

К.Б.Иманбердиев

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы

**О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ
С ГРАНИЧНЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ**

Мақалада шекаралық басқарулары бар жылуөткізгіштік теңдеуі үшін тиімді басқару есебінің шешімділігі мәселелері зерттелген. Тиімді басқару есебінің шешімі бар екендігі көрсетілген. Түйіндес шекаралық есептің шешімі арқылы тиімділік шарттары табылған. Есепті шешу мақсатында Риккати түрлендіруі көмегімен тиімділік шарттарының қатынастарын бөліктеу әдісі қолданылған.

In the present paper are investigated questions of resolvability of a problem of optimality control for the loaded equation of heat-conductivity with boundary controls. It is shown, that of exists a solution of a problem of optimality control. The optimality conditions are stated with help of the solution of the adjoint boundary value problem. For the problem decision the method splitting of parities of conditions of optimality by means of transformation Riccati is used.

В настоящей работе исследуются вопросы разрешимости задачи оптимального управления для нагруженного уравнения теплопроводности с граничными управлениями [1–5]. Для решения задачи используется метод расщепления соотношений условий оптимальности с помощью преобразования Риккати [6].

1. Постановка задачи. Введем пространство

$$Y(0, T) = \{y \mid y \in L_2(0, T; H^2(-\pi/2, \pi/2)), y_t \in L_2(Q)\}$$

и рассмотрим начально-граничную задачу в пространстве $Y(0, T)$:

$$y_t(x, t) - y_{xx}(x, t) + \alpha \cdot y(\bar{x}, t) = f, \quad \{x, t\} \in Q, \quad (1.1)$$

$$y(x, 0) = y_0(x), \quad -\pi/2 < x < \pi/2, \quad (1.2)$$

$$y(-\pi/2, t) = u_1(t), \quad y(\pi/2, t) = u_2(t), \quad 0 < t < T, \quad (1.3)$$

где $Q = \{x, t \mid -\pi/2 < x < \pi/2, 0 < t < T < +\infty\}$, $u_1(t)$, $u_2(t)$ — граничные управляющие функции, а $f(x, t)$ и $y_0(x)$ — заданные функции, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} u_j \in U_{jg} \subset L_2(0, T), \quad j=1, 2 - \text{выпуклое замкнутое множество,} \\ y_0(x) \in H^1(-\pi/2, \pi/2), \quad f(x, t) \in L_2(Q), \\ \bar{x} \in (-\pi/2, \pi/2), \quad \alpha = \text{const} \in \mathbb{C}. \end{cases} \quad (1.4)$$

На решениях задачи (1.1)–(1.3) при выполнении (1.4) задан функционал

$$J[u_1, u_2] = \|y(x, T) - \gamma(x)\|_{H^1(-\pi/2, \pi/2)}^2 + \sum_{j=1}^2 \beta_j \int_0^T u_j^2(t) dt, \quad (1.5)$$

где $\beta_j \in \mathbb{R}_+^1$, $j=1, 2$, $\gamma(x) \in H^1(-\pi/2, \pi/2)$ — заданная функция.

Задача оптимального управления состоит в следующем: требуется найти граничные управления $u_1(t)$, $u_2(t)$ и соответствующие им решения $y(x, t)$ граничной задачи (1.1)–(1.3), удовлетворяющие условиям (1.4) и минимизирующие функционал (1.5).

Обозначим через $y(v) = y(x, t, v)$ решение задачи (1.1)–(1.3) при $u = v$.

Задача. Найти управление $u = \{u_1, u_2\} \in U_g = U_{1g} \times U_{2g}$, минимизирующее функционал (1.5) на решениях задачи (1.1)–(1.3).

2. Существование решения задачи оптимального управления. Покажем, что поставленная нами задача имеет решение, т.е. существует управление u (называемое оптимальным управлением), для которого $J[u] = \inf_{v \in U_g} J[v]$. Для этого положим

$$\pi(u, v) = (y(x, T; u) - y(x, T; 0), y(x, T; v) - y(x, T; 0))_{H^1(-\pi/2, \pi/2)} + \sum_{j=1}^2 \beta_j (u_j, v_j), \quad (2.1)$$

$$L(v) = (\gamma - y(x, T; 0), y(x, T, v) - y(x, T; 0))_{H^1(-\pi/2, \pi/2)}. \quad (2.2)$$

Тогда очевидно:

$$J(v) = \pi(v, v) - 2L(v) + \|\gamma - y(x, T; 0)\|_{H^1(-\pi/2, \pi/2)}^2, \quad (2.3)$$

где $\pi(u, v)$ есть непрерывная симметричная билинейная форма, удовлетворяющая условиям

$$\begin{cases} \pi(u, v) = \pi(v, u), \quad \pi(v, v) \geq \bar{\beta} \|v\|^2, \quad \bar{\beta} = \min\{\beta_1, \beta_2\}, \\ \pi(u, v) - \text{непрерывно по } u, v, \end{cases} \quad (2.4)$$

а $L(v)$ — линейная непрерывная форма. Отсюда следует следующая теорема [6].

