

9. Kuketaev T.A., Kim L.M., Mahmetov T.S. Recombination luminescence in  $K_2SO_4-Cu^{2+}$  // Solid-state detectors of ionizing radiation: Theses of reports of the international conference. — Ekaterinburg, 1997. — P. 113.
10. Kuketaev T.A., Murashova Z.F., Sagyndykova G.E. The thermal stimulation luminescence of potassium sulphate doped by mercury similar ions // Chaos and structures in nonlinear systems // The theory and experiment: Materials of 3rd international scientific conference. — Karaganda: Publ. KarSU, 2002. — P. 136–139.
11. Byberg J.L.  $O^-$  detected by EPR as a primary electron-excess defect in x-irradiated  $K_2SO_4$  // Chem. Phys. — Vol. 84. — № 11. — P. 6083–6085.
12. Kim L.M. Defect formation by radiation in sulphates on the mechanism of dissociation capture electrons // Problems of a modern science: an urgency, directions, prospects: Materials of the 3-d Republican scientific-technical. conferences. — Ust-Kamenogorsk, 2002. — P. 250–252.

УДК 539.3

### Движение периодической нагрузки по внутренней поверхности двухслойной оболочки в упругом полупространстве

### Movement of the periodic load on an internal surface of the two-layer shell in elastic half-space

Украинец В.Н., Тлеулесов А.К.

*Павлодарский государственный университет им. С.Торайгырова (E-mail: vitnikukr@mail.ru)*

Серпінді жартылай кеңістікте екі қабатты қабықшаға қозғалмалы мерзімдік жүктеменің әрекеті туралы есептің толық аналитикалық шешімі шығарылды. Қабықшаның жуан ішкі қабатын сипаттау үшін серпінділік теорияның динамикалық тендеулері қолданылады, жіңішке сыртқы қабатын тербелісі координаттардың қозғалмалы жүйесінде жіңішке қабықша теорияның классикалық тендеулерімен сипатталады. Шешім айнмалылардың толық емес бөлінуінің әдісіне негізделген. Есепті санмен есептеу кезінде жүйелі шағылудың (жыуқтаудың) әдісін пайдалану ұсынылған.

The exact analytical solution of the problem about an action of the mobile periodic loading on a two-layer shell in elastic half-space is received. For the description of a thick inside layer of the shell the dynamic equations of the theory of elasticity are used, fluctuations of a thin external layer are described by the classical equations of the theory of thin shells in a mobile system of coordinates. The solution is based on a method of the incomplete division of variables. At numerical realization of the problem it is recommended to apply a method of successive approximations.

Рассмотрим в линейно-упругом, однородном и изотропном полупространстве, отнесенном к декартовой  $(x, y, z)$  или цилиндрической  $(r, \theta, z)$  неподвижной системе координат, бесконечно длинную круговую цилиндрическую двухслойную оболочку, наружным слоем которой является тонкостенная упругая оболочка толщиной  $h_0$  и радиусом срединной поверхности  $R_1$ , а внутренним — толстая упругая оболочка радиусом внутренней поверхности  $R_2$  (рис.). В силу малости  $h_0$  принимаем, что тонкостенная оболочка контактирует с толстой оболочкой и окружающей упругой средой (массивом) вдоль своей срединной поверхности. Условимся внутренний слой двухслойной оболочки называть несущим, а наружный — ограждающим. Контакт между слоями оболочки, а также между ограждающим слоем и массивом будем полагать либо жёстким, либо скользящим при двусторонней связи в радиальном направлении.

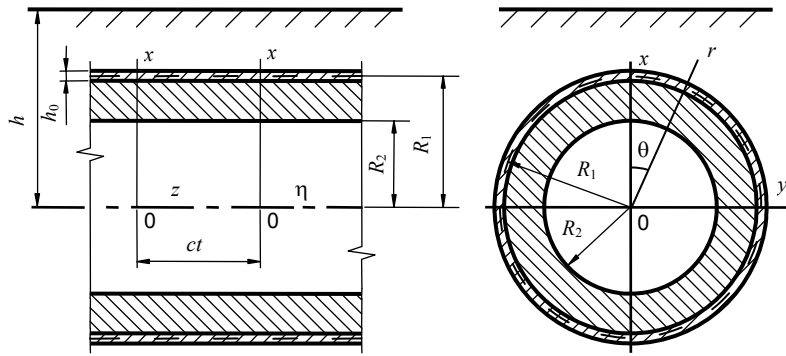


Рис. Двухслойная оболочка в упругом полупространстве

Пусть на внутреннюю поверхность оболочки действует периодическая по её оси нагрузка интенсивностью  $P$ , движущаяся с постоянной скоростью  $c$  в направлении оси  $z$ , а граница полупространства  $x = h$  свободна от нагрузок. Введём ограничение на величину скорости движения нагрузки, принимая её меньше скоростей распространения волн сдвига в несущем слое и массиве (дозвуковой случай). Физико-механические свойства материала массива и несущего слоя характеризуются следующими постоянными:  $\nu_1, \mu_1, \rho_1; \nu_2, \mu_2, \rho_2$ ,

где  $\nu_k$  — коэффициент Пуассона;  $\mu_k$  — модуль сдвига;  $\rho_k$  — плотность ( $k = 1, 2$ ). Здесь и в дальнейшем индекс  $k = 1$  относится к массиву, а  $k = 2$  — к несущему слою.

