УДК 517.956.225. 517.956.223

Б.Т.Торебек[1], Б.Х.Турметов[2]

[1]*Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы;*
[2]*Международный казахско-турецкий университет им. Х.А.Ясави, Туркестан*
(E-mail: turebekb85@mail.ru)

О разрешимости некоторых краевых задач для дробного аналога уравнений Лапласа в полуполосе

В статье изучены некоторые краевые задачи для дробного аналога уравнений Лапласа в полуполосе. Спектральным методом доказаны теоремы о существовании и единственности решения рассматриваемых задач.

Ключевые слова: оператор Римана-Лиувилля, оператор Капуто, секвенциальное производное, уравнение Лапласа, функция Миттаг-Леффлера, краевая задача.

1. Введение и постановка задачи

Для произвольного положительного α оператором дробного интегрирования в смысле Римана-Лиувилля порядка α называется выражение [1, 68]

$$I^{\alpha}\left[f\right](t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}f(s)ds,$$

заданное на функциях $f(t)$, определенных в интервале $(0,\ell)$, $\ell<\infty$. Так как $I^{\alpha}[f](t)\to f(t)$ почти всюду при $\alpha\to 0$, то по определению полагают $I^{0}[f](t)=f(t)$.

Пусть $m-1<\alpha\le m$, $m=1,2,\ldots.$ Тогда выражение ${}_{RL}D^{\alpha}\left[f\right](t)=\frac{d^m}{dt^m}I^{m-\alpha}\left[f\right](t)$ называется оператором дифференцирования порядка α в смысле Римана-Лиувилля [1; 70], а

$${}_{C}D^{\alpha}\left[f\right](t)={}_{RL}D^{\alpha}\left[f(t)-f(0)-\frac{f'(0)}{1!}t-\ldots-\frac{f^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}t^{m-1}\right]—$$

оператором дифференцирования порядка α в смысле Капуто [1; 91]. Если $f(t)\in C^{m}\left[0,l\right]$, то оператор ${}_{C}D^{\alpha}$ можно привести к виду [1; 92]

$${}_{C}D^{\alpha}\left[f\right](t)=I^{m-\alpha}\left[f^{(m)}\right](t).$$

В дальнейшем мы будем использовать еще один вид производной дробного порядка, а именно секвенциальной производной порядка $k\alpha, k=1,2,\ldots$, которая называется

$$D^{\alpha}={}_{C}D^{\alpha}\ 0<\alpha\le 1,\ D^{k\alpha}=D^{\alpha}D^{(k-1)\alpha},k=2,3,\ldots.$$

Отметим, что понятие секвенциальной производной введено в работе [2; 209]. Свойства этих операторов изучены в работах [1–3].

Пусть $\Omega=\left\{(x,y)\in R^{2}:0<x<1,\,0<y<\infty\right\}$ — полуполоса, $\bar{\Omega}=\left\{(x,y):0\le x\le 1,y\ge 0\right\}$ — замкнутая полуполоса и $\frac{1}{2}<\alpha\le 1.$ Рассмотрим в области Ω уравнение

$$D_{x}^{2\alpha}u(x,y)+u_{yy}(x,y)=0,(x,y)\in\Omega,\frac{1}{2}<\alpha\le 1. \qquad (1.1)$$

Здесь $D_{x}^{2\alpha}$ означает $D_{x}^{2\alpha}=D_{x}^{\alpha}D_{x}^{\alpha}$, и оператор D_{x}^{α} действует по пременной x.

Регулярным решением уравнения (1.1) назовем функцию $u(x,y)\in C(\bar{\Omega})$, для которой $D_{x}^{\alpha}u(x,y),D_{x}^{2\alpha}u(x,y),u_{yy}(x,y)\in C(\Omega)$.

Так как при $\alpha = 1$ ${}_C D^1 = D^1 = \frac{d}{dy}$, то $D_x^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \Delta$, т.е. в этом случае уравнение (1.1) совпадает с обычным уравнением Лапласа.

Рассмотрим в области Ω следующие задачи:

Задача D. Найти регулярное решение уравнения (1.1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x,0) = f(x),\ 0 \le x \le 1; \tag{1.2}$$

$$u(0,y) = 0,\ u(1,y) = 0,\ 0 \le y; \tag{1.3}$$

$$\lim_{y\to\infty} |u(x,y)| \to 0. \tag{1.4}$$

Задача N. Найти регулярное решение уравнения (1.1), для которого $u_x(x,y) \in C(\overline{\Omega})$, удовлетворяющее краевым условиям (1.2)

$$u_x(0,y) = 0, u_x(1,y) = 0,\ 0 \le y \tag{1.5}$$

и условиям

$$\lim_{y\to\infty} |u(x,y)| \to 0 \tag{1.6}$$

или

$$\lim_{y\to\infty} |u(x,y)| \le C, C = Const. \tag{1.7}$$

Необходимость исследования краевых задач для уравнения (1.1) определяется использованием фрактального уравнения Лапласа для описания производственных процессов при математическом моделировании социально-экономических систем [4].

