ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ ЭЙЛЕРА

Шаймардан Р.
(Научный руководитель — к.ф.-м.н., доцент кафедры МАиДУ Орумбаева Н.Т.)
Карагандинский государственный университет имени академика Е.А.Букетова
E-mail: shaymardan.rauan@mail.ru

Пусть задана задача Коши для дифференциального уравнения второго порядка:

$$a(x)y''' + b(x)y' + c(x)y = f(x), \tag{1}$$

$$y(0) = g_1, \qquad y'(0) = g_2, \qquad y''(0) = g_3. \tag{2}$$

Неизвестной является функция $y(x)$. Сведем уравнение (1) с начальными условиями (2) к системе трех дифференциальных уравнений первого порядка. Для этого введем дополнительную функцию $v(x) = y''(x)$, $w(x) = y'(x)$. Подставляя ее в задачу (1), (2), получим

$$a(x)v' + b(x)w + c(x)y = f(x), \qquad v(0) = g_3,$$

$$w' - v = 0, \qquad w(0) = g_2,$$

$$y' - w = 0, \qquad y(0) = g_1,$$

Для нахождения численного решения системы используем метод Эйлера.

Пример. Найти приближенное значение решения уравнения

$$y''' + 2xy' + xy = (3x+1)e^x + (5x+8)e^{2x}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3, \quad y''(0) = 5.$$

Введем функции $v(x) = y''(x)$, $w(x) = y'(x)$. Тогда получим систему уравнений первого порядка $v' = F(x, y, w)$, $v(0) = 5$, $w' - v = 0$, $w(0) = 3$, $y' - w = 0$, $y(0) = 2$.
где $F(x, y, w) = (3x+1)e^x + (5x+8)e^{2x} - 2xw - xy$. Разделим отрезок $[0;0.5]$ на 10 частей. Следовательно, $h = 0.05$. Значения v_{k+1}, w_{k+1}, y_{k+1}, $k = \overline{0,10}$ будем искать используя формулы:

$$x_0 = 0, \qquad v_0 = 5, \qquad w_0 = 3, \qquad y_0 = 2,$$

$$v_1 = v_0 + F(x_0, y_0, w_0) \cdot h, \qquad w_1 = w_0 + v_0 \cdot h, \qquad y_1 = y_0 + w_0 \cdot h,$$

$$v_2 = v_1 + F(x_1, y_1, w_1) \cdot h, \qquad w_2 = w_1 + v_1 \cdot h, \qquad y_2 = y_1 + w_1 \cdot h,$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$v_k = v_{k-1} + F(x_{k-1}, y_{k-1}, w_{k-1}) \cdot h, \qquad w_k = w_{k-1} + v_{k-1} \cdot h, \qquad y_k = y_{k-1} + w_{k-1} \cdot h,$$

В процессе решения составляем таблицу:

k	x_k	v_k	w_k	y_k	$y(x) = e^x + e^{2x}$
0	0	5	3	2	2
1	0.05	5.4741	3.25	2.1625	2.1564
2	0.1	5.9723	3.5237	2.3387	2.3266
3	0.15	6.4945	3.8223	2.5298	2.5117
4	0.2	7.0401	4.147	2.7209	2.7132
5	0.25	7.6086	4.449	2.9283	2.9327
6	0.3	8.1991	4.8795	3.1532	3.172
7	0.35	8.8104	5.2894	3.3972	3.4328
8	0.4	9.4409	5.73	3.6617	3.7174
9	0.45	10.0887	6.202	3.9482	4.0279
10	0.5	10.7516	6.7064	4.2583	4.367

Точное решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям, будет $y(x) = e^x + e^{2x}$.

Список использованных источников

1. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.Наука, 1970.