Андрющенко Ю.А., Карагандинский университет имени академика Е. А. Букетова, факультет математики и информационных технологий, гр. МиФ-20-2, студент
(Научный руководитель – PhD, ассоциированный профессор, профессор кафедры МАДУ, Космакова М.Т.)

ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА В ДРОБНОМ ИСЧИСЛЕНИИ

На сегодняшний день можно наблюдать заметный рост внимания ученных к дробному исчислению. Это связано с эффективными приложениями дробного дифференцирования и интегрирования при описании обширного класса химических и физических процессов, протекающих во фрактальных средах.

Дробное исчисление – это раздел прикладной математики, который фокусируется на производных и интегралах произвольного порядка (включая комплексные порядки). Дробно исчисление используется уже почти 300 лет. Многие математики (чистые и прикладные), такие как Абель, Капуто, Эйлер, Фурье, Харди, Лаплас, Летников, Лиувилль, Риман, внесли значительный вклад в теорию дробного исчисления.

Только в последние несколько десятилетий дробное исчисление привлекло внимание научного сообщества, которое большую часть времени рассматривало его как чисто теоретическую область исследований. Рост интереса к дробному исчислению объясняется его пригодностью для моделирования большого числа явлений, охватывающих практически все области естественных наук. За последние три десятилетия все большее число исследователей в совершенстве используют дробное исчисление для описания наследственных свойств и свойств памяти различных процессов и материалов. В общем случае дробные аналоги создаются путем замены дробной производной по времени на классическую производную по времени.

В настоящее время его приложения можно найти в биологии и биомеханике [1-3], в моделировании реологических свойств вязкоупругих материалов [4-6], в электрических цепях [7], в аномальных процессах переноса и диффузии в сложных средах [8-9] и во многих других отраслях физики и техники [10,13-14]. А также с помощью дробного исчисления были исследованы другие дисциплины прикладной математики и нелинейной динамики [11-12].

Для решения дифференциального уравнения используют метод анализа, основанный на преобразовании Лапласа. Суть в том, что функция вещественных переменных заменяется ее изображением, связь между которыми осуществляется через оператор Лапласа. Преобразование Лапласа было предложено в начале XIX века выдающимся французским математиком Пьером Симоном Лапласом. Он впервые применил это преобразование при решении задач небесной механики. Однако широкое распространение преобразование Лапласа получило только в XX веке, после развития теории операторов и комплексного анализа. Преобразование Лапласа находит применение в электротехнике и теории цепей, в теории автоматического регулирования, в теплопроводности, в волновой оптике, в медицине и биологии, а так же во многих других областях науки.

Преобразование Лапласа обладает рядом важных свойств, позволяющих эффективно применять его для решения прикладных задач. Рассмотрим некоторые из этих свойств:

- Линейность - преобразование Лапласа линейного оператора.
- Дифференцирование по времени переходит в умножение на р.
- Свертывание функций переходит в произведение изображений.
- Смещение функции во времени приводит к умножению изображения на экспоненту.

Эти свойства позволяют переводить дифференциальные операции в алгебраические, что значительно упрощает решение задач.

Практическая часть.

В данной статье рассматривается решение уравнения с дробными производными различных порядков вида:

$$ {}_0\mathcal{D}_t^{\alpha} y(t) - \lambda\, {}_0\mathcal{D}_t^{\beta} y(t) = f(t), $$

где ${}_0\mathcal{D}_t^{\alpha}$- производная Римана-Лиувилля порядка $1 < \alpha \leq 2$,

${}_0\mathcal{D}_t^{\beta}$- производная Римана-Лиувилля порядка $0 < \beta \leq 1$,

λ – действительный параметр.

Решение:

Обозначим

$$ Y(s) = \mathcal{L}[y(t)] - \text{преобразование Лапласа} $$
$$ F(s) = \mathcal{L}[f(t)] $$

Выполним преобразование Лапласа для начального уравнения

$$ \mathcal{L}\{{}_0\mathcal{D}_t^{\alpha} y(t); s\} - \mathcal{L}\left\{\lambda_0 D_t^{\beta}\, y(t); s\right\} = \mathcal{L}\{f(t); s\} $$

Тогда уравнение примет вид:

$$ Y(s) = \frac{F(s)}{s^{\alpha} - \lambda s^{\beta}} + \frac{c_1}{s^{\alpha} - \lambda s^{\beta}} + \frac{s c_2}{s^{\alpha} - \lambda s^{\beta}} $$

Затем выполним обратное преобразование Лапласа. При вычислении получим общее решение уравнения с дробными производными различных порядков, которое имеет вид:

$$y(t) = f(t) * t^{\alpha-1}E_{\alpha-\beta;\alpha}\left(\lambda t^{\alpha-\beta}\right) + c_1 t^{\alpha-1}E_{\alpha-\beta;\alpha}\left(\lambda t^{\alpha-\beta}\right) + \\ + c_2 t^{\alpha-2}E_{\alpha-\beta;\alpha-1}\left(\lambda t^{\alpha-\beta}\right) \quad (1)$$

