} = \sum_{j=1}^{N} a_j \delta_j^{k_0}$ ни при каком значении $k_0 = 1,2,...$ не выполняется. Поэтому в этом случае $u(x) \equiv 0,$ $x \in \overline{\Omega}.$ А если $a_j \ge 0,$ то $\gamma_{k_0,m} = \sum_{j=1}^{N} a_j \delta_j^{k_0} < \sum_{j=1}^{N} a_j \le \gamma_{0,m}.$ Отсюда получаем $\gamma_{k_0,m} < \gamma_{0,m}.$ А это равенство не выполняется ни при каком значении $k_0 = 1,2,...$. Тогда и в этом случае $u(x) \equiv 0,$ $x \in \overline{\Omega}.$

Таким образом, если a_j — числа одного знака, т.е. при всех $j = 1,2,...,N$ выполняются неравенства $a_j \le 0$ или $a_j \ge 0$ и $\sum_{j=1}^{N} a_j \le \gamma_{0,m},$ то решением однородной задачи N будет функция $u(x) \equiv 0, x \in \overline{\Omega}.$

Теорема доказана.

Теперь приведем утверждение относительно существования решения задачи *N*.

Теорема 2. Пусть $f(x) \in C(\partial\Omega)$ и $\sum_{j=1}^{N} a_j \le \gamma_{0,m}.$

Тогда для разрешимости задачи *N* необходимо и достаточно выполнения условия

$$\frac{1}{\omega_n} \int_{\partial\Omega} f(x) dS_x = -b \sum_{j=1}^{N} a_j. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть решение задачи *N* существует и это $u(x).$ Рассмотрим функцию

$$w(x) = B_*^{\alpha}\left[u\right](x) - \sum_{j=1}^{N} a_j u(\delta_j x).$$

Так как $u(x)$ гармоническая функция, то в силу утверждения леммы 1 функция $B_*^{\alpha}[u](x),$ а также $u(\delta_j x)$ являются гармоническими в области $\Omega.$

Следовательно, функция $w(x)$ является решением следующей задачи Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta w(x) = 0, x \in \Omega; \\ w(x) = f(x), x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Представим функцию $w(x)$ в виде интеграла Пуассона

$$w(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial\Omega} \frac{1 - |x|^2}{|x-y|^n} f(y) dS_y.$$

Далее, используя условие

$$w(0) = B_*^{\alpha}\left[u\right](0) - \sum_{j=1}^{N} a_j u(0) = -b \sum_{j=1}^{N} a_j,$$

получаем

$$w(0) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial\Omega} f(y) dS_y = -b \sum_{j=1}^{N} a_j.$$

Таким образом, необходимость выполнения условия (7) доказана. Покажем, что условие (7) является и достаточным для существования решения задачи. Предположим, что функция $v(x)$ является решением задачи Дирихле

$$\Delta v(x) = 0, x \in \Omega; \tag{8}$$

$$v(x) = \mu(x), x \in \partial\Omega, \tag{9}$$

с дополнительным условием

$$v(0) = 0. \tag{10}$$

Известно, что для любого $\mu(x) \in C(\partial\Omega)$ решение задачи (8), (9) существует и единственно.

Представив функцию $v(x)$ в виде интеграла Пуассона

$$v(x)=\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\partial\Omega}\frac{1-|x|^2}{|x-y|^n}\mu(y)dS_y$$

и требуя выполнение условия (10), получаем

$$0=v(0)=\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\partial\Omega}\mu(y)dS_y\Rightarrow\int\limits_{\partial\Omega}\mu(y)dS_y=0.$$

Таким образом, если $\mu(x)\in C(\partial\Omega)$ и $\int\limits_{\partial\Omega}\mu(y)dS_y=0,$ то решение задачи (8)–(10) существует и единственно.

Обозначим через $\mu(x)$ след гармонической функции $B_*^{\alpha}\left[u\right](x)$ на $\partial\Omega,$ т.е. $\mu(x)=B_*^{\alpha}\left[u\right](x)\Big|_{\partial\Omega}$. Обозначим также $v(x)=B_*^{\alpha}\left[u\right](x).$

Тогда функция $v(x)$ будет решением задачи (8)–(10).

Рассмотрим функцию

$$u(x)=B^{-\alpha}[v](x)+b. \tag{11}$$

Применяя к равенству (11) оператор B_*^{α} и используя свойства операторов B_*^{α}, $B^{-\alpha}$ из леммы 3, имеем

$$B_*^{\alpha}[u](x)=B_*^{\alpha}[B^{-\alpha}[v]](x)+B_*^{\alpha}[b]=v(x).$$

Далее представим функцию $v(x)$ в виде интеграла Пуассона и с учетом условия $v(0)=0$ для функции $B^{-\alpha}[v](\delta_j x)$ получаем представление

