УДК 517.928

Б.Калимбетов[1], М.Маматкулова[2]

[1]Международный казахско-турецкий университет им.Ясави, Туркестан;
[2]Ошский государственный университет, Ош, Республика Кыргызстан (E-mail: azimbaev-muhtar@rambler.ru)

Асимптотические поведения решений сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений в случае смены устойчивости

В статье построены равномерные приближения решения сингулярно-возмущенной системы дифференциальных уравнений с любой степенью точности в особо критическом случае. Единственность решения исходной задачи строится методом последовательных приближений. При этом собственные значения жордановых клеток матрицы могут быть кратными, не имеют нулей и порядки не меняются при изменении независимого переменного. Приведены оценка и доказательства сходимости последовательных приближений.

Ключевые слова: сингулярно-возмущенные дифференциальные уравнения, собственные значения, метод последовательных приближений.

Рассмотрим задачу:

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon) = J(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon\big(f(t) + B(t)x(t,\varepsilon)\big) + g\big(t, x(t,\varepsilon)\big); \qquad (1)$$

$$x(t_0,\varepsilon) = x^0(\varepsilon), \qquad \left\| x^0(\varepsilon) \right\| = O(\varepsilon), \qquad (2)$$

где $J(t)$ — жорданова форма некоторой первоначально заданной матрицы $A(t)$, которая имеет собственные значения $\lambda_k(t)$, $k=\overline{1,m}$; причем среди $\lambda_k(t)$ могут оказаться кратные; $f(t) = colon(f_1(t), f_2(t),..., f_m(t))$; $B(t) = (b_{kj}(t))_1^m$; $\varepsilon > 0$ — малый параметр; $g(t,x(t,\varepsilon)) = colon(g_1(t,x),$ $g_2(t,x),..., g_m(t,x))$, $g(t,0)\equiv 0$; $[t_0,T]$ — отрезок действительной оси, $t_0 < T_0$; $[t_0,T_0] \subset S_r$ — открытый круг радиуса $r \geq \frac{1}{2}\left|T_0 - t_0\right| + d$ $(d>0)$ с центром в точке $((T_0+t_0)/2, 0)$; $t \in S_r$; $Jm\lambda_1(t_1,t_2) > 0$ $(j=\overline{1,m})$, $0 < \delta - const\}$; $\Phi(S_r)$ — пространство аналитических функций в S_r.

Решение $x(t,\varepsilon) = colon(x_1(t,\varepsilon), x_2(t,\varepsilon),..., x_m(t,\varepsilon))$ будем искать в классе $x_k(t,\varepsilon) \in \Phi(S_r)$ $(k=\overline{1,m})$ по t.

Будем требовать выполнения следующих условий:

Пусть

I. $\lambda_k(t) \in \Phi(S_r)$; $f_k(t) \in \Phi(S_r)$; $b_{kj}(t) \in \Phi(S_r)$; $g_k(t,x) \in \Phi(\Delta(t,x))$ $(k,j=\overline{1,m})$; $g(t,x(t,\varepsilon))$ разлагаются в области $\Delta(t,x)$ в ряды по степеням переменных $x_1, x_2,..., x_m$, причем разложения начинаются по степеням не ниже второго порядка.

II. a) собственные значения $\lambda_1(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$, $\lambda_2(t) = \alpha(t) - i\beta(t)$ являются γ-кратными $1<\gamma$, $2\gamma \leq m$), где $\alpha(t), \beta(t)$ — действительные функции, причем $\alpha(t) < 0$ при $t_0 \leq t < a_0$; $\alpha(t) > 0$ при $a_0 < t \leq T_0$; $\alpha(a_0) = 0$, но $\beta(a_0) \neq 0$.

b) $\operatorname{Re}\lambda_j(t) < 0$ при $t \in H_0 = \{(t_1,t_2) : t_0 \leq t_1 \leq T_0; -\infty < t_2 < +\infty\}$ для $j = 2\gamma+1,...,m$.