При рассмотрении возможных сценариев устойчивого развития региона как открытой производственной системы «вход-выход» с единой целевой функцией (функцией благосостояния) важную роль играет производственная функция, которая выражает устойчивое количественное соотношение между входами и выходами, задает уравнение состояния или определяющее уравнение системы. Одним из наиболее известных производственных функций является производственная функция Коббе-Дугласа.

В работе [4] обращено внимание на то, что задача нахождения двухфакторной обобщенной функции Коббе-Дугласа сводится к краевым задачам для обобщенного уравнения Лапласа дробного порядка. Заметим также, что свойства и применение дробного аналога оператора Лапласа рассматривались в работах [5–10]. Кроме того, обратные задачи с краевыми условиями типа (1.3) или (1.5) для дифференциальных уравнений дробного порядка исследовались в работах [11–13].

2. Решение одномерного уравнения с дробной производной

Пусть $\frac{1}{2} < \alpha \le 1,\ \mu > 0.$ Рассмотрим следующий аналог задачи Коши:

$$D^{2\alpha}[y](t) - \mu^2 y(t) = 0, t > 0; \tag{2.1}$$

$$y(0) = A, D^{\alpha} y(0) = B, \tag{2.2}$$

где A, B — заданные действительные числа.

Решение задачи (2.1)–(2.2) будем искать из класса $y(t), D^{\alpha} y(t) \in C[0,\infty),\ D^{2\alpha} y(t) \in C(0,\infty)$. Так как $D^{2\alpha} = D^{\alpha} D^{\alpha}$, то уравнение (2.1) можно переписать в виде $(D^{\alpha} - \mu)(D^{\alpha} + \mu) y(t) = 0.$ Обозначим $(D^{\alpha} - \mu) y(t) = v(t).$ Тогда задача Коши (2.1)–(2.2) эквивалентна следующей системе:

$$(D^{\alpha} - \mu) y(t) = v(t), y(0) = A; \tag{2.3}$$

$$(D^{\alpha} + \mu) v(t) = 0, v(0) = B - \mu A. \tag{2.4}$$

Далее рассмотрим вспомогательную задачу Коши

$$\begin{cases} (D^{\alpha} + \mu) u(t) = g(t); \\ u(0) = C. \end{cases} \tag{2.5}$$

Введем пространство решений [14]. Будем говорить, что $f(t)\in C_\gamma$, если существует действительное число $p>\gamma$ такое, что $f(t)=t^p f_1(t)$ и $f_1(t)\in C[0,\infty)$. Аналогично $f(t)\in C_\gamma^m \Leftrightarrow f^{(m)}(t)\in C_\gamma$. Известно, что если $f(t)\in C_\gamma, \gamma\ge -1$, тогда $f(t)\in C^m(0,\infty)\bigcap C^{m-1}[0,\infty)$.

Справедливо утверждение [15].

Лемма 1. Пусть $0<\alpha\le 1$, $g(t)\in C_{-1}^1$. Тогда решение задачи (2.5) существует, единственно, принадлежит классу C_{-1}^1 и представляется в виде

$$u(t)=CE_{\alpha,1}\left(\lambda t^\alpha\right)+\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda(t-\tau)^\alpha\right)g(\tau)\,d\tau,$$

где $E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty} z^k/\Gamma(\alpha k+\beta)$ — функция типа Миттаг-Леффлера [1; 42].

Используя утверждение леммы 1, решим систему (2.3), (2.4).

