

Poizat Bruno

*Institute Camille Jordan, France (E-mail: poizat@math.univ-lyon1.fr)***Groupes équationnellement minimaux**

A well-known definition in Model Theory states that an infinite structure M is minimal if any subset of M which is definable with parameters in M is either finite or cofinite. The starting point of the study of the groups of finite Morley rank is a theorem due to Reineke, saying that a minimal group is commutative. We introduce here a weaker notion, easily understandable by non-logicians : an infinite group G is equationally minimal if every equation in one variable, with coefficients in G , has in G either a finite or a cofinite number of solutions. Non-commutative equationally minimal groups probably exists: they will be non locally finite groups of exponent p , for a sufficiently large prime number p .

Key words: modèles, Reineke, Morley, équationnellement minimal groupe, abélien, infini nilpotent, centralisateur.

*A la mémoire de mon ami***Introduction**

La définition suivante est un classique de la Théorie des modèles: une structure *infinie* M est *minimale* si chaque partie de M définie par une formule $\varphi(x, \underline{a})$, avec paramètres \underline{a} dans M , est finie ou cofinie.

Elle a donné lieu a deux résultats de nature algébrique:

- (i) un groupe minimal est commutatif [1];
- (ii) un corps minimal de caractéristique p est algébriquement clos [2].

et à une question, toujours ouverte: est-ce que (ii) est vrai en caractéristique nulle? La réponse est oui [3] pour un corps *fortement* (ou *uniformément*) *minimal*, c'est-à-dire dont les extensions élémentaires sont aussi minimales.

Nous considérons ici une notion plus faible que la minimalité, qui a l'avantage d'être directement intelligible par un non-logicien, en nous restreignant aux ensembles définis par des équations:

Définition 1. Un groupe G infini est dit *équationnellement minimal* si chaque équation en une variable $a_1 \cdot x^{m_1} \cdot \dots \cdot a_n \cdot x^{m_n} = 1$, $a_i \in G$, $m_i \in \mathbb{Z}$, a un nombre fini de solutions, ou bien un nombre fini de non-solutions, dans G . Dans le premier cas nous dirons que l'équation est *finie*, et dans le second qu'elle est cofinie. L'entier n est appelé *longueur* de l'équation.

La classe des groupes équationnellement minimaux est close par sous-groupes infinis, et par quotients par des sous-groupes normaux finis; en effet, si H est normal et fini, une équation dans le quotient G/H équivaut à la réunion d'un nombre fini d'équations dans G .

Remarquons aussi que, dans un groupe G équationnellement minimal, le centralisateur C d'un élément a non central, qui est défini par l'équation $a \cdot x = x \cdot a$, est fini; en effet un sous-groupe de G n'est cofini que s'il lui est égal. En conséquence, si G n'est pas abélien, son centre est fini.

La notion correspondante pour les corps n'a pas d'intérêt, puisque tout corps infini est quationnellement minimal.

Equations cofinies

La première question qui vient à l'esprit est la possibilité d'une équation vraiment cofinie, c'est-à-dire qui est satisfaite par tout élément de G sauf un nombre fini non nul. On remarquera que:

(i) C'est impossible pour un groupe abélien, dans lequel chaque équation s'écrit $x^n = a$; l'ensemble de ses solutions, s'il n'est pas vide, est une cossette modulo un sous-groupe H de G , qui n'est cofinie que si elle est égale à G .

(ii) Plus généralement, c'est impossible si chaque ensemble fini d'éléments de G commute avec une infinité d'éléments de G (par exemple si G est infini nilpotent); en effet, au prix d'une translation de la variable, il suffit de voir que l'élément neutre 1 est solution de chaque équation cofinie; restreinte au cen-

tralisateur C de ses coefficients, une telle équation prend la forme $x^n = b$, et, d'après le Théorème 1 de la section suivante, $b = 1$.