$$B^{-\alpha}[v](\delta_j x)=\int\limits_0^1\frac{ds_1}{\Gamma(\alpha_1)}...\int\limits_0^1\frac{s^{-\alpha}(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha_m)}\left[\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\partial\Omega}\frac{1-|s\delta_j x|^2}{|s\delta_j x-y|^n}\mu(y)dS_y-\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\partial\Omega}\mu(y)dS_y\right]ds_m=$$

$$=\int\limits_0^1\frac{ds_1}{\Gamma(\alpha_1)}...\int\limits_0^1\frac{s^{-\alpha}(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha_m)}\left[\frac{1}{\omega_n}\left[\int\limits_{\partial\Omega}\frac{1-|s\delta_j x|^2}{|s\delta_j x-y|^n}-1\right]\mu(y)dS_y\right]ds_m=\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\partial\Omega}P_\alpha(\delta_j x,y)\mu(y)dS_y,$$

где через $P_\alpha(\delta_j x,y)$ обозначено

$$P_\alpha(\delta_j x,y)=\int\limits_0^1\frac{ds_1}{\Gamma(\alpha_1)}...\int\limits_0^1\frac{s^{-\alpha}(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha_m)}\left(\frac{1-|s\delta_j x|^2}{|s\delta_j x-y|^n}-1\right)ds_m.$$

Подставляя функцию (11) в граничное условие (2), имеем

$$B_*^{\alpha}u(x)-\sum_{j=1}^N a_j u(\delta_j x)=v(x)-\sum_{j=1}^N a_j B^{-\alpha}[v](\delta_j x)-\sum_{j=1}^N a_j b\Bigg|_{\partial\Omega}=$$

$$=\mu(x)-\sum_{j=1}^N a_j\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\partial\Omega}P_\alpha(\delta_j x,y)\mu(y)dS_y-\sum_{j=1}^N a_j b=f(x),x\in\partial\Omega.$$

Введем обозначения

$$K(x,y)=-\sum_{j=1}^N\frac{a_j}{\omega_n}P_\alpha(\delta_j x,y),\ f_1(x)=f(x)+b\sum_{j=1}^N a_j.$$

Тогда относительно функции $\mu(x)$ получаем интегральное уравнение

$$\mu(x)+\int\limits_{\partial\Omega}K(x,y)\mu(y)dS_y=f_1(x),x\in\partial\Omega. \tag{12}$$

Покажем, что функция $K(x,y)$ является непрерывной на $\partial\Omega\times\partial\Omega.$ Для доказательства этого утверждения достаточно показать непрерывность функции $P_\alpha(\delta_j x,y).$

Так как $0<\delta_j<1$, то $\delta_j x\in\Omega_1\subset\Omega$ и $|s\delta_j x-y|>0,x,y\in\partial\Omega,$ т.е. функция $|s\delta_j x-y|$ отделена от нуля и поэтому $P_\alpha(\delta_j x,y)$ непрерывна на $\partial\Omega\times\partial\Omega.$

Таким образом, функция $K(x,y)$ является непрерывной на $\partial\Omega\times\partial\Omega.$ Кроме того, из равенства

$$s^2\delta_j^2|x|^2-2s\delta_j(x,y)+|y|^2=s^2\delta_j^2|y|^2-2s\delta_j(y,x)+|x|^2,|x|=|y|=1$$

получаем $|s\delta_j x-y|^2=|s\delta_j y-x|^2,$ т.е. ядро $K(x,y)$ является симметричным.

Следовательно, к интегральному уравнению (12) можно применить теорию Фредгольма. Так как при выполнении условия $\sum_{j=1}^{N} a_j \le \gamma_{0,m}$ однородная задача, соответствующая (12), имеет только нулевое решение, то соответствующее союзное однородное интегральное уравнение также имеет только нулевое решение. Тогда в силу теоремы Фредгольма интегральное уравнение (12) для любого $f(x) \in C(\partial\Omega)$ разрешимо.

Покажем, что при выполнении условий (7) решение интегрального уравнения (12) удовлетворяет условию $\int_{\partial\Omega} \mu(y) dS_y = 0$. Действительно, интегрируя равенство (12) по области $\partial\Omega$, имеем

$$\int_{\partial\Omega} \mu(x) dS_x + \int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} K(x,y)\mu(y) dS_y dS_x = \int_{\partial\Omega} f_1(x) dS_x. \tag{13}$$

Рассмотрим интеграл $\int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} K(x,y)\mu(y) dS_y dS_x$. Меняя порядок интегрирования, имеем

$$\int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} K(x,y)\mu(y) dS_y dS_x = \int_{\partial\Omega} \mu(y) \int_{\partial\Omega} K(x,y) dS_x dS_y.$$

Изучим внутренний интеграл $\int_{\partial\Omega} K(x,y) dS_x$. По обозначению

$$K(x,y) = -\sum_{j=1}^{N} \frac{a_j}{\omega_n}\left(P_\alpha(\delta_j x, y)\right) = -\sum_{j=1}^{N} \frac{a_j}{\omega_n}\int_0^1 \frac{ds_1}{\Gamma(\alpha_1)} ... \int_0^1 s^{-\alpha}\frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha_m)}\left(\frac{1-|s\delta_j x|^2}{|s\delta_j x - y|^n} - 1\right) ds_m.$$