В силу утверждения леммы 1 решение задачи (2.4) существует, единственно и представляется в виде $v(t)=(B-\mu A)E_{\alpha,1}(-\mu t^\alpha)$. Очевидно, что $v(t), D^\alpha v(t)\in C[0,\infty)$. Подставляя найденное значение функции $v(t)$ в условия задачи (2.3), находим единственное решение в виде

$$u(t)=AE_{\alpha,1}\left(\mu t^\alpha\right)+(B-\mu A)\int_0^t \tau^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(\mu\tau^\alpha\right)E_{\alpha,1}\left(-\mu(t-\tau)^\alpha\right)d\tau.$$

Используя представление функции $E_{\alpha,\beta}(z)$, легко показать, что [3; 26]

$$\int_0^t \tau^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(\mu\tau^\alpha\right)E_{\alpha,1}\left(-\mu(t-\tau)^\alpha\right)d\tau=t^\alpha E_{2\alpha,\alpha+1}\left(\mu^2 t^{2\alpha}\right).$$

Тогда решение задачи (2.1)–(2.2) представляется в виде

$$y(t)=AE_{\alpha,1}\left(\mu t^\alpha\right)+(B-\mu A)t^\alpha E_{2\alpha,\alpha+1}\left(\mu^2 t^{2\alpha}\right).$$

В дальнейшем нам понадобится решение уравнения (2.1), обладающего свойством $|y(t)|\to 0$ при $t\to\infty$. Легко видеть, что функции $E_{\alpha,1}\left(\mu t^\alpha\right), t^\alpha E_{2\alpha,\alpha+1}\left(\mu^2 t^{2\alpha}\right)$ этим свойством не обладают. Нетрудно показать, что для функций $t^\alpha E_{2\alpha,\alpha+1}\left(\mu^2 t^{2\alpha}\right)$ справедливо представление

$$t^\alpha E_{2\alpha,\alpha+1}\left(\mu^2 t^{2\alpha}\right)=\frac{1}{2}\left[E_{\alpha,1}\left(\mu t^\alpha\right)-E_{\alpha,1}\left(-\mu t^\alpha\right)\right].$$

Тогда

$$y(t)=\frac{B+(2-\mu)A}{2}E_{\alpha,1}\left(\mu t^\alpha\right)+\frac{\mu A-B}{2}E_{\alpha,1}\left(-\mu t^\alpha\right).$$

Так как

$$D^{2\alpha}E_{\alpha,1}\left(\pm\mu t^\alpha\right)=\mu^2 E_{\alpha,1}\left(\pm\mu t^\alpha\right),$$

то каждая из этих функций является решением уравнения (2.1). Покажем, что функции $E_{\alpha,1}\left(\mu t^\alpha\right)$ и $E_{\alpha,1}\left(-\mu t^\alpha\right)$ являются линейно независимыми. Действительно, пусть это не так, т.е. существуют постоянные C_1, C_2 такие, что хотя бы одна из них не нуль и

$$C_1E_{\alpha,1}\left(\mu t^\alpha\right)+C_2E_{\alpha,1}\left(-\mu t^\alpha\right)=0, t\in[0,l], l<\infty. \tag{2.6}$$

Тогда, обозначив $y_1(t)=E_{\alpha,1}\left(\mu t^\alpha\right), y_2(t)=E_{\alpha,1}\left(-\mu t^\alpha\right)$, рассмотрим определитель Вандермонда

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1^{(\alpha)}(t) & y_2^{(\alpha)}(t)\end{vmatrix},$$

где $y_j^{(\alpha)}(t)=D^\alpha y_j(t), j=1,2.$ Если для всех $t\in[0,l]$ выполняется равенство (2.6), то

$$C_1\mu E_{\alpha,1}\left(\mu t^\alpha\right)-\mu C_2E_{\alpha,1}\left(-\mu t^\alpha\right)=0. \tag{2.6*}$$

Понятно, что для выполнения равенств (2.6) и (2.6)* необходимо и достаточно, чтобы определитель $W(y_1, y_2) = 0$ для всех $t \in [0,l]$. Но $y_1(0) = E_{\alpha,1}(0) = y_2(0) = 1$ и $y_1^{(\alpha)}(0) = \mu E_{\alpha,1}(0) = \mu$, $y_2^{(\alpha)}(0) = -\mu E_{\alpha,1}(0) = -\mu$, т.е.

$$W(y_1, y_2)\big|_{t=0} = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1^{(\alpha)}(t) & y_2^{(\alpha)}(t) \end{vmatrix}\Bigg|_{t=0} = -2\mu \neq 0.$$

Отсюда $C_1 = C_2 = 0$, т.е. получаем противоречие, что и доказывает линейно независимость функций $E_{\alpha,1}(-\mu t^\alpha), E_{\alpha,1}(\mu t^\alpha)$. Так как $D^{k\alpha} E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha) = \lambda^k E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha), k = 1,2,...,$ и $E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha) \in C[0,\infty)$, то функции $D^{k\alpha} E_{\alpha,1}(-\mu t^\alpha)$ и $D^{k\alpha} E_{\alpha,1}(\mu t^\alpha)$ при $k = 0,1,2$ непрерывны в области $[0,\infty)$.