(iii) C'est également impossible pour un groupe linéaire; en effet, l'équation cofinie définit un fermé de Zariski F , et les cosettes C_1, \dots, C_n de la composante connexe de la clôture de Zariski de G sont des fermés irréductibles; comme chaque C_i est la réunion de $C_i \cap F$ et d'un nombre fini de points, en fait C_i est incluse dans F .

(iv) C'est également impossible pour le groupe libre à une infinité de générateurs d'une variété non triviale (i.e. ne satisfaisant pas l'équation $x = y$); en effet, une équation cofinie y est satisfaite par un élément libre sur ses coefficients.

Cependant, [4] construisent un groupe G sans torsion avec une équation satisfaite par tout élément de G , à l'exception de l'élément neutre; ils observent que, dans le produit direct de G par un groupe à n éléments, il y a une équation qui a exactement n non-solutions.

Une involution centrale qui n'existe pas.

Il est cependant clair que certaines équations très simples ne peuvent être cofinies sans être satisfaites par tout élément de G , comme nous l'avons vu pour l'équation $a.x = x.a$. En voici une autre:

Théorème 1. Si le groupe G est infini, et si l'équation $x^n = a$ y est cofinie, alors $a = 1$ et tout élément de G satisfait $x^n = 1$.

Démonstration. Si α a un centralisateur C infini, pour tout x de C sauf un nombre fini $x^n = a$ et $(\alpha.x)^n = \alpha^n.x^n = a$, donc $\alpha^n = 1$. Si le centralisateur de α est fini, sa classe de conjugaison est infinie et tous ses éléments sauf un nombre fini satisfont $x^n = a$; en conséquence a commute avec tous les éléments de G sauf un nombre fini; son centralisateur étant cofini, il est central dans G , et $\alpha^n = a$.

Supposons que $a \neq 1$; posant $y = x^2$, on voit que $y^n = a^2 \neq a$ pour tout x sauf un nombre fini, si bien qu'il n'y a qu'un nombre fini de carrés; leur centralisateur K est d'indice fini dans G . Comme $K/Z(K)$ est d'exposant deux, il est commutatif, si bien que chaque élément de K a un centralisateur infini, soit que $Z(K)$ soit infini, soit que sa classe de conjugaison soit finie. Donc $x^n = 1$ pour tout x de K , et $a = 1$, ce qui contredit l'hypothèse. **Fin.**

Groupes équationnellement minimaux, commutatifs ou non

Théorème 2. Un groupe commutatif infini G est équationnellement minimal si et seulement ou bien pour chaque entier n il n'a qu'un nombre fini d'éléments d'ordre n , ou bien il est d'exposant p premier.

Démonstration. Dans un groupe commutatif, une équation se met sous la forme $x^n = a$. On voit facilement que, dans les deux cas cités, une équation est triviale ($x^0 = 1$) ou bien n'a qu'un nombre fini, éventuellement nul, de solutions.

Réciproquement, s'il y a une infinité de x tel que $x^n = 1$, pour un certain diviseur premier p de n et un certain a de G il y a une infinité de x tels que $x^p = a$, et G est d'exposant p d'après le Théorème 1. **Fin.**

Théorème 3. Un groupe équationnellement minimal non-commutatif est d'exposant premier $p \neq 2, 3$.

Démonstration. Le centre est fini, et les éléments non-centraux ont un centralisateur fini, ainsi qu'une classe de conjugaison infinie; le groupe est donc périodique. Soit x d'exposant p dans $G/Z(G)$; une équation $x^p = a$ a une infinité de solutions, et G est d'exposant p d'après le Théorème 1. L'exposant ne peut être 2, car sinon G serait commutatif, ni 3, car sinon les classes de conjugaison de G seraient commutatives. **Fin.**

Ces résultats nous permettent de donner une version du Théorème de Reineke facilement compréhensible par un théoricien des groupes, puisqu'il lui suffit d'admettre que les ensembles de solutions d'équations et les classes de conjugaison sont des ensembles définissables.