Теорема 2.1. *Задача (1.1)–(1.5) имеет единственное решение $\{u_1(t), u_2(t)\}$.*

Теперь получим условия оптимальности управлений $\{u_1(t), u_2(t)\}$.

В силу дифференцируемости по Гато функционала (1.5) получим

$$\langle J'_v(u), v - u \rangle \geq 0 \quad \text{для } \forall v \in U_g$$

или

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [y(x, T; u) - \gamma(x)] \cdot \overline{y_v(x, T; u)(v - u)} dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [y_x(x, T; u) - \gamma'(x)] \cdot \overline{y_{xv}(x, T; u)(v - u)} dx + \\ & + \sum_{i=1}^2 \beta_i \int_0^T u_i(t) \cdot [v_i(t) - u_i(t)] dt \geq 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

для $\forall v \in U_g$, где u — оптимальное управление; $J'_v(u)$ — производная Гато от функционала (1.5).

Теперь запишем краевую задачу (1.1)–(1.3) и ее решение в операторном виде:

$$Ay(v) = F = \begin{cases} f(x, t) \\ y_0(x) \\ v_1(t) \\ v_2(t) \end{cases}; \quad y(v) = A^{-1}F,$$

где $D(A) = \{y \mid y \in H^{2,1}(Q)\}$, а также другой операторный вид задачи (1.1) — (1.3):

$$A_1 y(v) = F_1 = \begin{cases} v_1(t) \\ v_2(t) \end{cases}, \quad \text{если } D(A_1) = \{y \mid y \in D(A), (1.1) - (1.2)\}.$$

Таким образом, получаем $y(x, t; v) = A_1^{-1}F_1 = (A_1^{-1}v)(x, t)$; A_1^{-1} линейно, так как y линейно зависит от v , а A_1 — непрерывно обратимый оператор. Проведем следующие преобразования:

$$y(x, T; v) = (A_1^{-1}v)(x, T),$$

$$y_v(x, T; u) \cdot (v - u) = (A_1^{-1}(v - u))(x, T) = (A_1^{-1}v)(x, T) - (A_1^{-1}u)(x, T) = y(x, T; v) - y(x, T; u);$$

$$y_x(x, T; v) = (A_1^{-1}v)_x(x, T),$$

$$y_{xv}(x, T; u) \cdot (v - u) = (A_1^{-1}(v - u))_x(x, T) = (A_1^{-1}v)_x(x, T) - (A_1^{-1}u)_x(x, T) = y_x(x, T; v) - y_x(x, T; u).$$

Подставляя полученные соотношения в неравенство (2.5), перепишем его в виде:

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [y(x, T; u) - \gamma(x)] \cdot \overline{[y(x, T; v) - y(x, T; u)]} dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [y_x(x, T; u) - \gamma'(x)] \cdot \overline{[y_x(x, T; v) - y_x(x, T; u)]} dx + \\ & + \sum_{i=1}^2 \beta_i \int_0^T u_i(t) \cdot [v_i(t) - u_i(t)] dt \geq 0 \quad \text{для } \forall v \in U_g. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Неравенство (2.6) можно представить в виде:

$$\langle y(x, T; u) - \gamma(x), y(x, T; v) - y(x, T; u) \rangle_{H^1(-\pi/2, \pi/2)} + \sum_{i=1}^2 \beta_i \int_0^T u_i(t) \cdot [v_i(t) - u_i(t)] dt \geq 0, \quad \text{для } \forall v \in U_g. \quad (2.7)$$

3. Разрешимость сопряженной граничной задачи и условия оптимальности. Теперь определим сопряженное состояние $p(u)$ как решение краевой задачи

$$-\frac{\partial p(u)}{\partial t} = \frac{\partial^2 p(u)}{\partial x^2} - \bar{\alpha} \cdot \delta(x - \bar{x}) \otimes \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p(\xi, t, u) d\xi \quad \text{в } Q, \quad (3.1)$$

$$p(-\pi/2, t; u) = p(\pi/2, t; u) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (3.2)$$

$$p(x, T; u) = p(x, T; u) - \gamma(x), \quad x \in (-\pi/2, \pi/2). \quad (3.3)$$