Для описания движения массива и несущего слоя используем динамические уравнения теории упругости в подвижной системе координат  $\eta = z - ct$  [1]:

$$(M_{pk}^{-2} - M_{sk}^{-2}) \text{grad div } u_k + M_{sk}^{-2} \nabla^2 u_k = \partial^2 u_k / \partial \eta^2, \quad k = 1, 2, \quad (1)$$

где  $M_{pk} = c/c_{pk}$ ,  $M_{sk} = c/c_{sk}$  — числа Маха;  $c_{pk} = \sqrt{(\lambda_k + 2\mu_k)/\rho_k}$ ,  $c_{sk} = \sqrt{\mu_k/\rho_k}$  — скорости распространения волн расширения-сжатия и сдвига в массиве и несущем слое,  $\lambda_k = 2\mu_k \nu_k / (1 - 2\nu_k)$ ;  $u_k$  — векторы смещений точек массива и несущего слоя,  $\nabla^2$  — оператор Лапласа.

Для описания движения ограждающего слоя воспользуемся классическими уравнениями теории тонких оболочек, которые в подвижной системе координат имеют подобный [2] вид:

$$\begin{aligned} \left[ 1 - \frac{(1-\nu_0)\rho_0 c^2}{2\mu_0} \right] \frac{\partial^2 u_{0\eta}}{\partial \eta^2} + \frac{1-\nu_0}{2R^2} \frac{\partial^2 u_{0\eta}}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu_0}{2R} \frac{\partial^2 u_{0\theta}}{\partial \eta \partial \theta} + \frac{\nu_0}{R} \frac{\partial u_{0r}}{\partial \eta} &= \frac{1-\nu_0}{2\mu_0 h_0} (q_{\eta 2} - q_{\eta 1}), \\ \frac{1+\nu_0}{2R} \frac{\partial^2 u_{0\eta}}{\partial \eta \partial \theta} + \frac{(1-\nu_0)}{2} \left( 1 - \frac{\rho_0 c^2}{\mu_0} \right) \frac{\partial^2 u_{0\theta}}{\partial \eta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u_{0\theta}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial u_{0r}}{\partial \theta} &= \frac{1-\nu_0}{2\mu_0 h_0} (q_{\theta 2} - q_{\theta 1}), \\ \frac{\nu_0}{R} \frac{\partial u_{0\eta}}{\partial \eta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial u_{0\theta}}{\partial \theta} + \frac{h_0^2}{12} \nabla^2 \nabla^2 u_{0r} + \frac{(1-\nu_0)\rho_0 c^2}{2\mu_0} \frac{\partial^2 u_{0r}}{\partial \eta^2} + \frac{u_{0r}}{R^2} &= -\frac{1-\nu_0}{2\mu_0 h_0} (q_{r 2} - q_{r 1}). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $R = R_1$ ;  $u_{0\eta}$ ,  $u_{0\theta}$ ,  $u_{0r}$  — перемещения точек срединной поверхности ограждающего слоя;  $\nu_0, \mu_0, \rho_0$  — соответственно коэффициент Пуассона, модуль сдвига и плотность его материала;  $q_{j1} = \sigma_{ij1}|_{r=R_1}$ ,  $q_{j2} = \sigma_{ij2}|_{r=R_1}$  — составляющие реакции массива и несущего слоя;  $\sigma_{ij1}$ ,  $\sigma_{ij2}$  — компоненты тензоров напряжений в массиве и несущем слое,  $j = \eta, \theta, r$ .

Выражая  $u_k$  через потенциалы Ламе [1]:

$$u_k = \text{grad } \varphi_{1k} + \text{rot}(\varphi_{2k} e_\eta) + \text{rot rot}(\varphi_{3k} e_\eta), \quad k = 1, 2, \quad (3)$$

преобразуем уравнения (1) к виду:

$$\nabla^2 \varphi_{jk} = M_{jk}^2 \partial^2 \varphi_{jk} / \partial \eta^2, \quad j = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2. \quad (4)$$

Здесь  $e_\eta$  — орт оси  $\eta$ ,  $M_{1k} = M_{pk}$ ,  $M_{2k} = M_{3k} = M_{sk}$ .

