$$-\frac{\sigma^2 e^{-2\varepsilon t_k}}{2p^2\left(\omega_0^2+\alpha^2-2\varepsilon\alpha\right)}\Big\{\omega_0^4\left(\alpha-\varepsilon\right)/\varepsilon+4\varepsilon\alpha\left(\omega_0^2+\varepsilon\alpha\right)-\left[\omega_0^4+\varepsilon\left(\alpha-2\varepsilon\right)\omega_0^2-4\alpha\varepsilon^2\left(\alpha-\varepsilon\right)\right]\times$$

$$\times\cos 2\rho t_k+p\left[\omega_0^2\left(\alpha-2\varepsilon\right)+4\alpha\varepsilon^2\right]\sin 2\rho t_k\Big\}.$$

При $t_k > t_з$ (после переходного процесса) имеем

$$D_\Delta=\frac{\sigma^2\alpha\left(\omega_0^2+2\varepsilon\alpha\right)}{2\varepsilon\left(\omega_0^2+\alpha^2+2\varepsilon\alpha\right)}. \quad (11)$$

Стандарт отклонения (ошибка прибора) $\sigma_\Delta=\sqrt{D_\Delta}$.

Список литературы

1. *Болотин В.В.* Случайные колебания упругих систем. — М.: Наука, 1979. — 336 с.
2. *Светлицкий В.А.* Случайные колебания механических систем. — М.: Машиностроение, 1991. — 320 с.

УДК 519.62

Д.М.Диарова

Атырауский институт нефти и газа

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕРВАЛОВ ЛИНЕЙНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ОГРАНИЧЕННОЙ НЬЮТОНОВОЙ ЗАДАЧИ ДЕСЯТИ ТЕЛ

Мақалада 10 дененің шектелген Ньютон есебінің стационар шешулерінің сызықтық орнықтылық мәселесі зерттелген. 9 дененің гравитациялық өрісінде нольдік массаның қозғалыс моделі қарастырылған. Айналмалы координаталар жүйесінде қозғалыстағы денелер концентрлік ромбпен тіктөртбұрыштан тұратын конфигурация құрайды. Есептің сызықтық орнықты болатын тепе-теңдік қалыптары табылды. Модельдің кейбір параметрлері үшін сызықтық орнықты болатын аралықтар анықталды. Зерттеуде «Mathematica» символдық есептеу жүйесі қолданылды.

In this article the problem of linear stability of stationary solutions of the Newtonian restricted 10-body problem is investigated. The model in which the body having zero weight moves in a field of gravitation of the 9 bodies is considered. In a rotating coordinate system the 9 bodies forms a configuration consisting of a concentric rhombus and a rectangle. In a first approximation the stable positions of equilibrium of a problem are found. Intervals of linear stability are found for some values of parameters of model. In research the System of symbolical calculations «Mathematica» is applied.

В статье [1] установлено, что в ограниченной задаче десяти тел, главная конфигурация которой состоит из концентрических ромба и прямоугольника (рис. 1), существуют такие значения параметров модели, при которых стационарные решения (положения равновесия) являются устойчивыми в первом приближении. Цель данной статьи — определение интервалов их линейной устойчивости.

В рассматриваемой модели нулевая масса $P(x,y)$ движется в гравитационном поле девяти тел P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, имеющих соответственно массы m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8, причём $m_1=m_3$, $m_2=m_4$, $m_5=m_6=m_7=m_8$ [1]. Тело P_0 помещено в начало системы координат P_0xy, квадрат угловой скорости вращения которой выражается формулой [1,2]:

$$\omega^2=m_0+\frac{m_1}{4}+\frac{2m_2}{(1+\alpha^2)^{3/2}}+\frac{2(1+\beta)m_5}{((1+\beta)^2+\gamma^2)^{3/2}}+\frac{2(1-\beta)m_5}{((1-\beta)^2+\gamma^2)^{3/2}}. \quad (1)$$