III. $\lambda_1(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$, $\lambda_2(t) = \alpha(t) - i\beta(t)$ не имеют нулей на H_0.

IV. Пусть матрица $J(t)$ является жордановой формой матрицы $A(t)$. Порядки жордановых клеток матрицы $A(t)$, определяемые собственными значениями $\lambda_1(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$, $\lambda_2(t) = \alpha(t) - i\beta(t)$, не меняются при изменении t на промежутке $t_0 \leq t_1 \leq T_0$, т.е. элементарные делители матрицы $A(t)$ вида $(\lambda - \lambda_j(t))^p$ $(j=1,2)$ с изменением переменной t на промежутке $[t_0,T_0]$, натуральное число p остаются постоянными, а собственные значения $\lambda_1(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$, $\lambda_2(t) = \alpha(t) - i\beta(t)$ являются переменными величинами.

Что касается остальных собственных значений, т.е. тех, у которых $\operatorname{Re}\lambda_j(t)<0$ при $t_0\le t_1\le T_0$, то их кратность и число отвечающих им элементарных делителей не существенны, более того обе эти величины могут меняться с изменением t.

Мы имеем $\mathrm{A(t)}=\mathrm{B}_0(t)J(t)B_0^{-1}$, где $J(t)$ — жорданова форма матрицы $A(t)$. Жордановы клетки матрицы $A(t)$, определяемые собственными значениями $\lambda_1(t)=\alpha(t)+i\beta(t), \lambda_2(t)=\alpha(t)-i\beta(t)$, обозначим через $J_1(t),J_2(t),\ldots,J_s(t)$; а жордановы клетки, определяемые собственными значениями $\lambda_j(t)$ ($\operatorname{Re}\lambda_j(t)<0$ при $t_0\le t_1\le T_0$ для $j=\overline{2r+1,m}$), обозначим через $\tilde{J}_1(t), \tilde{J}_2(t),..., \tilde{J}_q(t)$ ($q\le m-2k$).

Тогда $J(t)=\left\{J_1(t), J_2(t),..., J_s(t),\tilde{J}_1(t), \tilde{J}_2(t),..., \tilde{J}_q(t)\right\}$.

Пусть $\lambda_0(t)$ — собственное число матрицы $A(t)$. Собственному числу λ_0 соответствует элементарный делитель вида $(\lambda-\lambda_0)^p$, где натуральное число $p\ge 1$.

Тогда жордановы клетки порядка p соответствующего элементарному делителю $(\lambda-\lambda_0)^p$ можно взять в виде:

$$J_0(t)=\begin{Vmatrix}\lambda_0 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 & 0\\ \gamma & \lambda_0 & 0\ldots & 0 & 0 & 0\\ . & . & . & . & . & .\\ 0 & 0 & 0\ldots & 0 & \gamma & \lambda_0\end{Vmatrix},$$

где $\gamma\ne 0$ — постоянное комплексное число (в частности, можно считать его достаточно малым по модулю), квадратная матрица имеет порядок p [1].

Теорема. Пусть выполнены условия I–IV. Тогда для задачи (1), (2) при $t_0\le t\le T_0-\tilde{\partial}(\varepsilon)$ существует единственное решение и для него справедлива оценка

$$\left\|x(t,\varepsilon)\right\|\le c\varepsilon, \tag{3}$$

где $c>0$ — постоянная, не зависящая от t и ε; $\tilde{\delta}(\varepsilon)\ge 0$ — непрерывная функция при $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$ и $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\tilde{\delta}(\varepsilon)=0$.

Задачи (1), (2) решаются методом последовательных приближений.

Теперь наша основная задача заключается в оценке и доказательстве сходимости последовательных приближений на множестве $(\Delta\cup K_\varepsilon)\subset H_0$; $t=t_1+it_2$; t_1,t_2 — действительные переменные, области Δ, K_ε определим ниже.

