УДК 517.51

О прямых и обратных теоремах приближений функций многих переменных ограниченной *P*-вариации полиномами Хаара

The direct and inverse theorems of approximation of functions of several variables with bounded *P*-variation by polynomials in the Haar

Ахажанов Т.Б., Бокаев Н.А.

Евразийский Национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан (E-mail: talgat_a2008@mail.ru)

Мақалада p-шектелген вариациясы бар көп айнымалы функциялар үшін «вариациялық үзіліссіздік модулі» түсінігі енгізілді. Қарастырылып жатқан кеңістіктегі нормасы бойынша p-шектелген вариациясы бар көп айнымалы функциялардың Хаар көпмүшеліктері арқылы жуықталуының тура және кері теоремалары дәлелденеді. Ең жақсы жуықталу вариациялық үзіліссіздік модулі арқылы және вариациялық үзіліссіздік модулі ең жақсы жуықталу арқылы бағаланады. Біздің мақсатымыз — осы теоремаларды еселі жағдайында қарастыру. Осы мақсатта біз «p-шектелген вариацияның қосындысы» түсінігін енгіздік.

In this paper we introduce the notion of variations of modulus of continuity for functions of two variables of bounded p-variation. Prove direct and inverse approximation theorems for functions of bounded p-variation by polynomials in the Haar in the norm of the space is main goal of this work. Estimates of the best approximation of a variational module of continuity and assessment of variations of module of continuity through the best approximations are established. Our goal is to extend these results to multiple series. With this purpose in this paper we introduce the notion of variational sum of order p.

В данной работе доказывается прямая и обратная теоремы приближения функций многих переменных ограниченной p-вариации полиномами Хаара.

Определение. Пусть функция $f(x_1,...,x_N)$ определена на множестве $[0,1]^N$ и $\rho=\rho_1\times\rho_2\times...\times\rho_N$, где $\rho_j=\{0=x_j^0<x_j^1<...<x_j^s=1\}$, $s_j\ge 1$, $j=1,...;N$ — произвольное разбиение множества $[0,1]^N$. Вариационной суммой порядка p-функции $f(x_1,...,x_N)$ по разбиению ρ назовем величину

$$\chi_\rho^p(f)=\left(\sum_{r_1=1}^{s_1}...\sum_{r_N=1}^{s_N}\left|\Delta_1\left(f;x_1^{r_1-1},...,x_N^{r_N-1};h_1^{r_1},...,h_N^{r_N}\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

где

$$\Delta_1\left(f;x_1,...,x_N;h_1,...,h_N\right):=\sum_{\eta_1=0}^{1}...\sum_{\eta_N=0}^{1}(-1)^{\eta_1+...+\eta_N}f(x_1+\eta_1h_1,...,x_N+\eta_Nh_N);$$

$$(x_1,...,x_N)\in[0,1]^N \text{ и } h_1,...,h_N>0;$$

$$h_j^{r_j}:=x_j^{r_j}-x_j^{r_j-1},\ r_j=1,2,...,s_j,\ j=1,2,...,N.$$

Для функции одной переменной понятие вариационной суммы впервые ввел Винер [1], для функций двух переменных — Кларксон и С.Адамс [2].

Вариационным модулем непрерывности $\omega_{1-1/p}\left(f,\delta_1,...,\delta_N\right)$ порядка $1-1/p$ функции $f(x_1,...,x_N)$ называется величина

$$\omega_{1-1/p}\left(f,\delta_1,...,\delta_N\right)=\sup_{|\rho_j|\le\delta_j}\chi_\rho^p\left(f\right),$$

где $\left|\rho_j\right|=\max_{1\le r_j\le s_j}\left(x_j^{r_j}-x_{j-1}^{r_j}\right)$. Будем говорить, что $f\in BV_p\left[0,1\right]^N$, $1\le p<\infty$, если $V_p\left(f,[0,1]^N\right)\equiv\omega_{1-1/p}\left(f,1,...,1\right)<\infty$, и что $f\in C_p\left[0,1\right]^N$, $1<p<\infty$, если $\lim_{\delta_j\to 0}\omega_{1-1/p}\left(f,\delta_1,...,\delta_N\right)=0$. Свойства вариационного модуля непрерывности для функции одной переменной исследовали А.П.Терехины [3], С.С.Волосивец [4].