Лемма 2. Общее решение уравнения (2.1) из класса $M = \{y(t), D^\alpha y(t) \in C[0,\infty), D^{2\alpha} y(t) \in C(0,\infty)\}$ представляется в виде

$$y(t) = C_1 E_{\alpha,1}(\mu t^\alpha) + C_2 E_{\alpha,1}(-\mu t^\alpha). \tag{2.7}$$

Доказательство. Пусть $x(t)$ — какое-нибудь решение уравнения (2.1) из класса M. Обозначим $A = x(0), B = D^\alpha x(0)$ и рассмотрим функцию

$$z(t) = \frac{1}{2}\left(A + \frac{B}{\mu}\right) E_{\alpha,1}(\mu t^\alpha) + \frac{1}{2}\left(A - \frac{B}{\mu}\right) E_{\alpha,1}(-\mu t^\alpha).$$

Тогда

$$z(0) = \frac{1}{2}\left(A + \frac{B}{\mu}\right) + \frac{1}{2}\left(A - \frac{B}{\mu}\right) = A; \quad D^\alpha z(0) = \frac{1}{2}\left(A + \frac{B}{\mu}\right)\mu - \frac{1}{2}\left(A - \frac{B}{\mu}\right)\mu = B.$$

Следовательно, $z(t)$ является решением задачи Коши (2.1), (2.2). Так как решение задачи Коши единственно, то $z(t) \equiv x(t)$, т.е. $x(t)$ представляется в виде линейной комбинации функций $E_{\alpha,1}(-\mu t^\alpha), E_{\alpha,1}(\mu t^\alpha)$. Лемма доказана.

Известно, что для функции Миттаг-Леффлера $E_{\alpha,\beta}(z)$ при $|z| \to \infty$ верны асимптотические оценки [3; 32]

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\alpha} z^{\frac{(1-\beta)}{\alpha}} e^{z^{\frac{1}{\alpha}}} - \sum_{k=1}^{p} \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta - \alpha k)} + O\left(\frac{1}{|z|^{p+1}}\right), \tag{i}$$

где $|\arg z| \le \rho_1 \pi, \rho_1 \in \left(\frac{\alpha}{2}, \min\{1,\alpha\}\right), \alpha \in (0,2)$, и [3; 35]

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{1+|z|}, \arg z = \pi. \tag{ii}$$

Из этих оценок следует, что

$$\begin{cases} E_{\alpha,1}(-\mu t^\alpha) \to 0, t \to \infty; \\ E_{\alpha,1}(\mu t^\alpha) \to \infty, t \to \infty. \end{cases} \tag{2.8}$$

3. Исследование задачи D

Сформулируем основное утверждение относительно задачи *D*.

Теорема 1. Пусть $f(x) \in C^{1+\varepsilon}[0,1]$, $f(0) = f(1) = 0$. Тогда решение задачи D существует, единственно и представляется в виде

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k E_{\alpha,1}(-k\pi y^\alpha) \sin k\pi x, \tag{3.1}$$

где $f_k = 2\int_0^1 f(x) \sin k\pi x dx$, $k = 1,2,...$.

Доказательство. Применение метода Фурье для решения задачи D приводит к спектральной задаче

$$\begin{cases} Y''(x)+\lambda Y(x),\ 0<x<1; \\ Y(0)=0,\ Y(1)=0. \end{cases}$$

Собственные значения этой задачи имеют вид $\lambda_k=(\pi k)^2, k=1,2,...$, а соответствующие им собственные функции — $Y_k(x)=\sqrt{2}\sin k\pi x.$ Система $Y_k(x)$ образует ортонормированный базис в пространстве $L_2(0,1)$. Следовательно, любое регулярное решение задачи D может быть при всех $y>0$ представлено в виде ряда

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(y)\sin k\pi x. \tag{3.2}$$

Разложим функцию $f(x)$ в ряд Фурье по системе $Y_k(x)$:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k\sin k\pi x, \tag{3.3}$$

где $f_k=(f,Y_k)$. Используя методику работы [15], рассмотрим функции

$$u_k(y)=2\int_0^1 u(x,y)\sin k\pi x dx,\ k=1,2,... \tag{3.4}$$

Применяя оператор $D_y^{2\alpha}$ к функции (3.4) и учитывая уравнение (1.1), получим:

$$D_y^{2\alpha}[u_k](y)=2\int_0^1 D_y^{2\alpha}[u](x,y)\sin k\pi x dx=-2\int_{-\pi}^{\pi}u_{xx}(x,y)\sin k\pi x dx.$$