Числа p,q будем выбирать так, чтобы для них имело место неравенство: $0<p<q<1$. Заметим, что из равенства

$$u_1(t_1^*,0)=-\varepsilon^p\quad\left(u_1(t_1^*,0)=-\varepsilon^q;\ \ u_1(t_1^*,0)=-\varepsilon\ \right) \tag{4}$$

в некоторой окрестности точки $(t_1^*=t_0,\varepsilon=0)$ однозначно определяются

$$t_1^*=t_0+\delta(\varepsilon)\quad\left(t_1^*=t_0+\gamma(\varepsilon);\quad t_1^*=t_0+\gamma_1(\varepsilon)\right),$$

где $\delta(\varepsilon)\ge 0$ $(\gamma(\varepsilon)\ge 0;\gamma_1(\varepsilon)\ge 0)$ — непрерывная функция от ε при $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$ $(\varepsilon_0>0)$ и $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\delta(\varepsilon)=0$

$$\left(\lim_{\varepsilon\to 0}\tilde{\gamma}(\varepsilon)=0;\ \lim_{\varepsilon\to 0}\tilde{\gamma}_1(\varepsilon)=0\right).$$

Здесь все условия существования неявной функции выполняются. Аналогично из равенства (4) в некоторой окрестности точки $(t_1^*=T_0,\varepsilon=0)$ однозначно определяется $t_1^*=T_0-\tilde{\delta}(\varepsilon)$ $\left(t_1^*=T_0-\tilde{\gamma}(\varepsilon);\quad t_1^*=T_0-\tilde{\gamma}_1(\varepsilon)\right)$, где $\tilde{\delta}(\varepsilon)\ge 0$ $(\tilde{\gamma}(\varepsilon)\ge 0;\quad \tilde{\gamma}_1(\varepsilon)\ge 0)$ — непрерывная функция от ε при $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$ $(\varepsilon_0>0)$ и $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\tilde{\delta}(\varepsilon)=0$ $\left(\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\tilde{\gamma}(\varepsilon)=0;\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\tilde{\gamma}_1(\varepsilon)=0\right)$.

Пусть $u_1'(t_1,t_2) = -Jm\lambda_1(t_1,t_2) \neq 0.$ Тогда из равенства $u_1(t_1,t_2^*) = -\beta(\varepsilon),$ при любом допустимом t_1 в некоторой окрестности точки $(t_2^* = t_2, \varepsilon = 0),$ однозначно определяется $t_2^* = \tilde{\varphi}(t_1,\varepsilon).$ Здесь $\beta(\varepsilon) > 0$ — непрерывная функция такая, что $\varepsilon \le \beta(\varepsilon) \le \varepsilon^p$ при $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0.$

Для оценки последовательных приближений $\left\{x_k^{(n)}\right\}$ $\left(n = 2,...; k = \overline{1,m}\right)$ будем использовать основную лемму 4 работы [2]. В рассматриваемом случае все условия леммы 4 работы [2] выполняются. Поэтому все заключения леммы 4 работы [2] имеют место.

Пусть линия уровня (C_1) соединяет точки $(t_0 + \gamma(\varepsilon), 0),$ $(T_0 - \tilde{\gamma}(\varepsilon), 0);$ линия уровня (C_2) — точки $(t_0 + \delta(\varepsilon), 0),$ $(T_0 - \tilde{\delta}(\varepsilon), 0);$ а линия уровня $(\bar{C})$ соединяет точки $(t_0 + \gamma_1(\varepsilon), 0),$ $(T_0 - \tilde{\gamma}_1(\varepsilon), 0).$

Через точки $(T_0 - \tilde{\delta}(\varepsilon), 0)$ проведем прямую, параллельную оси $t_2.$ Эта прямая с линией уровня (C_1) имеет единственную точку пересечения $(T_0 - \tilde{\delta}(\varepsilon), t_{21})$ (условие $Jm\lambda_1(t) > 0$).