Пространства $BV_p\left[0,1\right]^N$ и $C_p\left[0,1\right]^N$ являются банаховыми с нормой

$$\|f\|_{BV_p}=\max\left\{\sup_{(x_1,...,x_N)\in[0,1]^N}\left|f(x_1,...,x_N)\right|,V_p\left(f,\left[0,1\right]^N\right)\right\}.$$

Функции системы Хаара на $\left[0,1\right)$ задаются так: $h_0(x)=1$ при $x\in\left[0,1\right)$; если

$$n=2^k+j,\ k\in P=N\cup\left\{0\right\},\ 0\le j<2^k \text{ и } \Delta_j^{(k)}=\left[\frac{j}{2^k},\frac{j+1}{2^k}\right),$$

то

$$h_n\left(x\right)=\begin{cases}2^{k/2},x\in\Delta_{2j}^{(k+1)}\\ -2^{k/2},x\in\Delta_{2j+1}^{(k+1)}\\ 0,x\in\left[0,1\right)\setminus\Delta_j^{(k)}\end{cases}.$$

Пусть $\overline{x}=(x_1,...,x_N)\in[0,1]^N$, $\overline{n}=(n_1,...,n_N)$ — параметр суммирования; $n_i\in N$, $i=1,...,N$, тогда кратную систему Уолша определим следующим образом:

$$h_{\overline{n}}\left(\overline{x}\right)=\prod_{i=1}^{k}h_{n_i}\left(x_i\right).$$

Через $E_{\overline{n}}^h(f)_X$, соответственно, будем обозначать наилучшее приближение функции $f\in X\left[0,1\right]^N$ полиномами по системе Хаара порядка не выше $n_1\times...\times n_N$ ($n_j\in N$) в метрике $X\left[0,1\right]^N$, где $X\left[0,1\right]^N=BC_p\left[0,1\right]^2$, $1<p<\infty$, или $X\left[0,1\right]^N=BV_p\left[0,1\right]^N$, $1\le p<\infty$,

$$E_{\overline{n}}(f)_X=\inf_{c_{\overline{i}}}\left\|f(x_1,...,x_n)-\sum_{\overline{i}=1}^{s_i}c_{\overline{i}}h_{\overline{i}}(\overline{x})\right\|_X.$$

Через $S_{\overline{n}}^h(f)$ обозначим частичную сумму ряда Фурье по системе Хаара функции f. Через $K_{\alpha,\beta,...,\gamma}$ обозначим положительные постоянные, зависящие от параметров $\alpha,\beta,...,\gamma$, вообще говоря, различные в разных формулах.

Основной целью данной работы является доказательство прямых и обратных теорем для приближения полиномами по системе Хаара функций, являющихся аналогом прямых и обратных теорем теории приближения функций $f\in C_p\left[0,1\right]^N$ по норме пространства $C_p\left[0,1\right]^N$.

Теорема 1. Пусть $f\in C_p\left[0,1\right]^N$, $1<p<\infty$, тогда верны неравенства

$$E_{\overline{n}}^h(f)_{BV_p}\le K_p\omega_{1-\frac{1}{p}}\left(f,\frac{1}{n_1},...,\frac{1}{n_N}\right). \tag{1}$$

Теорема 2. Пусть $f\in C_p\left[0,1\right]^N$, $1<p<\infty$, тогда верны неравенства

$$\omega_{1-\frac{1}{p}}\left(f,\frac{1}{n_1},...,\frac{1}{n_N}\right)\le K_pE_{\overline{n}}^h(f)_{BV_p}. \tag{2}$$

Для случая функций одной переменной подобные теоремы были доказаны в [4]. Мы докажем для двумерного случая. Для функции многих переменных доказывается аналогично. Для доказательства теорем нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Пусть $f\in BV_p\left[0,1\right]^2$, $1\le p<\infty$, $\rho=\rho_1\times\rho_2$ — такое разбиение множества, при котором $f(x,y)=0$. Тогда

$$V_p\left(f,\left[0,1\right]^2\right)\le K_p\omega_{1-\frac{1}{p}}\left(f,\left|\rho_1\right|,\left|\rho_2\right|\right).$$

Для случая функции одной переменной такое утверждение ранее доказано в [5]. Для функции двух переменных доказывается аналогично.