Так как $\frac{1}{\omega_n}\int_{\partial\Omega}\frac{1-|x|^2}{|x-y|^n} dS_y = 1$, то $\int_{\partial\Omega} K(x,y) dS_x = 0$. Следовательно, $\int_{\partial\Omega} \mu(x) dS_x = \int_{\partial\Omega} f_1(x) dS_x$. А если теперь выполняется условие (7), то $\int_{\partial\Omega} f_1(x) dS_x = 0$. Тогда из равенства (13) вытекает $\int_{\partial\Omega} \mu(x) dS_x = 0$.

Итак, если $f(x) \in C(\partial\Omega)$ и для него выполняется условие (7), то решение интегрального уравнения (12) существует, единственно и для него выполняется условие $\int_{\partial\Omega} \mu(x) dS_x = 0$. Подставляя функцию $\mu(x)$ в интеграл Пуассона $\frac{1}{\omega_n}\int_{\partial\Omega}\frac{1-|x|^2}{|x-y|^n}\mu(y) dS_y$, получаем гармоническую в Ω функцию $v(x) = \frac{1}{\omega_n}\int_{\partial\Omega}\frac{1-|x|^2}{|x-y|^n}\mu(y) dS_y$, удовлетворяющую условиям (8) и (9). По этой функции построим функцию $u(x) = B^{-\alpha}[v](x) + b$, которая удовлетворяет всем условиям задачи *N*.

Теорема доказана.

Выражаю глубокую благодарность доктору физико-математических наук, профессору Б.Х.Турметову за постановку задач и внимание к работе.

References

1 *Karachik V.V., Turmetov B.Kh., Torebek B.T.* On some integro-differential operators in the class of harmonic functions and their application // Mathematical proceedings (in Russian). — № 1. — Novosibirsk, 2011. — Vol. 14. — P. 99–125.

2 *Bitsadze A.V., Samarskii A.A.* On some simple generalizations of lnear elliptic boundary problems // Soviet Math. Rep. — M., 1969. 10 (2). — P. 398–400.

3 *Il'in V.A., Moiseev E.I.* Non-local boundary value problems of first kind for a Sturm-Liouville operator in its differential and finite difference aspects // Soviet Math. Rep. — M., 1986. — Vol. 291. — № 3. — P. 534–539.

4 *Pulatov A.K.* A problem Bitsadze-Samarskii // Differential equation (in Russian). — 1989. — Vol. 25. — № 3. — P. 537–539.

5 *Skubachevskii A.L.* Nonclassical boundary-value problems I // Journal of Mathematical Sciences. — 2008. — 155:2. — P. 199–334.

6 *Skubachevskii A.L.* Nonclassical boundary-value problems II // Journal of Mathematical Sciences. — 2010. — 166:4. — P. 377–561.

7 *Torebek B.T., Turmetov B.Kh.* On the solvability of some problems for the Laplace equation // Mathematical Journal (in Russian). — Almaty, 2010. — Vol. 10. — № 1 (35). — P. 93–103.

8 *Turmetov B.Kh., Iliyasova M.T.* On the solvability of a nonlocal problem with the boundary operator of fractional order in the sense of Hadamard-Marshoud // Bulletin of ENU (in Russian). — Astana, 2010. — № 2. — P. 24–30.

9 *Torebek B.T.* A nonlocal problem of the first type for the Laplace equation with the boundary operator of fractional order / Abstracts of 42th All-Russian Youth School-Conference The modern problems of mathematics (in Russian). — Yekaterinburg, 2011. — P. 111–112.

Б.Т.Төребек

Лаплас теңдеуі үшін шекаралық шартында Капуто мағынасындағы бөлшек ретті оператор қатысқан бейлокалды есептің шешімділігі

Мақалада Лаплас теңдеуі үшін бірлік шарда бірінші текті бейлокалды шеттік есеп зерттелген. Шекаралық оператор есебінде Капуто мағынасындағы бөлшек ретті дифференциалдау операторы қарастырылған. Бұл есеп Бицадзе-Самарский есебінің шекаралық шартында бүтін емес оператор қатысқан қарапайым жалпыламасы болып табылады. Есептің шешімінің жалғыздығы және бар болуы туралы теоремалар дәлелденген.

B.T.Torebek

On solvability of nonlocal problems for the Laplace equation with the boundary operator of fractional order in the sense Caputo

In this paper the nonlocal boundary value problem of the first type for the Laplace equation in the unit bal is reseachedl. As a boundary operator, the operator of fractional differentiation in the sense of Caputo is considered. The considered problem is the simplest generalizations of the problem Bitsadze-Samara on the boundary operators of noninteger order. We prove theorems on the existence and uniqueness of solutions.