Два раза интегрируя по частям последний интеграл и учитывая условия (1.2) и (1.4), имеем:

$$D_y^{2\alpha}u_k(y)-(\pi k)^2u_k(y)=0; \tag{3.5}$$

$$u_k(0)=f_k,\ k=1,2,...; \tag{3.6}$$

$$\lim_{y\to\infty}|u_k(y)|\to 0. \tag{3.7}$$

В силу утверждения леммы 2 общее решение уравнение (3.5) имеет вид

$$u_k(y)=C_1E_{\alpha,1}(k\pi y^{\alpha})+C_2E_{\alpha,1}(-k\pi y^{\alpha}).$$

В силу оценок (2.8) $E_{\alpha,1}(k\pi y^{\alpha})\to\infty$ при $y\to\infty$. Поэтому для выполнения условия (3.7) нам необходимо выбрать $C_1=0$. Тогда $u_k(y)=C_2E_{\alpha,1}(-k\pi y^{\alpha})$ и из условия (3.6) получаем $u_k(y)=f_kE_{\alpha,1}(-k\pi y^{\alpha})$. Далее из равенства (3.4) сразу следует единственность решения задачи D, так как если $f(x)=0$ на $[0,1]$, то $u_k(y)=0,\ k=1,2,...$ на $(0,\infty)$. Следовательно, в силу полноты системы $\{Y_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ функция $u(x,y)=0$ для всех $(x,y)\in\overline{\Omega}$.

Таким образом, формальное решение задачи D представляется в виде (3.1). Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, то для коэффициентов Фурье имеет место неравенство

$$|f_k|\le\frac{C}{k^{1+\varepsilon}}.$$

Тогда для всех $x\in[0,1], 0\le y\le l, l<\infty$, получаем $|u(x,y)|\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C}{k^{1+\varepsilon}}<\infty$, т.е. ряд (3.1) сходится равномерно в любой области $[0,1]\times[0,l]$, и поэтому $u(x,y)\in C(\overline{\Omega})$.

Далее

$$D_y^{2\alpha}u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}(k\pi)^2f_kE_{\alpha,1}(-k\pi y^{\alpha})\sin k\pi x.$$

Для оценки последнего ряда используем следующие свойства функции Миттаг-Леффлера [16]:

$$-\lambda E_{\alpha,1}\left(-\lambda y^{\alpha}\right)=\sum_{j=0}^{\infty}(-\lambda)^{j+1}\frac{y^{\alpha(j+1)}}{\Gamma(\alpha j+1)}\frac{1}{y^{\alpha}}=\frac{1}{y^{\alpha}}\sum_{i=1}^{\infty}(-\lambda)^{i}\frac{y^{\alpha i}}{\Gamma(\alpha i+1-\alpha)}.$$

Значит, $\left|(k\pi)^2 E_{\alpha,1}\left(-k\pi y^{\alpha}\right)\right|\le\frac{Ck}{y^{\alpha}}\left|E_{\alpha,1-\alpha}\left(-k\pi y^{\alpha}\right)\right|,\alpha<1$. Тогда, используя оценку (ii), для всех $0<x<1, 0<y_0\le y<\infty$ получаем

$$\left|D_y^{2\alpha}u(x,y)\right|=\left|\sum_{k=1}^{\infty}(k\pi)^2 f_k E_{\alpha,1}\left(-k\pi y^{\alpha}\right)\sin k\pi x\right|\le\frac{C}{y_0^{\alpha}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{1+\varepsilon}}<\infty .$$

Следовательно, $D_y^{2\alpha}u(x,y)\in C(\Omega)$.

Аналогично показывается, что $u_{xx}(x,y)\in C(\Omega)$. Теорема доказана.