Теперь рассмотрим задачу типа Коши для уравнения с дробными производными различного порядка.

$${}_0D_t^{\alpha} y(t) - \lambda \ {}_0D_t^{\beta} y(t) = f(t), \ t \in (0, \tau) \quad (2)$$

Где ${}_0D_t^{\alpha}$- производная Римана-Лиувилля порядка $1 < \alpha \leq 2$,

${}_0D_t^{\beta}$ - производная Римана-Лиувилля порядка $0 < \beta \leq 1$,

λ- действительный параметр,

Удовлетворяющее условиям

$$\begin{cases} \lim_{t\to 0}\left({}_0D_t^{\alpha-1}y(t) - \lambda \ {}_0D_t^{\beta-1}y(t)\right) = a_0, \\ \lim_{t\to 0} {}_0D_t^{\alpha-2}y(t) = b_{0.} \end{cases} \quad (3)$$

Тогда общее решение (1) после удовлетворения его условием типа Коши (3) примет вид:

$$y(t) = a_0 t^{\alpha-1}E_{\alpha-\beta,\alpha}\left(\lambda t^{\alpha-\beta}\right) + b_0 t^{\alpha-2}E_{\alpha-\beta,\alpha-1}\left(\lambda t^{\alpha-\beta}\right) + \\ + f(t) * \left(t^{\alpha-1}E_{\alpha-\beta,\alpha}(\lambda t^{\alpha-\beta})\right)$$

Для решения задачи типа Коши, были применены следующие определения: определение регулярного решения, определение и формулы вычисления производных Римана-Лиувилля, вычисление пределов.

В результате проведенных вычислений можно сформулировать теорему, утверждающую, что задача типа Коши (2) имеет единственное решение при любых заданных значениях a_0 и b_0, которое определяется формулой для общего решения уравнения.

Замечание. Если левую часть условий типа Коши (3) задать в другом виде, то решение может не существовать, поскольку при взятии предела ($t \to 0$) получаемый ряд может расходиться.

Заключение.

В данной статье было рассмотрено решение уравнения с дробными производными различных порядков с помощью интегрального преобразования Лапласа. Полученное общее решение исходного уравнения было успешно применено для решения задачи типа Коши. Применение метода анализа, основанного на преобразовании Лапласа, позволило эффективно решить поставленную задачу, предоставив единственное решение при заданных начальных условиях.

Работа является теоретической. Полученные результаты найдут применение в развитии теории дифференциальных уравнений дробного порядка, интегральных преобразований и теории специальных функций. Практическая ценность работы определяется прикладной значимостью дробного исчисления в физике и математическом моделировании процессов переноса.

[1] H. Xu. Commn, Nonlinear Sci. Numer. Simul. 14 (5) (2009) 1978-1083.

[2] A.A.M. Arafa, S.Z. Rida, M. Khalil, Nonlinear Biomed. Phys. 6 (1) (2012) 1.

[3] E. Ahmed, A. Hashish, F.A. Rihan, Fractiona; Calculus and Applied Analysis. 3 (2) (2012) 1-12.

[4] F. Mainardi, Fractional Calculus and Applied Analysis. 15 (4) (2012) 712-717.

[5] R.C. Koeller, Applications of fractional calculus to the theory of Viscoelasticity. 51 (2) (1984) 299-307.

[6] R.L. Bagley, P.J. Torvik, J.Rheol. On the fractional calculus model of viscoelastic behavior.

[7] G. Ala, M. Di Paola, E. Francomano. Electrical analogous in viscoelasticity. 19 (7) (2014) 2513-2527.

[8] M. B. Isichenko, “Percolation, Statistical Topography, and Transport in Random Media,” Reviews of Modern Physics, 64 (4) (1992) 961-1043.

[9] W.R. Schneider, W. Wyss. Fractional diffusion and wave equations. Journal of Math. Phys. (1989) 134-144.

[10] I. Podlubny, Fractional differential Equations: Academis Press. 1998. P - 336.

[11] F. Mainardi, Fractional calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: An indroduction to mathematical models. Imperial College Press, 2010.

[12] V.E. Tarasov, G.M. Zaslavsky. Fractional dynamics of systems with long-range space interaction and temporal memory. 2007. P- 299.

[13] С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. Интегралы и производные дробного порядка, и некоторые их приложения. – Минск «Наука и техника», 1987. -143с.

[14] М.В. Шитикова. Обзор вязкоупругих моделей с операторами дробного порядка, используемых в динамических задачах механики твердого тела. -М. 2022. -38с.