О СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЯХ И СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ НЕЛОКАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

Турметов Б.Х.

Междунароный казахско-турецкий университет имени Х.А.Ясави, Туркестан,Казахстан

E-mail:batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz

Пусть $\mathrm{P}=\{x=(x_1,...,x_n)\in R^n : 0<x_j<p_j,\ j=1,...,n\}$ параллелепипед в $\mathrm{R}^n, n\ge 2$, а ∂P его граница. Рассмотрим отображения $S_i x=\left(x_1,...,x_{i-1},p_i-x_i,x_{i+1},...,x_n\right), 1\le i\le n$. Очевидно, что $S_i^2=E$, где E -- единичное отображение. Рассмотрим всевозможные произведения отображений S_i, т.е. $S_{12}=S_1S_2, S_{123}=S_1S_2S_3,\ldots$. Общее количество таких отображений с учетом тождественного отображения $S_0x=x$ равно 2^n.

Если ввести запись индекса суммирования i в двоичной системе счисления $(i_n\ldots i_1)_2\equiv i$, где $i_k=0,1$ при $k=1,\ldots,n$, то будем записывать эти коэффициенты также в виде $a_{(0\ldots00)_2}, a_{(0\ldots01)_2}, a_{(0\ldots10)_2}, a_{(0\ldots11)_2},\ldots, a_{(1\ldots11)_2}$. Тогда можно рассматривать отображения вида $x\to S_n^{i_n}\ldots S_1^{i_1}x$.

Используя представление коэффициентов a_i в указанном виде и отображения $x\to S_n^{i_n}\ldots S_1^{i_1}x$ введем оператор

$$L_n u\equiv\sum_{i=0}^{2^n-1}a_i\Delta u(S_n^{i_n}\ldots S_1^{i_1}x).$$

Рассмотрим следующую граничную задачу.

Задача D. Найти функцию $u(x)\ne 0$ из класса $u\in C\left(\overline{\mathrm{P}}\right)\cap C^2\left(\mathrm{P}\right)$, удовлетворяющую условиям

$$L_n u(x)+\lambda u(x)=0,\ x\in\mathrm{P}\ , u\left(x\right)=0,\ x\in\partial\mathrm{P}.$$

Отметим, что задача (1) - (2) в случае, когда P - n-мерныйединичный шар исследована в работе [1].Вопросы разрешимости основных краевых задач для соответствующего нелокального уравнения Пуассона исследованы в работах [2].

Приведем известное утверждение относительно собственных функций и собственных значений классической задачи Дирихле

$$\Delta w(x)+\mu w(x)=0,\ x\in\mathrm{P}, w\left(x\right)=0,\ x\in\partial\mathrm{P} \tag{1}$$

В работе [3] доказано следующее утверждение.

Лемма. Собственные функции и собственные значения задачи (1) представляются в виде

$$w_{m_1m_2\ldots m_n}(x)=C\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{m_k\pi x_k}{p_k}, C=2^{n/2}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{p_k}},$$

$$\mu_{m_1m_2\ldots m_n}=\pi^2\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k^2}{p_k^2}.$$

Система $w_{m_1 m_2 \dots m_n}(x)$ является полной и ортонормированной в пространстве $L_2(\mathrm{P})$.

Обозначим $\theta_{m_1,m_2,\dots,m_n} = \sum_{i=0}^{2^n-1} a_i (-1)^{|i|+i_1 m_1+i_2 m_2+\dots+i_n m_n}$.

Основное утверждение относительно задачи D.

Теорема. Пусть в задаче D коэффициенты $a_i, i=0,1,\dots,2^n-1$ такие, что выполняются условия $\theta_{m_1 m_2 \dots m_n} \neq 0$. Тогда собственные функциизадачи D имеют вид

$$u_{m_1,m_2,\dots,m_n}(x) = C\prod_{k=1}^{n} \sin\frac{m_k \pi x_k}{p_k}, C = 2^{n/2}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{p_k}}, \tag{2}$$

а соответствующие им собственные значения определяются равенством

$$\lambda_{m_1,m_2,\dots,m_n} = \theta_{m_1,m_2,\dots,m_n}\pi^2\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{m_k^2}{p_k^2}\right).$$

Система функций $\left\{u_{m_1,m_2,\dots,m_n}(x)\right\}_{m_j=1}^{\infty}, j=1,2,\dots,n$ является полной и ортонормированной в пространстве $L_2(\mathrm{P})$.

Пример. Рассмотрим задачу

$$a_0\Delta u(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i \Delta u(x_1,\dots,x_{i-1},p_i-x_i,x_{i+1},\dots,x_n) + \lambda u(x) = 0, x\in \mathrm{P}, u(x)=0, x\in\partial\mathrm{P}. \tag{3}$$

Так как $S_i x = (x_1,\dots,x_{i-1},p_i-x_i,x_{i+1},\dots,x_n) = S_i^1 x$ и

$$w_{m_1,m_2,\dots,m_n}(S_i^1 x) = C\sin\frac{m_i\pi(p_i-x_i)}{p_i}\cdot\prod_{k=1,k\neq i}^{n}\sin\frac{m_k\pi x_k}{p_k} = C(-1)^{m_i+1}\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{m_k\pi x_k}{p_k} = (-1)^{m_i+1} w_{m_1 m_2 \dots m_n}(x),$$

то в этом случае $\theta_{m_1,m_2,\dots,m_n}$ имеют вид $\theta_{m_1,m_2,\dots,m_n} = a_0 - (-1)^{m_1}a_1 - \dots - (-1)^{m_n}a_n$.

Следовательно, собственные функции задачи (2) определяются равенством (3), а соответствующие им собственные значения имеют вид

$$\lambda_{m_1,m_2,\dots,m_n} = \pi^2\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k^2}{p_k^2}\right)\left(a_0-(-1)^{m_1}a_1-\dots-(-1)^{m_n}a_n\right).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта МОН РК №AP09259074.

Список использованной литературы

1.Turmetov B. Kh., Karachik V.V. On eigenfunctions and eigenvalues of a nonlocal Laplace operator with multiple involution// Symmetry. – 2021. – Vol.13, No. 1781. – P.1 – 20.

2. Турметов Б.Х., Карачик В.В. О разрешимости краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона с множественной инволюцией // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2021. – Т. 31, № 4. – С. 651– 667.

3. Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных. М., «Высш. школа» , 1977. 431 с.