Справедлива

Теорема 3.1. Начально-краевая задача (3.1)–(3.3) имеет единственное решение $p(u)$, удовлетворяющее интегральному тождеству

$$\int_0^T \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p(x, t; u) \cdot \left[\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + \alpha \cdot \psi(\bar{x}, t) \right] dx dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [y(x, T; u) - \gamma(x)] \cdot \overline{\psi(x, T; u)} dx \quad (3.4)$$

для $\forall \psi(x, t) \in Y(0, T)$ и $\psi(x, 0) = 0$, а также условию

$$p(x, T; u) = 0, \quad (3.5)$$

где u — оптимальное управление.

Доказательство этой теоремы будет дано ниже.

Умножим равенство (3.1) (при $v = u$) скалярно на $y(v) - y(u)$ и проинтегрируем от 0 до T :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left(-\frac{\partial p(u)}{\partial t}, y(v) - y(u) \right) dt = \int_0^T \left(p(u), \frac{\partial}{\partial t} (y(v) - y(u)) \right) dt - (y(x, T; u) - \gamma(x), y(x, T; v) - y(x, T; u)); \\ & - \int_0^T \left(\frac{\partial^2 p(u)}{\partial x^2}, y(v) - y(u) \right) dt = - \int_0^T \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\partial^2 p(u)}{\partial x^2} \cdot [y(v) - y(u)] dx dt = \\ & = - \int_0^T \frac{\partial p(u)}{\partial x} \cdot [y(v) - y(u)] \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} dt + \int_0^T \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\partial p(u)}{\partial x} \cdot [y_x(v) - y_x(u)] dx dt = \\ & = - \int_0^T \frac{\partial p(\pi/2, t; u)}{\partial x} \cdot [v_2 - u_2] dt + \int_0^T \frac{\partial p(-\pi/2, t; u)}{\partial x} \cdot [v_1 - u_1] dt - \int_0^T \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p(u) \cdot [y_{xx}(v) - y_{xx}(u)] dx dt; \\ & \int_0^T \left(\bar{\alpha} \cdot \delta(x - \bar{x}) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p(\xi, t; u) d\xi, y(v) - y(u) \right) dt = \bar{\alpha} \cdot \int_0^T \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \delta(x - \bar{x}) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p(\xi, t; u) d\xi \overline{[y(x, t; v) - y(x, t; u)]} dx dt = \\ & = \bar{\alpha} \cdot \int_0^T \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \delta(\xi - \bar{x}) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p(\xi, t; u) dx \overline{[y(\xi, t; v) - y(\xi, t; u)]} d\xi dt = \\ & = \bar{\alpha} \cdot \int_0^T \left\{ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p(x, t; u) \cdot \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \delta(\xi - \bar{x}) \overline{[y(\xi, t; v) - y(\xi, t; u)]} d\xi \right] dx \right\} dt = \\ & = \bar{\alpha} \cdot \int_0^T \left\{ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p(x, t; u) \overline{[y(\bar{x}, t; v) - y(\bar{x}, t; u)]} dx \right\} dt = \int_0^T (p(x, t; u), \alpha [y(\bar{x}, t; v) - y(\bar{x}, t; u)]) dt \end{aligned}$$

и, сложив полученные соотношения, получаем:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left(p(u), \frac{\partial}{\partial t} (y(v) - y(u)) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (y(v) - y(u)) + \alpha \cdot [y(\bar{x}, t; v) - y(\bar{x}, t; u)] \right) dt - (y(x, T; u) - \gamma(x), \\ & y(x, T; v) - y(x, T; u)) + \int_0^T \frac{\partial p(\pi/2, t; u)}{\partial x} \cdot [v_2 - u_2] dt - \int_0^T \frac{\partial p(-\pi/2, t; u)}{\partial x} \cdot [v_1 - u_1] dt = 0 \end{aligned}$$

или

$$(y(x, T; u) - \gamma(x), y(x, T; v) - y(x, T; u)) = \int_0^T \left(\left. -\frac{\partial p(u)}{\partial x} \right|_{x=-\pi/2}, \left. \frac{\partial p(u)}{\partial x} \right|_{x=\pi/2} \right), \begin{pmatrix} v_1 - u_1 \\ v_2 - u_2 \end{pmatrix} dt.$$