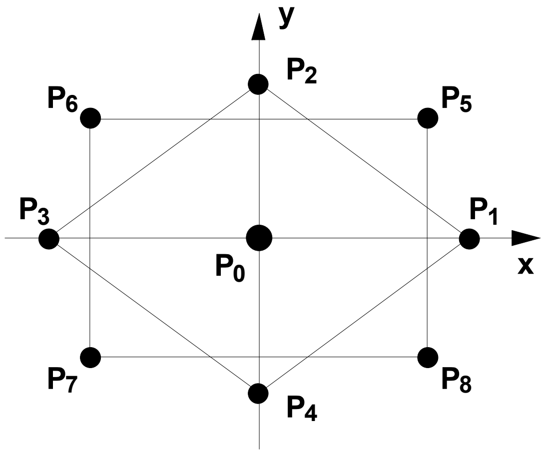

Рис. 1. Геометрическая конфигурация 9-ти тел

Положительные параметры α, β, γ являются координатами тел $P_1(1;0)$, $P_2(0,\alpha)$, $P_3(-1;0)$, $P_4(0;-\alpha)$, $P_5(\beta;\gamma)$, $P_6(-\beta;\gamma)$, $P_7(-\beta;-\gamma)$, $P_8(\beta;-\gamma)$. Такая модель имеет физический смысл при одновременном выполнении очевидных неравенств для динамических параметров (масс) и квадрата угловой скорости: $m_1 > 0$, $m_2 > 0$, $m_5 > 0$, $\omega^2 > 0$.

Дифференциальные уравнения движения тела $P(x, y)$ с бесконечно малой массой во вращающейся системе координат P_0xy имеют вид [3]:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \omega^2 x + 2\omega\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{\partial U}{\partial x}, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = \omega^2 x - 2\omega\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial U}{\partial y}, \end{cases} \tag{2}$$

где потенциал U представляется формулой

$$U = \frac{m_0}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}} + m_1\left(\frac{1}{((x-1)^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{((x+1)^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\right) + m_2\left(\frac{1}{((x^2+(y-\alpha)^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{((x^2+(y+\alpha)^2)^{\frac{1}{2}}}\right) +$$

$$+ m_5\left(\frac{1}{((x-\beta)^2+(y-\gamma)^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{((x+\beta)^2+(y-\gamma)^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{((x+\beta)^2+(y+\gamma)^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{((x-\beta)^2+(y+\gamma)^2)^{\frac{1}{2}}}\right), \tag{3}$$

f — постоянная гравитации, для удобства будем полагать $f = 1$.

Мы показали [1], что поиск стационарных решений системы (2) сводится к решению системы двух алгебраических иррациональных уравнений относительно x и y

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

где

$$f(x, y) = \omega^2\, x + \frac{\partial U}{\partial x}, \quad g(x, y) = \omega^2\, y + \frac{\partial U}{\partial y}, \tag{5}$$

или в развернутом виде:

$$f(x, y) = \omega^2 x - \frac{m_0 x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - m_1\left(\frac{x-1}{((x-1)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x+1}{((x+1)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right) -$$

$$-m_2 x\left(\frac{1}{(x^2+(y-\alpha)^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{(x^2+(y+\alpha)^2)^{\frac{3}{2}}}\right)-m_5\left(\frac{x-\beta}{((x-\beta)^2+(y-\gamma)^2)^{\frac{3}{2}}}+\right.$$

$$\left.+\frac{x+\beta}{((x+\beta)^2+(y-\gamma))^{\frac{3}{2}}}+\frac{x+\beta}{((x+\beta)^2+(y+\gamma)^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{x-\beta}{((x-\beta)^2+(y+\gamma)^2)^{\frac{3}{2}}}\right), \tag{6}$$

$$g(x,y)=\omega^2 y-\frac{m_0 y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}-m_1 y\left(\frac{1}{((x-1)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{((x+1)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right)-$$

$$-m_2\left(\frac{y-\alpha}{((x^2+(y-\alpha)^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{y+\alpha}{(x^2+(y+\alpha)^2)^{\frac{3}{2}}}\right)-m_5\left(\frac{y-\gamma}{((x-\beta)^2+(y-\gamma)^2)^{\frac{3}{2}}}+\right.$$

$$\left.+\frac{y-\gamma}{((x+\beta)^2+(y-\gamma)^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{y+\gamma}{((x+\beta)^2+(y+\gamma)^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{y+\gamma}{((x-\beta)^2+(y+\gamma)^2)^{\frac{3}{2}}}\right). \tag{7}$$

Нахождение решений системы (4) является сложной алгебраической задачей. Для ее решения мы сначала применили графический метод, а затем, для уточнения значений координат положений равновесия, итерационный метод Ньютона. Используя Систему символьных вычислений *Mathematica* [3–5], мы построили графики неявных функций: $f(x,y)=0$ и $g(x,y)=0$, точки пересечения которых являются положениями равновесия системы. Например, на рисунке 2 изображены графики функций $f(x,y)=0$, $g(x,y)=0$ для случая α =0,627, β =0,8, γ =0,6, m_0 =1, m_1 =2,472648, m_2 =8,954232, m_5 =5,233848, ω =4,852131. Здесь точками изображаются тела P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8. Решением системы являются точки пересечения кривых разного типа.