4. Задача N

Для задачи *N* справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $f(x)\in C^{2+\varepsilon}[0,1]$, $f'(0)=f'(1)=0$. Тогда:

1) если $u(x,y)$ ограничена на бесконечности, то решение задачи N существует, единственно и представляется в виде

$$u(x,y)=f_0+\sum_{k=1}^{\infty}f_k E_{\alpha,1}\left(-k\pi y^{\alpha}\right)\cos k\pi x; \tag{4.1}$$

2) если функция $u(x,y)$ стремится к нулю на бесконечности, то для разрешимости задачи *N* необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int_0^1 f(x)\,dx=0, \tag{4.2}$$

и если решение задачи существует, то оно единственно и представляется в виде

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k E_{\alpha,1}\left(-k\pi y^{\alpha}\right)\cos k\pi x, \tag{4.3}$$

где $f_0=\int_0^1 f(x)\,dx,\ f_k=2\int_0^1 f(x)\cos k\pi x dx,\ k=1,2,...$

Доказательство. Решая задачу *N* методом разделения переменных, получаем следующую спектральную задачу:

$$\begin{cases} Z''(x)+\lambda Z(x),\ 0<x<1;\\ Z'(0)=0,\ Z'(1)=0.\end{cases}$$

Собственные значения и собственные функции этой задачи соответственно имеют вид

$$\lambda_k=(\pi k)^2,\ k=0,1,...,$$

$$Z_0(x)=1,\ Z_k(x)=\sqrt{2}\cos k\pi x,\ \ k=1,2,....$$

Система функции $\{Z_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ образует ортонормированный базис пространства $L_2(0,1)$.

Следовательно, любое регулярное решение задачи *N* может быть при всех y представлено в виде ряда

$$u(x,y)=v_0(y)+\sum_{k=1}^{\infty}v_k(y)\cos k\pi x. \tag{4.4}$$

Так как система функций $\{Z_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ ортонормирована, то функцию $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x)=f_0+\sum_{k=1}^{\infty}f_k\cos k\pi x, \tag{4.5}$$

где $f_0=(f,Z_0), f_k=(f,Z_k)$.

Рассмотрим функции

$$v_0(y)=\int_0^1 u(x,y)\,dx; \tag{4.6}$$

$$v_k(y)=2\int_0^1 u(x,y)\cos k\pi x\,dx,\ k\ge 1. \tag{4.7}$$

Применяя оператор $D_y^{2\alpha}$ к функции (4.6) и учитывая уравнение (1.1), получим:

$$D_y^{2\alpha}[v_0](y)=\int_0^1 D_y^{2\alpha}u(x,y)\,dx=-\int_{-\pi}^{\pi} u_{xx}(x,y)\,dx.$$

Интегрируя по частям последний интеграл, с учетом краевого условия (1.5), заключаем, что $v_0(y)$ удовлетворяет уравнению

$$D_y^{2\alpha}[v_0](y)=0 \tag{4.8}$$

и краевым условиям

$$v_0(0)=f_0,\ \lim_{y\to\infty}|v_0(y)|<\infty,\ \left(\lim_{y\to\infty}|v_0(y)|=0\right). \tag{4.9}$$

Задача (4.8)–(4.9) при $\lim\limits_{y\to\infty}|v_0(y)|<\infty$ имеет единственное решение в виде

$$v_0(y)=f_0. \tag{4.10}$$

Если выполняются условия $\lim\limits_{y\to\infty}|v_0(y)|=0,$ то задача (4.8), (4.9) имеет решение только тогда, когда $f_0=\int_0^1 f(x)\,dx=0,$ и, следовательно, имеет вид $v_0(y)=0.$ Необходимость условия (4.2) доказана.

Покажем, что условие (4.2) является достаточным и для разрешимости задачи (4.8), (4.9). Действительно, пусть выполняется условие (4.2). Тогда задача (4.8), (4.9) имеет только тривиальные решения.

Аналогично для функции $v_k(y)$ получаем задачу

$$D_y^{2\alpha}[v_k](y)-(\pi k)^2 v_k(y)=0 \tag{4.11}$$

с условиями

$$v_k(0)=f_k;\ \lim_{y\to\infty}|v_k(y)|<\infty;\ \left(\lim_{y\to\infty}|v_k(y)|=0\right). \tag{4.12}$$

Из утверждения леммы 2 следует, что общее решение уравнения (4.11) представляется в виде (2.7). Из оценки (2.8) вытекает, что $C_1=0.$ Тогда, используя условия (4.12), находим решение задачи (4.11)–(4.12) в виде

$$v_k(y)=f_k E_{\alpha,1}\left(-\pi k y^{\alpha}\right). \tag{4.13}$$

Из формул (4.10), (4.13) сразу следует единственность решения задачи (1.2), (17), так как если $f(x)=0$ на $[0,1],$ то $u_k(y)=0,\ k=0,1,\ldots,$ на $(0,\infty).$ Следовательно, в силу полноты системы косинусов функция $u(x,y)=0$ для всех $(x,y)\in\overline{\Omega}.$ Единственность доказана.