Лемма 2. Пусть $f \in BV_p[0,1]^2$, $1 \le p < \infty$, $\nu,...,\mu \in N$ и $0 < \delta_1 < \delta_2 < 1$. Тогда верно неравенство

$$\omega_{1-\frac{1}{p}}(f, \nu\delta_1, \mu\delta_2) \le (\nu\mu)^{1-\frac{1}{p}} \omega_{1-\frac{1}{p}}(f, \delta_1, \delta_2).$$

Доказательство. Пусть

$$\rho = \left\{\rho = \{x_i : 0 \le i \le m\}, \rho_2 = \{y_j : 0 \le j \le n\}\right\}$$

— разбиение квадрата $[0,1]^2$ такое, что

$$|\rho_1| \le \nu\delta_1,\ \ |\rho_2| \le \mu\delta_2.$$

Мы возьмем новое подразбиение квадрата $[0,1]^2$:

$$\rho' = \left\{\left(x_i', y_j'\right)\right\},\ 0 \le i \le \nu m,\ 0 \le j \le \mu n,$$

содержащее точки (x_i, y_j) и разбивающее отрезки $[x_{i-1}, x_i]$, $[y_{j-1}, y_j]$ на m и n равных частей соответственно. Тогда на основании неравенства Гёльдера имеем

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|f(x_i, y_j) - f(x_{i-1}, y_j) - f(x_i, y_{j-1}) + f(x_{i-1}, y_{j-1})\right|^p \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{m}\sum_{i'=\nu(i-1)+1}^{i\nu}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{j'=\mu(j-1)+1}^{j\mu}\left|f(x_i', y_j') - f(x_{i-1}', y_j') - f(x_i', y_{j-1}') + f(x_{i-1}', y_{j-1}')\right|^p\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i'=\nu(i-1)+1}^{i\nu}\sum_{j'=\mu(j-1)+1}^{j\mu}\left|f(x_i', y_j') - f(x_{i-1}', y_j') - f(x_i', y_{j-1}') + f(x_{i-1}', y_{j-1}')\right|^p\right) \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\left(\sum_{i'=\nu(i-1)+1}^{i\nu}\sum_{j'=\mu(j-1)+1}^{j\mu}\left|f(x_i', y_j') - f(x_{i-1}', y_j') - f(x_i', y_{j-1}') + f(x_{i-1}', y_{j-1}')\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \times\right.$$

$$\left.\times\left(\sum_{i'=\nu(i-1)+1}^{i\nu}\sum_{j'=\mu(j-1)+1}^{j\mu}|1|^{p'}\right)^{1-\frac{1}{p}}\right)^p = (\nu\mu)^{p-1}\sum_{i'=\nu(i-1)+1}^{i\nu}\sum_{j'=\mu(j-1)+1}^{j\mu}\left|f(x_i', y_j') - f(x_{i-1}', y_j') - f(x_i', y_{j-1}') + f(x_{i-1}', y_{j-1}')\right|^p.$$

Отсюда, взяв супремум, получим требуемое неравенство. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Для частных сумм $S_{2^m,2^n}(f)$, $m,n \in N$, ряда Фурье-Хаара или Уолша функций f имеет место формула

$$S_{2^m,2^n}^h(f,x,y) = \frac{1}{2^{m+n}}\int_{\Delta_i^{(m)}}\int_{\Delta_j^{(n)}} f(t,u)\,dt\,du \text{ при } (x,y) \in \Delta_i^{(m)} \times \Delta_j^{(n)}. \quad (3)$$

Для функций одной переменной доказательства указанных равенств имеются в [5; 45]. Для случая функций двух переменных доказывается аналогично.

Лемма 4. Любая функция $f(x,y)$, постоянная на каждом прямоугольнике

$$\Delta_{m,n}^{k,l} = \Delta_m^{(k)} \times \Delta_n^{(l)},\ \ 0 \le m \le 2^k,\ \ 0 \le l \le 2^n,$$

представима в виде полинома порядка не выше 2^{k+l} по системе Хаара.

В случае функций одной переменной такие равенства представлены в [5; 22, 23, 203, 204]. Через $K_{\alpha,\beta,\gamma}$ обозначим положительные постоянные, зависящие от параметров α,β,γ, вообще говоря, различные в разных формулах.