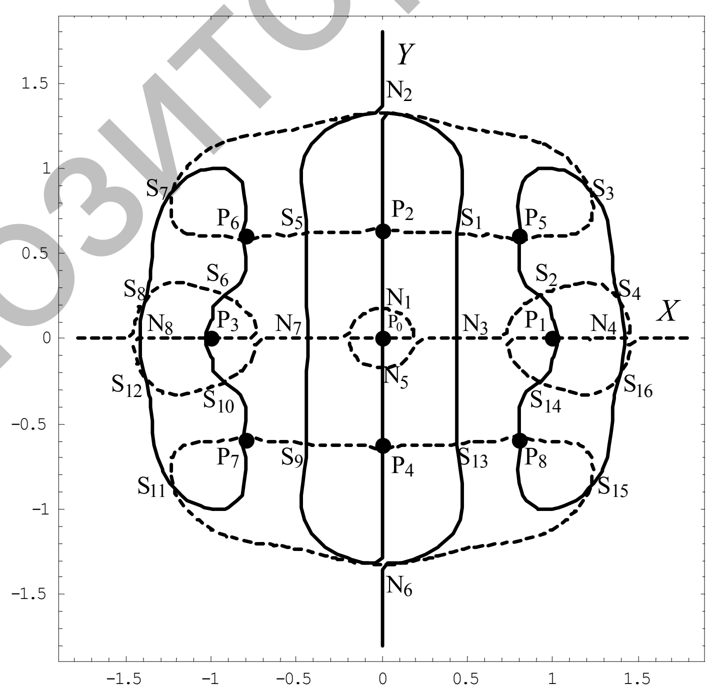

Рис. 2. Изображение гравитирующих масс (жирные точки) и положений равновесия, являющихся точками пересечения графиков функций $f(x,y)=0$ (сплошная линия), $g(x,y)=0$ (пунктирная линия), для случая: α =0,627, β =0,8, γ =0,6, m_0 =1, m_1 =2,472648, m_2 =8,954232, m_5 =5,233848, ω =4,852131

Из рисунка 2 видно, что имеются 24 точки пересечения двух кривых, что означает существование 24 положений равновесия для тела нулевой массы в плоскости Oxy . Из них четыре положения равновесия находятся на координатной оси Ox , четыре — на оси Oy , причем по два из них расположены на положительных полуосях, по два положения равновесия — на отрицательных полуосях, симметрично относительно начала координат. Четыре положения равновесия находятся в первой четверти координатной плоскости, другие расположены попарно, симметрично относительно осей координат.

Принято называть [3] точки, лежащие на прямых, проходящих через центр конфигурации и любую её вершину, *радиальными* положениями равновесия ($N_1 - N_8$), а остальные точки — *биссекториальными* положениями равновесия ($S_1 - S_{16}$), координаты этих точек приведены в таблице 1.

Таблица 1

Координаты положений равновесия (x^*, y^*) для случая: α=0,627, β=0,8, γ=0,6, m_0=1, m_1=2,472648, m_2=8,954232, m_5=5,233848, ω=4,852131

Положения равновесия	x^*	y^*	Тип точки
N_1	0	0,173939	радиальное
N_2	0	1,322554	радиальное
N_3	0,434896	0	радиальное
N_4	1,422943	0	радиальное
N_5	0	–0,173939	радиальное
N_6	0	–1,322554	радиальное
N_7	–0,434896	0	радиальное
N_8	–1,422943	0	радиальное
S_1	0,441259	0,616836	биссекториальное
S_2	0,928917	0,254686	биссекториальное
S_3	1,220032	0,872837	биссекториальное
S_4	1,383143	0,236798	биссекториальное
S_5	–0,441259	0,616836	биссекториальное
S_6	–0,928917	0,254686	биссекториальное
S_7	–1,220032	0,872837	биссекториальное
S_8	–1,383143	0,236798	биссекториальное
S_9	–0,441259	–0,616836	биссекториальное
S_{10}	–0,928917	–0,254686	биссекториальное
S_{11}	–1,220032	–0,872837	биссекториальное
S_{12}	–1,383143	–0,236798	биссекториальное
S_{13}	0,441259	–0,616836	биссекториальное
S_{14}	0,928917	–0,254686	биссекториальное
S_{15}	1,220032	–0,872837	биссекториальное
S_{16}	1,383143	–0,236798	биссекториальное

Знание точных значений координат положений равновесия позволяет перейти к исследованию их линейной устойчивости. Согласно теории Ляпунова [6] сначала линеаризуем систему дифференциальных уравнений (2) модели в окрестности положения равновесия с координатами x^*, y^*, а затем вычислим собственные значения матрицы A линеаризованной системы.