Théorème 4. Un groupe infini dans lequel les classes de conjugaison et les équations du type $x^n = a$ et $a.x = x.a$ sont finies ou cofinies est commutatif.

Démonstration. Considérons un contre-exemple G ; comme la démonstration du Théorème 3 n'utilise que des équations du type $x^n = a$ et $a.x = x.a$, G est d'exposant $p > 3$; mais dans un groupe d'exposant p , si $a \neq 1$ et $a^q \neq a$, il n'est pas possible que a et a^q soit conjugués car le groupe des automorphismes du groupe cyclique engendré par a est (cyclique et) d'ordre $p-1$; par conséquent G contient au moins $p-1$ classes de conjugaison infinies, contrairement à l'hypothèse. **Fin.**

Par contraste, il est beaucoup plus difficile de décrire les formules qui sont utilisées dans la démonstration du théorème de Wagner.

Une classe de groupes d'exposant p .

Définition 2. Soit $\Gamma(p)$ la classe des groupes infinis d'exposant p , à centre fini, dont tout élément non central a un centralisateur fini.

Cette classe est close pour la prise de sous-groupes infinis et par quotient par un sous-groupe central. D'après le Théorème 3, elle est exactement constituée, pour les différentes valeurs de p , des groupes qui sont minimaux relativement aux équations $x^n = a$ et $a.x = x.a$; en effet, dans un groupe d'exposant p , $x^n = a$ a exactement une solution si n n'est pas divisible par p ; sinon, elle n'en a pas si $a \neq 1$, et est triviale si $a = 1$.

Comme exemples de tels groupes on peut citer les groupes de [5], dont tous les sous-groupes propres ont p éléments, ainsi que les groupes libres d'exposant p pour les grandes valeurs de p (d'après [6], les centralisateurs y sont cycliques), et bien sûr les groupes non-commutatifs équationnellement minimaux, à supposer qu'ils existent.

Lemme 5. Dans un groupe de la classe $\Gamma(p)$, tout sous-groupe fini non-central s'étend en un et un seul sous-groupe fini maximal: l'intersection de deux sous-groupes finis maximaux se réduit au centre.

Démonstration. En divisant par $Z(G)$ on se ramène au cas où $Z(G) = 1$; soit $a \neq 1$. Comme les p -groupes finis sont nilpotents, tout sous-groupe fini contenant a est contenu dans le centralisateur d'un élément commutant avec a : il n'y en a qu'un nombre fini. Supposons que F et F' soient des sous-groupes finis maximaux distincts contenant a ; on les prend d'intersection maximale; comme le centralisateur de $F \cap F'$ est fini, son normalisateur N également; comme $N \cap F$ contient strictement ce dernier, si M est un groupe fini maximal contenant N , $M = F$, et de même $M = F'$: contradiction. **Fin.**

Puisque le sort des équations de longueur un est réglé, nous allons examiner celui des équations de longueur deux, de la forme $x^m.a.x^n = b$; dans un groupe d'exposant p , si m est divisible par p , on est ramené à une équation de longueur un; il en est de même si a ou b est central; et sinon on inverse m modulo p pour se ramener à une équation du type $x.a.x^q = b$.

Lemme 6. Dans un groupe d'exposant premier $p \neq 2$, si l'équation $xax^q = b$ a deux solutions $\neq 1$ inverses l'une de l'autre, alors $q = -1$ et $a = b$.

Démonstration. Si l'équation est satisfaite par $x \neq 1$ et par x^{-1} , alors $xax^q = b$, $x^{-1}ax^{-q} = b$, $x^q a^{-1}x = b^{-1}$, $xax^{2q} a^{-1}x = 1$, $a^{-1}x^{-2}a = x^{2q}$. Comme a et x^2 sont d'ordre p , ou bien $a = 1$, ce n'est possible que si $q = -1$ (modulo $p!$); comme x^2 commute avec a, x aussi, et $a = b$. **Fin.**

La conclusion est que, dans un groupe équationnellement minimal d'exposant p , si $q \neq -1$, ou bien si $a \neq b$, l'équation $xax^q = b$, ne pouvant être cofinie, ne doit avoir qu'un nombre fini de solutions.