Лемма 5. Пусть $f \in C_p[0,1]^2$, $1 < p < \infty$, $m,n \in P$. Тогда имеет место неравенство

$$\left\|S_{2^m,2^n}^h(f)\right\|_{BV_p} \le \|f\|_{BV_p}.$$

Доказательство. Согласно лемме 3 частные суммы ряда Фурье $S_{2^m,2^n}^h(f)$ вычисляются по формуле (3). Следовательно, любая вариационная сумма для $S_{2^m,2^n}^h(f)$ совпадает с некоторой вариационной суммой для $f(x,y)$. Это следует из того, что для $f \in C_p[0,1]^2 \subset C[0,1]^2$ по теореме о среднем существуют

$$(x_i, y_j) \in \Delta_i^{(k)} \times \Delta_i^{(l)}$$

такие, что

$$2^{k+l} \int\limits_{\Delta_i^{(k)}} \int\limits_{\Delta_j^{(l)}} f(t,u)dtdu = f(x_i, y_j).$$

Лемма доказана.

Следствие 1. Пусть $f \in C_p[0,1]^2$, $1 < p < \infty$, $m,n \in P$. Тогда

$$E_{2^m,2^n}(f)_{BV_p} \le \left\| f - S_{2^m,2^n}(f) \right\|_{BV_p} \le 2E_{2^m,2^n}(f)_{BV_p}.$$

Доказательство. Пусть полином $P_{2^m,2^n}(x,y) = P$ такой, что

$$E_{2^m,2^n}(f)_{BV_p} = \left\| f - P \right\|_{BV_p}.$$

Используя равенство $S_{2^m,2^n}(P) = P$ и лемму 5, получаем:

$$\left\| f - S_{2^m,2^n}(f) \right\|_{BV_p} = \left\| f - P_{2^m,2^n} + P_{2^m,2^n} - S_{2^m,2^n}(f) \right\|_{BV_p} =$$

$$= \left\| f - P_{2^m,2^n} - S_{2^m,2^n}(f - P_{2^m,2^n}) \right\|_{BV_p} \le$$

$$\le \left\| f - P_{2^m,2^n} \right\|_{BV_p} + \left\| S_{2^m,2^n}(f - P_{2^m,2^n}) \right\|_{BV_p} \le$$

$$\le 2\left\| f - P_{2^m,2^n} \right\|_{BV_p} = 2E_{2^m,2^n}(f)_{BV_p}.$$

Левое неравенство непосредственно вытекает из определения наилучшего приближения.

Доказательство теоремы 1. Сначала рассмотрим разбиение $\rho = \rho_1 \times \rho_2$, где

$$\rho_1 = \{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = 1\},\ \rho_2 = \{0 = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = 1\},$$

и ступенчатую функцию $P(x,y)$, равную $f\left(\frac{2k+1}{2^{m+1}}; \frac{2l+1}{2^{l+1}}\right)$, на квадрате

$$\Delta_{m,n}^{(k,l)} = \Delta_m^{(k)} \times \Delta_n^{(l)},\ 0 \le m \le 2^k - 1,\ 0 \le n \le 2^l - 1.$$

Согласно лемме 4, $P(x,y)$ является полиномом по системе Хаара порядка не выше $\left(2^m \times 2^n\right)$. Так как

$$|\rho_1| = \frac{1}{2^m},\ |\rho_2| = \frac{1}{2^n},$$

то по лемме 1

$$E_{m,n}^h(f)_{BV_p} = \inf_{\substack{k \le m \\ l \le n}} \left\| f(x,y) - P(x,y) \right\|_{BV_p} \le \left\| f(x,y) - P(x,y) \right\|_{BV_p} =$$

$$= V_p\left(f - P, [0,1]^2\right) \le \left(2^{1-\frac{1}{p}}\right)^2 \omega_{1-\frac{1}{p}}\left(f - P, \frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^n}\right) \le$$

$$\le \left(2^{1-\frac{1}{p}}\right)^2 \left(\omega_{1-\frac{1}{p}}\left(f, \frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^n}\right) + \omega_{1-\frac{1}{p}}\left(P, \frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^n}\right)\right).$$

Учитывая, что $P(x,y)$ постоянна на прямоугольнике площади $\frac{1}{2^m} \times \frac{1}{2^n}$, имеем:

$$\omega_{1-\frac{1}{p}}\left(P, \frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^n}\right) = \left(\sum_{i=1}^{2^m} \sum_{j=1}^{2^n} \left| P\left(\frac{i}{2^m}; \frac{j}{2^n}\right) - P\left(\frac{i-1}{2^m}; \frac{j}{2^n}\right) - P\left(\frac{i}{2^m}; \frac{j-1}{2^n}\right) + P\left(\frac{i-1}{2^m}; \frac{j-1}{2^n}\right) \right|^p\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{2^m-1}\sum_{j=1}^{2^n-1}\left|f\left(\frac{2i+1}{2^{m+1}};\frac{2j+1}{2^{n+1}}\right)-f\left(\frac{2i-1}{2^{m+1}};\frac{2j+1}{2^{n+1}}\right)-f\left(\frac{2i+1}{2^{m+1}};\frac{2j-1}{2^{n+1}}\right)+f\left(\frac{2i-1}{2^{m+1}};\frac{2j-1}{2^{n+1}}\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\le$$