Следовательно, неравенство (2.7) можно переписать в следующем виде:

$$\int_0^T \left(\left. -\frac{\partial p(u)}{\partial x} \right|_{x=-\pi/2} + \beta_1 u_1, \left. \frac{\partial p(u)}{\partial x} \right|_{x=\pi/2} + \beta_2 u_2 \right), \begin{pmatrix} v_1 - u_1 \\ v_2 - u_2 \end{pmatrix} dt \geq 0 \quad (3.6)$$

для $\forall v \in U_g$ и тем самым доказана

Теорема 3.2. Если выполнены условия

$$\begin{cases} f_1 = f - w_t + w_{xx} - \alpha \cdot w(\bar{x}, t) \in L_2(Q), \\ y_{10}(x) = y_0(x) - w(x, 0) \in H_0^1(-\pi/2, \pi/2) \end{cases}$$

и (2.4), то оптимальное управление $u \in U_g$ удовлетворяет соотношениям (1.1)–(1.3), (3.1)–(3.3) и вариационному неравенству (3.6).

Доказательство теоремы 3.1. Из теоремы 1.2.1 [4] следует, что отображение

$$\psi \rightarrow \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + \alpha \cdot \psi(\bar{x}, t)$$

определяет гомеоморфизм $Y(0, T) \rightarrow L_2(0, T)$. Так как $I \in L(U; L_2(0, T))$, то имеет место гомеоморфизм $Y(0, T) \rightarrow U$. С другой стороны,

$$\sigma(\psi) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [y(x, T; u) - \gamma(x)] \cdot \overline{\psi(x, T; u)} dx$$

есть линейная непрерывная форма над $Y(0, T)$. Поэтому по теореме Рисса [7] существует единственный элемент $p(u) \in L_2(Q)$, который удовлетворяет интегральному тождеству (3.4) и условию (3.5). Теорема 3.1 доказана.

Замечание 3.1. Если $U_g = U \equiv L_2(0, T) \times L_2(0, T)$, т.е. множество допустимых управлений совпадает со всем пространством U , то из (3.6) получаем

$$u_1(t) = \frac{1}{\beta_1} \frac{\partial p(u)}{\partial x} \Big|_{x=-\pi/2}, \quad u_2(t) = -\frac{1}{\beta_2} \frac{\partial p(u)}{\partial x} \Big|_{x=\pi/2}. \quad (3.7)$$

В общем случае исследование разрешимости условий оптимальности (1.1)–(1.3), (3.1)–(3.3), (3.7) представляет определенные трудности. Возникает нелинейная краевая задача для интегродифференциального уравнения типа Риккати. Здесь исследуется случай, когда $U_g = U$ и неравенство (3.6) эквивалентно (3.7).

4. Расщепление соотношений условий оптимальности с помощью преобразования Риккати. Далее, используя (3.7), начально-краевые задачи (1.1)–(1.3), (3.1)–(3.3) можно переписать в виде:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \alpha \cdot y(\bar{x}, t) + f, \quad (4.1)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \bar{\alpha} \cdot \delta(x - \bar{x}) \otimes \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p(\xi, t, u) d\xi, \quad (4.2)$$

$$y(x, 0) = y_0(x), \quad y|_{x=-\pi/2} = \frac{1}{\beta_1} \frac{\partial p(u)}{\partial x} \Big|_{x=-\pi/2}, \quad y|_{x=\pi/2} = -\frac{1}{\beta_2} \frac{\partial p(u)}{\partial x} \Big|_{x=\pi/2}. \quad (4.3)$$

$$p|_{-\pi/2} = p|_{\pi/2} = 0, \quad p(x, T; u) = y(x, T; u) - \gamma(x), \quad y \in Y(0, T), \quad p \in L_2(Q).$$

Далее введем следующее обозначение:

$$p = P(t)y + r(t) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} P(x, \xi, t)y(\xi, t) d\xi + r(x, t). \quad (4.4)$$