Необходимое условие линейной устойчивости стационарного решения заключается в том, что все четыре собственных значения λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 матрицы A должны быть чисто мнимыми числами [3]. Варьируя значения одного геометрического параметра при фиксированных значениях двух других, мы с помощью системы компьютерной алгебры *«Mathematica»* нашли интервалы изменения значений геометрических параметров, для которых все собственные значения матрицы A являются чисто мнимыми числами. В таблице 2 мы приводим некоторые из них.

К примеру, укажем координаты x^*, y^* линейно устойчивых положений равновесия для геометрических параметров: $\alpha \in$[0,6270, 0,6327], β=0,8, γ=0,6 (табл. 3).

Таблица 2

Интервалы линейной устойчивости стационарных решений ограниченной задачи десяти тел

α	β	γ
1,0001	0,6	$\gamma \in [0{,}7999,\ 0{,}8003]$
0,5912	$\beta \in [0{,}8397,\ 0{,}8514]$	0,6
$\alpha \in [0{,}6270,\ 0{,}6327]$	0,8	0,6
$\alpha \in [0{,}9996,\ 0{,}9999]$	0,8	0,6

Таблица 3

Координаты x^*, y^* линейно устойчивых положений равновесия для геометрических параметров $\alpha \in [0{,}6270,\ 0{,}6327]$, $\beta=0{,}8$, $\gamma=0{,}6$

N	α	x^*	y^*	N	α	x^*	y^*
1	0,6270	0	1,32255	27	0,6296	0	1,32441
2	0,6271	0	1,32263	28	0,6297	0	1,32448
3	0,6272	0	1,32270	29	0,6305	0	1,32505
4	0,6273	0	1,32277	30	0,6306	0	1,32512
5	0,6274	0	1,32284	31	0,6307	0	1,32519
6	0,6275	0	1,32291	32	0,6308	0	1,32526
7	0,6276	0	1,32298	33	0,6309	0,00687	1,32531
8	0,6277	0	1,32305	34	0,6310	0,01572	1,32527
9	0,6278	0	1,32312	35	0,6311	0,02114	1,32524
10	0,6279	0	1,32319	36	0,6312	0,02544	1,32521
11	0,6280	0	1,32327	37	0,6313	0,02910	1,32517
12	0,6281	0	1,32334	38	0,6314	0,03236	1,32514
13	0,6282	0	1,32341	39	0,6315	0,03531	1,32511
14	0,6283	0	1,32348	40	0,6316	0,03804	1,32507
15	0,6284	0	1,32355	41	0,6317	0,04058	1,32504
16	0,6285	0	1,32362	42	0,6318	0,04298	1,325
17	0,6286	0	1,32369	43	0,6319	0,04524	1,32497
18	0,6287	0	1,32376	44	0,6320	0,04740	1,32494
19	0,6288	0	1,32384	45	0,6321	0,04947	1,32490
20	0,6289	0	1,32391	46	0,6322	0,05145	1,32487
21	0,6290	0	1,32398	47	0,6323	0,05336	1,32483
22	0,6291	0	1,32405	48	0,6324	0,05520	1,32480
23	0,6292	0	1,32412	49	0,6325	0,05698	1,32477
24	0,6293	0	1,32419	50	0,6326	0,05871	1,32473
25	0,6294	0	1,32426	51	0,6327	0,06039	1,32470
26	0,6295	0	1,32433				

Проведенные исследования позволяют сформулировать следующий результат: существуют интервалы значений геометрических параметров модели, для которых положения равновесия ограниченной задачи десяти тел типа «ромб-прямоугольник» линейно устойчивы.

Список литературы

1. *Диарова Д.М.* Линейная устойчивость положений равновесия в ограниченной задаче 10-ти тел // Тр. Ин-та системного анализа РАН. Сб. «Динамика неоднородных систем» / Под ред. С.В.Емельянова. — М., 2007. — Т. 29(1). — Вып. 11. — С. 79–84.
2. *Диарова Д.М.* Существование центральной конфигурации с неполной симметрией в ньютоновой проблеме 9-ти тел // Таймановские чтения: Материалы междунар. науч.-практ. конф., посв. 90-летию акад. А.Д.Тайманова. — Уральск: ЗКГУ им. М.Утемисова, 2007. — С. 87–90.
3. *Гребеников Е.А., Козак-Сковородкина Д., Якубяк М.* Методы компьютерной алгебры в проблеме многих тел. 2-е изд., доп. и перераб. — М.: РУДН, 2002. — 209 с.
4. *Wolfram S.* The *Mathematica* — Book. — Cambridge: University Press, 1996. — 1403 p.
5. *Ихсанов Е.В.* Компьютерные методы нормализации гамильтонианов ограниченных задач небесной механики. — М.: РУДН, 2004. –132 с.
6. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. — Харьков: Изд-во Харьковского мат. общества, 1892. — 250 с.