$$\le\omega_{1-\frac{1}{p}}\left(f,\frac{1}{2^m},\frac{1}{2^n}\right).$$

Следовательно,

$$V_p\left(f-P,[0,1]\right)\le 2\left(2^{1-\frac{1}{p}}\right)^2\omega_{1-\frac{1}{p}}\left(f,\frac{1}{2^m},\frac{1}{2^n}\right)=2^{3-\frac{2}{p}}\omega_{1-\frac{1}{p}}\left(f,\frac{1}{2^m},\frac{1}{2^n}\right),$$

значит,

$$E^h_{2^m,2^n}\left(f\right)_{V_p}\le 2^{3-\frac{2}{p}}\omega_{1-\frac{1}{p}}\left(f,\frac{1}{2^m},\frac{1}{2^n}\right),$$

Здесь мы учли также неравенство

$$\left(\|f\|_\infty=\sup_{[0,1]^2}|f(x,y)|\right),\ \|f-P\|_\infty\le\omega\left(f,\frac{1}{2^m},\frac{1}{2^n}\right)\le\omega_{1-\frac{1}{p}}\left(f,\frac{1}{2^m},\frac{1}{2^n}\right).$$

При $2^m\le k<2^{m+1}$, $2^n\le l<2^{n+1}$ воспользуемся тем, что

$$\frac{1}{2^m}<\frac{2}{k},\ \frac{1}{2^n}<\frac{2}{l},$$

и леммой 2. Имеем

$$E^h_{k,l}\left(f\right)_{V_p}\le E^h_{2^m,2^n}\left(f\right)_{V_p}\le 2^{3-\frac{2}{p}}\omega_{1-\frac{1}{p}}\left(f,\frac{1}{2^m},\frac{1}{2^n}\right)\le$$

$$\le 2^{3-\frac{2}{p}}\omega_{1-\frac{1}{p}}\left(f,\frac{2}{k},\frac{2}{l}\right)\le 2^{5-\frac{3}{p}}\omega_{1-\frac{1}{p}}\left(f,\frac{1}{k},\frac{1}{l}\right).$$

Неравенство (1) доказано. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Будем обозначать $S^h_{2^m,2^n}(f)$ через $A_{m,n}$. Докажем, что

$$\omega_{1-\frac{1}{p}}\left(f,\frac{1}{2^m},\frac{1}{2^n}\right)\le 2\|f-A_{m,n}\|_{BV_p}.$$

Очевидно, что

$$\omega_{1-\frac{1}{p}}\left(f,\frac{1}{2^m},\frac{1}{2^n}\right)\le 2\|f-A_{m,n}\|_{BV_p};$$

$$\omega_{1-\frac{1}{p}}\left(f,\frac{1}{2^m},\frac{1}{2^n}\right)\le\omega_{1-\frac{1}{p}}\left(f-A_{m,n}+A_{m,n},\frac{1}{2^m},\frac{1}{2^n}\right)=$$

$$=\sup_{\substack{|\xi|\le\delta_1\\|\eta|\le\delta_2}}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|\left[\left(f(x_i,y_j)-A(x_i,y_j)\right)-\left(f(x_{i-1},y_j)-A(x_{i-1},y_j)\right)-\right.\right.\right.$$

$$\left.-\left(f(x_i,y_{j-1})-A(x_i,y_{j-1})\right)+\left(f(x_{i-1},y_{j-1})-A(x_{i-1},y_{j-1})\right)\right]+$$

$$\left.\left.+\left[A(x_i,y_j)-A(x_{i-1},y_j)-A(x_i,y_{j-1})+A(x_{i-1},y_{j-1})\right]\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\le$$

$$\le\omega_{1-\frac{1}{p}}\left(f-A_{m,n},\frac{1}{2^m},\frac{1}{2^n}\right)+\omega_{1-\frac{1}{p}}\left(A_{m,n},\frac{1}{2^m},\frac{1}{2^n}\right)\le$$

$$\le\|f-A_{m,n}\|_{BV_p}+\omega_{1-\frac{1}{p}}\left(A_{m,n},\frac{1}{2^m},\frac{1}{2^n}\right).$$