Введем в рассмотрение полосу $\Pi,$ ограниченную линиями уровня (C_1) и $(C_2),$ отрезком действительной оси $\left[t_0 + \gamma(\varepsilon), T_0 - \tilde{\delta}(\varepsilon)\right]$ и отрезком, соединяющим точки $(T_0 - \tilde{\delta}(\varepsilon), 0),$ $(T_0 - \tilde{\delta}(\varepsilon), t_{21}).$

На полосе Π рассмотрим уравнение

$$u_1(t_1,t_2) = at_1 + b; \tag{5}$$

где

$$a = \frac{\varepsilon^q - \varepsilon^p}{T_0 - t_0 - \gamma(\varepsilon) - \tilde{\delta}(\varepsilon)}; \qquad b = \frac{\varepsilon^p\left[t_0 + \gamma(\varepsilon)\right] - \varepsilon^q\left[T_0 - \tilde{\delta}(\varepsilon)\right]}{T_0 - t_0 - \gamma(\varepsilon) - \tilde{\delta}(\varepsilon)}.$$

В полосе Π существует непрерывно дифференцируемая кривая $(\mathrm{K}_0),$ соединяющая точки $(t_0 + \gamma(\varepsilon), 0),$ $(T_0 - \tilde{\delta}(\varepsilon), 0)$ и имеющая уравнение (5). Причем из (5) однозначно определяется $t_2 = \varphi(t_1)$ с областью существования $t_0 + \gamma(\varepsilon) \le t_1 \le T_0 - \tilde{\delta}(\varepsilon)$ и $u_1(t_1, \varphi(t_1))$ убывает при $t_0 + \gamma(\varepsilon) \le t_1 \le T_0 - \tilde{\delta}(\varepsilon).$

Возьмем кривую $(\mathrm{K}_0^*),$ симметричную к $(\mathrm{K}_0).$ Область, ограниченную (K_0) и $(\mathrm{K}_0^*),$ обозначим $\mathrm{K}_\varepsilon \subset H_0;$ Еще возьмем кривую $(C^*),$ симметричную к $(\bar{C}).$ Область, ограниченную $(\bar{C})$ и $(C^*),$ обозначим $\bar{\mathrm{K}} \in H_0(\ \mathrm{K}_\varepsilon \subset \bar{\mathrm{K}}\ ).$

Будем оценивать $x^{(1)}(t,\varepsilon)$ для $\mathrm{t} \in \tilde{\mathrm{K}} = \Delta_1 \cup \bar{\mathrm{K}} \cup \tilde{\Delta}_1,$ где

$$\Delta_1 = \left\{(t_1,t_2): t_0 \le t_1 \le t_0 + \gamma_1(\varepsilon); \quad t_2 = 0\right\};$$

$$\tilde{\Delta}_1 = \left\{(t_1,t_2): T_0 - \tilde{\gamma}_1(\varepsilon) \le t_1 \le T_0; \quad t_2 = 0\right\}.$$

Если $(t_1,t_2) \in \Delta_1 (t = t_1,\ t_2 = 0),$ то l_1 состоит из одного отрезка прямой, соединяющего точку $(\ t_2, 0)$ с точкой $(\ t_1, 0)$ $(t_0 \le t_1 \le t_0 + \gamma(\varepsilon)).$ В этом случае $\mathrm{Re}\lambda_j(t) \le -\alpha,$ $\alpha > 0 - const.$

Если $(t_1,t_2) \in \bar{K},$ то $l_1 = \bigcup_{k=1}^{3} l_k^{(1)},$ где $l_1^{(1)}$ — отрезок прямой, соединяющий точки $(t_0, 0)$ с точкой $(t_0 + \gamma_1(\varepsilon), 0);$ $l_2^{(1)}$ – отрезок кривой $(\bar{C}),$ соединяющий точки $(t_0 + \gamma_1(\varepsilon), 0)$ с точкой $(t_1, t_2^* = \tilde{\varphi}(t_1,\varepsilon));$ $l_3^{(1)}$ — отрезок прямой, соединяющий точки (t_1, t_2^*) с точкой $(t_1, t_2).$