С помощью формул (4.10), (4.13) решение задачи *N* можно переписать в виде (4.1) и (4.3). Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 2, то для коэффициентов Фурье имеет место оценка

$$|f_k|\le\frac{C}{k^{2+\varepsilon}}.$$

Тогда для всех $x\in[0,1], 0\le y\le l, l<\infty,$ получаем оценки

$$|u(x,y)|\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C}{k^{2+\varepsilon}}<\infty,\ |u_x(x,y)|\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C}{k^{1+\varepsilon}}<\infty,$$

и поэтому $u(x,y),\ u_x(x,y)\in C(\overline{\Omega}).$ Аналогично, как в теореме 1, доказывается, что $D_y^{2\alpha}u, u_{xx}\in C(\Omega).$ Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантового финансирования научно-технических програм и проектов Комитетом науки МОН РК (проект 0830/ГФ2).

Список литературы

1 *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier. North-Holland. Mathematics studies. 2006. — 539 p.

2 *Miller K.S., Ross B.* An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. John Wiley & Sons, Inc. 1993. — 376 p.

3 *Podlubny I.* Fractional Differential equations. Mathematics in Science and Engineering. Academic Press, 1999. — Vol. 198. — 356 p.

4 *Нахушев А.М.* О математических и информационных технологиях моделирования и управления региональным развитием // Докл. Адыгской (Черкесской) междунар. академии наук. — 2007. — Т. 9. — № 1. — С. 128–137.

5 *Dalla Riva M., Yakubovich S.* On a Riemann–Liouville fractional analog of the Laplace operator with positive energy // Integral Transforms and Special Functions. — 2012. — Vol. 23. — № 4. — P. 277–295.

6 *Yakubovich Semyon* Eigenfunctions and Fundamental Solutions of the Fractional Two-Parameter Laplacian // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. — 2010. — 18 p.

7 *Липневич В.В.* Дробный аналог оператора Лапласа и его простейшие свойства // Тр. ин-та математики. НАН РБ. — 2011. — Т. 19. — № 2. — С. 82–86.

8 *Масаева О.Х.* Задача Дирихле для фрактального уравнения Лапласа в прямоугольной области // Докл. Адыгской (Черкесской) междунар. академии наук. — 2008. — Т. 10. — № 2.

9 *Масаева О.Х.* Задача Дирихле для обобщенного уравнения Лапласа с производной Капуто // Дифференциальные уравнения. — 2012. — Т. 48. — № 3. — С. 442–446.

10 *Масаева О.Х.* К вопросу единственности решения задачи Дирихле для обобщенного уравнения Лапласа в полосе // Докл. Адыгской (Черкесской) междунар. академии наук. — 2010. — Т. 12. — № 2. — С. 36–38.

11 *Мегралиев Я.Т.* Обратная краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка с дополнительным интегральным условием // Вестн. Удмуртского ун-та. Сер. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2012. — № 1. — С. 32–40.

12 *Мегралиев Я.Т.* Об одной обратной краевой задаче для эллиптического уравнения второго порядка с интегральным условием первого рода // Труды ИММ УрО РАН. — 2013. — Т. 19. — № 1. — С. 226–235.

13 *Мегралиев Я.Т.* Об одной обратной краевой задаче для эллиптического уравнения второго порядка с дополнительными интегральными условиями // Владикавказ. матем. журнал. — 2013. — Т. 15. — № 4. — С. 30–43.

14 *Luchko Y., Gorenflo R.* An operational method for solving fractional differential equations with the Caputo derivatives // Acta Mathematica Vietnamica. — 1999. — Vol. 24. — № 2. — P. 207–233.

15 *Моисеев Е.И.* О решении спектральным методом одной краевой задачи // Дифференциальные уравнения. — 1999. — Т. 35. — № 8. — С. 1094–1100.

16 *Mainardi F.* Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. An Introduction to Mathematical Models. Imperial College Press. — 2010. — p. 217.

Б.Т.Төребек, Б.Х.Тұрметов

Лаплас теңдеуінің бөлшек ретті аналогы үшін жартыжолақта кейбір шеттік есептердің шешілімділігі туралы

Мақалада Лаплас теңдеуінің бөлшек ретті аналогы үшін жартыжолақта кейбір шеттік есептер зерттелді. Спектралдық әдіспен қарастырылатын есептердің шешімінің бар болуы және жалғыздығы туралы теоремалар дәлелденді.

B.T.Torebek, B.Kh.Turmetov

On solvability of some boundary value problems for the fractional analogue of Laplace equation in half-band

In this paper we study some boundary value problems for fractional analogue of Laplace equation in a half-band. Theorems about existence and uniqueness of a solution of the considered problems are proved by spectral method.