Согласно лемме 4, $A_{m,n}$ — ступенчатая функция, постоянная на прямоугольнике длины $\frac{1}{2^m}\times\frac{1}{2^n}$, и для каждой точки

$$(x,y)\in\Delta_{\nu-1}^{m}\times\Delta_{k-1}^{n},\ 1\le\nu\le 2^m,\ 1\le k\le 2^n.$$

Величина

$$A(x_i,y_j)-A(x_{i-1},y_j)-A(x_i,y_{j-1})+A(x_{i-1},y_{j-1}),$$

где $\left|x_i-x_{i-1}\right|\le\frac{1}{2^m}$, $\left|y_j-y_{j-1}\right|\le\frac{1}{2^n}$, равна по модулю $\left|\varsigma_{\nu,k}\right|$:

$$\left|\varsigma_{\nu,k}\right|=S_{2^m,2^n}\left(\frac{\nu}{2^m}-0,\frac{k}{2^n}-0\right)-S_{2^m,2^n}\left(\frac{\nu}{2^m},\frac{k}{2^n}-0\right)-S_{2^m,2^n}\left(\frac{\nu}{2^m}-0,\frac{k}{2^n}\right)+S_{2^m,2^n}\left(\frac{\nu}{2^m},\frac{k}{2^n}\right)$$

либо равна нулю. Отсюда следует, что

$$\omega_{1-\frac{1}{p}}\left(A_{m,n},\frac{1}{2^m},\frac{1}{2^n}\right)=\left(\sum_{\nu=1}^{2^m}\sum_{k=1}^{2^n}\left|\varsigma_{\nu,k}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Теперь отметим, что для непрерывной функции $f(x,y)$ функции $S_{2^m,2^n}(f)\equiv A_{m,n}$ и $A_{m,n}$ имеют разрывы в одних и тех же точках, а величины скачков этих функций в одной точке совпадают по модулю.

Таким образом,

$$V_p\left(f-S_{2^m,2^n},[0,1]^2\right)\ge\omega_{1-\frac{1}{p}}\left(A_{m,n},[0,1]^2\right)\ge\omega_{1-\frac{1}{p}}\left(A_{m,n},\frac{1}{2^m},\frac{1}{2^n}\right).$$

Значит,

$$\omega_{1-\frac{1}{p}}\left(A_{m,n},\frac{1}{2^m},\frac{1}{2^n}\right)\le V_p\left(f-A_{m,n},[0,1]^2\right)\le\left\|f-S_{2^m,2^n}\right\|_{BV_p}.$$

Пользуясь при $l\in\left[2^m,2^{m+1}\right]$, $r\in\left[2^n,2^{n+1}\right]$ последовательно леммой 2, только что полученным неравенством и следствием 1, получаем:

$$\omega_{1-\frac{1}{p}}\left(f,\frac{1}{l},\frac{1}{r}\right)\le\omega_{1-\frac{1}{p}}\left(f,\frac{2}{2^{m+1}},\frac{2}{2^{n+1}}\right)\le 2^{2\left(1-\frac{1}{p}\right)}\omega_{1-\frac{1}{p}}\left(f,\frac{1}{2^{m+1}},\frac{1}{2^{n+1}}\right)\le$$

$$\le 2^{\left(1-\frac{1}{p}\right)}4E_{2^{m+1},2^{n+1}}(f)_{BV_p}\le CE_{2^{m+1},2^{n+1}}(f)_{BV_p}\le CE_{l,r}(f)_{BV_p}.$$

Теорема 2 доказана.

References

1. *Wiener N.* The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients / Massachusetts J.Math. 3 (1924). — P. 72–94.
2. *Clarkson J.A. and Adams C.R.* On definitions of bounded variation for functions of two variables / Trans. Amer. Math. Soc. — 35 (1933). — P. 824–854.
3. *Terehin A.P.* Approximation of functions of bounded p-variation / Proceedings of the universities. Mathematics. — 1965. — № 2. — P. 171–187.
4. *Volosivets C.C.* Approximation of functions of bounded *p*-variation by polynomials on the Haar and Walsh / Math. Notes. — 6 (1993). — P. 11–21.
5. *Golubov B., Efimov A., Skvortsov V.* Walsh series and transforms: theory and applications. — M.: Science, 1987. — 344 p.