Если $(t_1,t_2) \in \tilde{\Delta}_1,$ то путь интегрирования l_1 определим как $l_1 = \bigcup_{k=1}^{3} l_k^{(1)},$ где $l_1^{(1)}$ — отрезок прямой, соединяющий точки $(t_0, 0)$ с точкой $(t_0 + \gamma_1(\varepsilon), 0)$ (как в случае, когда $((t_1,t_2) \in \bar{K});$ $l_2^{(1)}$ — отрезок кривой $\left(\bar{C}\right)$, соединяющий точку $\left(t_0+\gamma_1(\varepsilon),0\right)$ с точкой $\left(T_0-\tilde{\gamma}_1\left(\varepsilon\right),0\right)$; $l_3^{(1)}$ — отрезок прямой, соединяющий точки $\left(T_0-\tilde{\gamma}_1\left(\varepsilon\right),0\right)$ с точкой $\left(t_1,t_2=0\right)$.

Справедлива оценка

$$\left\|x^{(1)}\left(t,\varepsilon\right)\right\|\le c\varepsilon,$$

где $c=const, t\in\tilde{K}$.

Теперь будем оценивать $x^{(n)}\left(t,\varepsilon\right)\left(n=2,3,....\right)$ для $\forall t\in\Delta\cup K_\varepsilon$ при $\lambda_j\left(t\right)=\lambda_1\left(t\right)=\alpha\left(t\right)+i\beta\left(t\right)$; $(\lambda_j\left(t\right)=\lambda_2\left(t\right)=\overline{\lambda_1\left(t\right)})$, где $\Delta=\left\{\left(t_1,t_2\right):t_0\le t_1\le t_0+\gamma_1\left(\varepsilon\right),\ t_2=0\right\}$; K_ε определена раньше.

Если $\left(t_1,t_2\right)\in\Delta\ \left(t=t_1,\ t_2=0\right)$, то l состоит из одного отрезка прямой, соединяющего точку $\left(t_0,0\right)$ с точкой $\left(t_1,0\right)$ $\left(t_0\le t_1\le t_0+\gamma\left(\varepsilon\right)\right)$. В этом случае $\mathrm{Re}\lambda_j\left(t\right)\le-\alpha,\ \alpha>0\ (j=1,2)$.

Пусть $\left(t_1,t_2\right)\in K_\varepsilon$. Тогда $l=\bigcup\limits_{k=1}^{3}l^{(k)}$, где $l^{(1)}$ — отрезок прямой, соединяющий точки $\left(t_0,0\right)$ с точкой $\left(t_0+\gamma\left(\varepsilon\right),0\right)$; $l^{(2)}$— отрезок кривой $\left(K_0\right)$, соединяющий точки $\left(t_0+\gamma\left(\varepsilon\right),0\right)$ с точкой $\left(t_1,t_2^*=\tilde{\varphi}\left(t_1,\varepsilon\right)\right)$; $l^{(3)}$— отрезок прямой, соединяющий точки $\left(t_1,t_2^*\right)$ с точкой $\left(t_1,t_2\right)$.

Имеет место следующая оценка для $\left(t_1,t_2\right)\in\Delta\cup K_\varepsilon$:

$$\left\|x^{(n)}\left(t,\varepsilon\right)\right\|\le c\alpha_n\left(\varepsilon\right),$$

где

$$\alpha_n\left(\varepsilon\right)=\varepsilon\left[1+\varepsilon^{p_0}+\varepsilon^{2p_0}+...+\varepsilon^{(n-1)p_0}\right];$$

$$p_0=1-p-q;\ 0<p<q<\frac{1}{2},\quad n=1,2,....;c>0-const.$$

Существует $0<\varepsilon_0<1$ такое, что $0<\varepsilon^{p_0}<1$ при $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$, где $p_0=1-p-q,\ \ 0<p<q<\frac{1}{2}$. Следовательно, $c\alpha_n(\varepsilon)<\dfrac{c\varepsilon}{1-\varepsilon^{p_0}}$.