References

1 Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier*. North-Holland. Mathematics studies, 2006, 539 p.

2 Miller K.S., Ross B. *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations.* John Wiley & Sons, Inc. 1993, 376 p.

3 Podlubny I. *Fractional Differential equations. Mathematics in Science and Engineering*, Academic Press, 1999, 198, 356 p.

4 Nakhushev A.M. *Reports Adygeyan (Circassian) intern. academy of sciences*, 2007, 9, 1, p. 128–137.

5 Dalla Riva M., Yakubovich S., *Integral Transforms and Special Functions*, 2012, 23, 4, p. 277–295.

6 Yakubovich Semyon *International Journal of Mathematics and Mathematical sciences*, 2010, 18 p.

7 Lipnevich V.V. *Proceedings of the Institute of Mathematics* NAN RB, 2011, 19, 2, p. 82–86.

8 Masaeva O.Kh. *Reports Adygeyan (Circassian) intern. academy of sciences*, 2008, 10, 2, p .26–29.

9 Masaeva O.Kh. *Differential Equations*, 2012, 48, 3, p. 449–454.

10 Masaeva O.Kh. *Reports Adygeyan (Circassian) intern. academy of sciences*, 2010, 12, 2, p. 36–38.

11 Megraliev Ya.T. *Bull. of Udmurt. State University. Mathematics. Mechanics. Computer sciences*, 2012, 1, p. 32–40.

12 Megraliev Ya.T. *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics UrO RAN*, 2013, 19, 1, p. 226–235.

13 Megraliev Ya.T. *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2013, 15, 4, p. 30–43.

14 Luchko Y., Gorenflo R. *Acta Mathematica Vietnamica*, 1999, 24, 2, p. 207–233.

15 Moiseev E.I. *Differential Equations*, 1999, 35, 8, p. 1094–1100.

16 Mainardi F. *Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. An Introduction to Mathematical Models. Imperial College Press*, 2010, p. 217.

ӘОЖ 519.6

А.Ғ.Шаушенова, С.Д.Жұмасейітова

С.Сейфуллин атындағы Қазақ агротехникалық университеті, Астана
(E-mail: shaushenova_78@mail.ru)

Өнеркәсіпті қала атмосферасының ластануының геоақпараттық жүйесін бағдарламалық қамтамасыздандыру мәселелері

Өнеркәсіпті қала атмосферасын ластайтын негізгі көздер өнеркәсіп мекемелері, автокөліктері, көптеген шағын өнеркәсіптер және жеке меншік үйлер болып орналасқан аумақ табылады. Бұл ластаушы көздердің әрқайсысының өзінше ерекшеліктері бар. Сондықтан бұларға баға беру үшін арнаулы математикалық модельдер және деректер базасын құрып, геоақпараттық жүйені қалыптастыру қажет. Математикалық модельдер метеорологиялық параметрлермен ауа райының қолайсыз жағдайы болатын атмосферада зиянды заттың таралуының үшөлшемдік бір-бірімен байланысын есептеуге мүмкіндік туғызады. Математикалық модельді пайдалану және шешу үшін алдымен алғашқы сапалы деректерді жинау және қалыптастыру үрдісін іске асыру керек. Қалыптастырылған деректерді өңдеу және талдау мақсатында заманауи геоақпараттық жүйелердің бағдарламалық құралын құрастыру мәселелері қарастырылды.

Кілт сөздер: геоақпараттық жүйе, бағдарламалық қамтамасыздандыру, сандық карта.

Өндірістік қала орналасқан аумақтың (Балқаш қаласы) атмосферасының ластануына баға беру үшін геоақпараттық жүйе құрылымы ұсынылды. Бұл құрылымның негізіне [1] жұмысында берілген геоақпараттық жүйелер алынған, оның құрылымдық-функционалдық желісі 1-суретте келтірілген.

Бұл желі келесідей қораптардан тұрады: *КД* — қоршаған ортаның күйін бақылайтын орындардан түсетін кіріс деректер; *ҚЖ* — деректерді жинайтын, қалыптастыратын және енгізетін қорап; *ДБ* — деректер базасын басқаратын жүйе; *АБҚ* — арнаулы бағдарламалар мен қамтамасыздандыру қорабы; *ЭКЖ* — цифрлы электронды карталар жүйесі; *ПСҚ* — пайдаланушының сұранысын қалыптастыратын және қамтамасыздандыратын қорап; *ПИ* — пайдаланушының интерфейсі.