Продифференцируем формально это тождество, используя общее обозначение $dX/dt = X'$, после, подставляя результат в (3.1), получаем:

$$-P'y - Py' - r' + A^*p = 0.$$

Затем, используя уравнение (1.1), находим:

$$-P'y - P(-Ay + f) - r' + A^*p = 0.$$

Заменим здесь p по формуле (4.4) и получаем

$$(-P' + PA)y - Pf - r' + A^*(P(t)y + r(t)) = 0$$

или

$$(-P' + PA + A^*P)y + (-r' + A^*r - Pf) = 0. \quad (4.5)$$

Из (4.5), так как y произвольно, следует, что соотношения (1.1) и (3.1) соответственно эквивалентны равенствам

$$-\frac{\partial P}{\partial t} + PA + A^*P = 0, \quad P(T) = I, \quad (4.6)$$

$$-\frac{\partial r}{\partial t} + A^*r - Pf = 0, \quad r(T) = -\gamma, \quad (4.7)$$

где $P(t)$ — оператор для почти всех $t \in (0, T)$; r — функция;

$$A \cdot = -\frac{\partial^2 \cdot}{\partial x^2} + \alpha \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \delta(x - \bar{x}) \cdot d\xi,$$

$$A^* \cdot = -\frac{\partial^2 \cdot}{\partial x^2} + \bar{\alpha} \delta(x - \bar{x}) \otimes \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cdot d\xi.$$

Следуя [6] (при определенных дополнительных условиях), можно обосновать преобразование Риккати и показать, что оператор $P(t) \in L(H^2(-\pi/2, \pi/2); L_2(Q))$ для почти всех $t \in (0, T)$, $P^*(t) = P(t)$, функция $r \in L_2(Q) \cap H^1(0, T; H^{-2}(-\pi/2, \pi/2))$ являются решениями задач (4.4)–(4.5). Эти условия, используя теорему Шварца о ядрах [8], можно переписать в виде:

$$\frac{\partial P(x, \eta, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 P(x, \eta, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 P(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} + \alpha \cdot \delta(x - \bar{x}) \otimes \int_{-\pi/2}^{\pi/2} P(\xi, \eta, t) d\xi + \bar{\alpha} \cdot \delta(\eta - \bar{\eta}) \otimes \int_{-\pi/2}^{\pi/2} P(x, \xi, t) d\xi = 0,$$

$$-\frac{\partial r(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 r(x, t)}{\partial x^2} + \bar{\alpha} \cdot \delta(x - \bar{x}) \otimes \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r(\xi, t) d\xi - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\xi, t) P(x, \xi, t) d\xi = 0,$$

$$P(x, \eta, t) = P(\eta, x, t); \quad P(x, -\pi/2, t) = P(x, \pi/2, t) = 0; \quad P(-\pi/2, \eta, t) = P(\pi/2, \eta, t) = 0;$$

$$P(x, \eta, T) = \delta(\eta - x), \quad (x, \eta) \in (-\pi/2, \pi/2) \times (-\pi/2, \pi/2);$$

$$r(-\pi/2, t) = r(\pi/2, t) = 0; \quad r(x, T) = -\gamma(x), \quad x \in (-\pi/2, \pi/2). \quad (4.8)$$

Согласно (4.4) оптимальное управление (3.7) выражается решением задачи (4.8) следующим образом:

$$u_1(t) = \frac{1}{\beta_1} [P_x y + r_x] \Big|_{x=-\pi/2}, \quad u_2(t) = -\frac{1}{\beta_2} [P_x y + r_x] \Big|_{x=\pi/2}, \quad (4.9)$$

в форме так называемого синтеза обратной связи (позиционное управление), т.е. в зависимости от состояния системы y вырабатывается соответствующее ему управление u . Легко видеть, что управление (4.9) является допустимым.

Таким образом, исходная задача оптимального управления (1.1)–(1.5) свелась к нахождению решений начально-краевых задач (4.8), а также (4.1) и (4.3).

Список литературы

1. Нахушев А.М. // Дифференциальные уравнения. — 1983. — Т. 19. — № 1. — С. 86–94.
2. Ахмедов Ф.Ш. // Докл. АН СССР. — 1985. — Т. 283. — № 4. — С. 787–791.
3. Джаналиев М.Т. Оптимальное управление линейными нагруженными параболическими уравнениями // Дифференциальные уравнения. — 1989. — Т. 25. — № 4. — С. 641–651.
4. Иманбердиев К.Б. О корректности задачи Коши-Дирихле для нагруженного уравнения теплопроводности с граничными управлениями // Вестн. КарГУ. Сер. Математика. — 2009. — № 3(55). — С. 19–27.
5. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. — М.: Высш. шк., 1995. — 301 с.
6. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. — М.: Мир, 1972.
7. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М., 1967.
8. Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. I. Теория распределений и анализ Фурье. — М., 1986.