Таким образом, можно считать, что доказана оценка

$$\left\|x\left(t,\varepsilon\right)\right\|\le c\varepsilon$$

для $\left(t_1,t_2\right)\in\Delta\cup K_\varepsilon$.

Ряд $x^{(1)}\left(t,\varepsilon\right)+[x^{(2)}\left(t,\varepsilon\right)-x^{(1)}\left(t,\varepsilon\right)]+...+[x^{(n)}\left(t,\varepsilon\right)-x^{(n-1)}\left(t,\varepsilon\right)]+...$ мажорируется сходящимся рядом.

$$c\varepsilon+c\varepsilon q_0+c\varepsilon q_0^2+...+c\varepsilon q_0^{n-1}+...,$$

где $q_0=c\varepsilon^{p_0}$, $p_0=1-p-q,0<p<q<\frac{1}{2}$, $0<c-const.$

Поэтому при $t_0\le t\le T_0-\tilde{\delta}\left(\varepsilon\right)$ справедлива оценка

$$\left\|x\left(t,\varepsilon\right)\right\|\le c\varepsilon,\text{ где } c=const.$$

Теорема доказана.

Следует отметить, что точка $t=T_0$ является особой критической точкой: $u_k\left(T_0,0\right)=0$; $\mathrm{Re}\lambda_k\left(T_0,0\right)>0.$ Кроме этого, мы получим, что

$$d\tau_2=\frac{\mathrm{Re}\lambda_1\left(t_1,t_2\right)-a}{Jm\lambda_1\left(t_1,t_2\right)}d\tau_1.$$

Следует учесть, что если $\left(t_1,t_2\right)$— внутренняя точка области H_0, то гармоническая функция $Jm\lambda_1(t_1,t_2)>0$ и если $\left(t_1,t_2\right)$— граничная точка области H_0, то может иметь место $Jm\lambda_1(t_1,t_2)=0$ (достаточно взять пример $\lambda_k(t_1,t_2)=\sin t\pm i\cos t$).

Так как в работе [2] $u_k\left(T_0,0\right)=-d<0$, где $0<d-const$, то в работе [2] можно считать, что $Jm\lambda_1(t_1,t_2)>0$. Мы рассматриваем случай, когда $u_k\left(T_0,0\right)=0$. Поэтому может иметь место $Jm\lambda_1(t_1,t_2)=0$. Это есть появления особенности особой критической точки $t=T_0$.

References

1 *Petrovsky I.G.* Lectures on theory of ordinary differential equations. — Moscow: Nauka, 1964. — P. 154–159.

2 *Alybaev K.S.* The method of line-level research singularly perturbed when condition is stable: Diss. on competition. uch. Art. Dr. phys. — Mat. Sciences: 01.01.02. — Bishkek, 2001. — 204 p.

Б.Калимбетов, М.Маматкулова

Тұрақтылық ауысқан жағдайдағы сингулярлы-ауытқулы дифференциалдық теңдеулердің шешімдерінің асиптотикалық тәртіптері

Мақалада аса ерекше жағдайда кез келген дәлдік дәрежедегі сингулярлы-ауытқулы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімдерінің біркелкі жуықтауы құрылған. Бастапқы есептің жалғыз шешімі біртіндеп жуықтау әдісімен құрылды. Сонымен қоса матрицаның жордан торларының меншікті мәндері еселік болуы, нөлдері болмауы және тәуелсіз айнымалылары өзгерген жағдайда реті өзгермеуі мүмкін. Сондай ақ біртіндеп жуықтаудың жинақтылығың дәлелі және бағасы келтірілген.

B.Kalimbetov, M.Mamatkulova

Asymptotic behavior solutions of singularly perturbed differential equations in the case of change of stability

In this paper uniform approximations are constructed for solving singularly perturbed system of differential equations with any degree of accuracy in a special critical case. The uniqueness of solution to the original problem is constructed by successive approximations. In this case eigenvalues of Jordan blocks of matrix may be multiple, have no zeros and practices do not change with changes in independent variable. The evaluation of evidence and convergence of successive approximations.