Dans un groupe de la classe $\Gamma(p)$, nous pouvons traiter quelques cas:

- $q = 0$ une solution;
- $q = 1$ $xa.xa = ba$, une solution;
- $q = -1$ $x.a.x^{-1} = b$, triviale si $a = b$ est central, et sinon 0 ou $\text{card}(Z(a))$ solutions; si $q \neq -1$, il y a au plus une solution qui commute avec a ou b ;
- $a = b a^{-1}.x.a = x^{-q}$, qui n'a de solutions $\neq 1$ que si $q \neq -1$.

Ce n'est pas extrêmement concluant, mais c'est cependant suffisant pour poser quatre questions:

Question 1. Est-ce que tous les groupes de $\Gamma(p)$ sont équationnellement minimaux?

Question 2. Plus fortement, est-ce que toute équation non-triviale en une variable, dans un groupe de $\Gamma(p)$, n'a qu'un nombre fini de solutions?

Question 3. Plus faiblement, est-ce que c'est au moins vrai pour les équations de longueur deux?

Question 4. Finalement, est-ce qu'il existe des groupes équationnellement minimaux non commutatifs?

Références

- 1 *Reineke Joachim.* Minimale Gruppen // Zeitschrift für mathematische Logik. — № 21. — P. 357–359.
- 2 *Wagner Frank O.* Minimal Fields // The Journal of Symbolic Logic. — № 65. — P. 1833–1835.
- 3 *Macintyre Angus* On omega-one categorical theories of fields, Fundamenta Mathematica. — 71. — P. 1–25.
- 4 *Klyachko Anton A. & Trofimov Anton V.* The number of non-solutions to an equation in a group // Journal of Group Theory. — № 8. — P. 747–754.
- 5 *Ol'shanskii Aleksandr.* Groupes d'exposant fini dont les sous-groupes sont d'ordre premier (en russe) // Algebra and Logika. — № 21. — P. 553–618.
- 6 *Adjan Sergei Ivanovic & Novikov Piotr Sergeievic.* Sur les sous-groupes abéliens et le problème de la conjugaison dans les groupes libres périodiques d'exposant impair (en russe) // Izv. Math. SSSR. № 2. — P. 1131–1144.

Пуаза Бруно

Минималды эквационалды группалар

Модельдер теориясының белгілі анықтамасынан білетініміз, шексіз құрылым M минималды, егер оның параметрімен анықталатын кез келген ішкі жиыны ақырлы немесе кофинитті болса. Ақырлы Морли рангті группаларды зерттеудің бастапқы нүктесі болып минималды группалардың коммутативті болатындығы туралы айтатын Рейнеке теоремасы табылды. Логикасыз ұғымның әлсіз ұғымын келтірейік: шексіз группа G эквационалды минималды, егер коэффициентті бір айнымалы әрбір теңдеудің ақырлы немесе кофинитті санды шешімдері болса. Коммутативті емес эквационалды минималды группалардың бар болуы ықтимал: олар мейлінше үлкен жай p саны үшін локалды ақырлы емес p экспонентті группалар болады.

Пуаза Бруно

Минимально эквациональные группы

Хорошо известное в теории моделей определение говорит, что бесконечная структура M минимальна, если любое подмножество, которое определимо с параметрами из M , либо конечно, либо коконечно (т.е. его дополнение конечно). Первой работой по изучению конечного ранга Морли была теорема Рейнеке, говорящая, что минимальная группа является абелевой. Мы выводим здесь более слабое понятие, чем минимальность. И это понятие хорошо понимаемо не логиками. Бесконечная группа G эквационально компактна, если каждое уравнение с одной переменной с коэффициентами из G имеет в G либо конечное, либо коконечное число решений. Неабелевы эквационально компактные группы существуют: они будут не локально конечными группами экспоненты p для достаточно больших простых чисел p .