Используя (3) и закон Гука, получаем выражения для компонент векторов  $u_k$  и тензоров напряжений в массиве ( $k = 1$ ) и несущем слое ( $k = 2$ ) в подвижной цилиндрической системе координат:

$$u_{rk} = \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \varphi_{3k}}{\partial \eta \partial r}, \quad u_{\eta k} = \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial \eta} + m_{sk}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{3k}}{\partial \eta^2}, \quad u_{\theta k} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial \theta} - \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_{3k}}{\partial \eta \partial \theta}; \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\eta \eta k} &= (2\mu_k + \lambda_k M_{pk}^2) \frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial \eta^2} + 2\mu_k m_{sk}^2 \frac{\partial^3 \varphi_{3k}}{\partial \eta^3}, \\ \sigma_{\theta \theta k} &= \lambda_k M_{pk}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial \eta^2} + \frac{2\mu_k}{r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \varphi_{2k}}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \varphi_{3k}}{\partial \theta^2 \partial \eta} + \frac{\partial^2 \varphi_{3k}}{\partial r \partial \eta} \right), \\ \sigma_{rrk} &= \lambda_k M_{pk}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial \eta^2} + 2\mu_k \left( \frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_{2k}}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial \theta} + \frac{\partial^3 \varphi_{3k}}{\partial r^2 \partial \eta} \right), \\ \sigma_{r\eta k} &= \mu_k \left( 2 \frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial \eta \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_{2k}}{\partial \theta \partial \eta} + (1 + m_{sk}^2) \frac{\partial^3 \varphi_{3k}}{\partial \eta^2 \partial r} \right), \\ \sigma_{\eta \theta k} &= \mu_k \left( \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial \theta \partial \eta} - \frac{\partial^2 \varphi_{2k}}{\partial r \partial \eta} + \frac{(1 + m_{sk}^2)}{r} \frac{\partial^3 \varphi_{3k}}{\partial \theta \partial \eta^2} \right), \\ \sigma_{r\theta k} &= 2\mu_k \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \varphi_{2k}}{\partial r^2} - \frac{m_{sk}^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi_{2k}}{\partial \eta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \varphi_{3k}}{\partial r \partial \eta \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_{3k}}{\partial \eta \partial \theta} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $m_{sk}^2 = 1 - M_{sk}^2$ .

В подвижных декартовых координатах выражения для компонент напряжённо-деформированного состояния (НДС) массива имеют вид

$$u_{x1} = \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi_{31}}{\partial x \partial \eta}, \quad u_{\eta 1} = \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \eta} + m_{s1}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{31}}{\partial \eta^2}, \quad u_{y1} = \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi_{31}}{\partial y \partial \eta}; \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\eta \eta 1} &= (2\mu_1 + \lambda_1 M_{p1}^2) \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \eta^2} + 2\mu_1 m_{s1}^2 \frac{\partial^3 \varphi_{31}}{\partial \eta^3}, \\ \sigma_{yy1} &= \lambda_1 M_{p1}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \eta^2} + 2\mu_1 \left( \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 \varphi_{31}}{\partial y^2 \partial \eta} \right), \\ \sigma_{xx1} &= \lambda_1 M_{p1}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \eta^2} + 2\mu_1 \left( \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 \varphi_{31}}{\partial x^2 \partial \eta} \right), \\ \sigma_{x\eta 1} &= \mu_1 \left( 2 \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \eta \partial x} + \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial y \partial \eta} + (1 + m_{s1}^2) \frac{\partial^3 \varphi_{31}}{\partial \eta^2 \partial x} \right), \\ \sigma_{\eta y 1} &= \mu_1 \left( 2 \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial y \partial \eta} - \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial x \partial \eta} + (1 + m_{s1}^2) \frac{\partial^3 \varphi_{31}}{\partial y \partial \eta^2} \right), \\ \sigma_{xy1} &= 2\mu_1 \left( \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial x^2} - \frac{m_{s1}^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^3 \varphi_{31}}{\partial x \partial y \partial \eta} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, для определения компонент НДС несущего слоя и массива необходимо решить уравнения (4), используя граничные условия.

Рассмотрим случай, когда подвижная нагрузка представима в виде синусоидальной нагрузки с произвольной зависимостью от угловой координаты:

$$P(\theta, \eta) = p(\theta) e^{i\xi \eta}, \quad p(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{in\theta}, \quad (9)$$

$$P_j(\theta, \eta) = p_j(\theta) e^{i\xi \eta}, \quad p_j(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_{nj} e^{in\theta}, \quad j = r, \theta, \eta,$$

где константа  $\xi$  определяет период  $T = 2\pi/\xi$  действующей нагрузки;  $P_j(\theta, \eta)$  — составляющие интенсивности нагрузки  $P(\theta, \eta)$ .

Потенциалы  $\varphi_{jk}$  будем искать в аналогичном виде:

$$\varphi_{jk}(r, \theta, \eta) = \Phi_{jk}(r, \theta) e^{i\xi \eta}. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (4), получим видоизменённые уравнения Гельмгольца:

$$\nabla_2^2 \Phi_{jk} - m_{jk}^2 \xi^2 \Phi_{jk} = 0, \quad j=1,2,3, \quad k=1,2, \quad (11)$$

где  $\nabla_2^2$  — двумерный оператор Лапласа,  $m_{jk}^2 = 1 - M_{jk}^2$ ,  $m_{1k} \equiv m_{pk}$ ,  $m_{2k} \equiv m_{3k} \equiv m_{sk}$ .

Выражения (5)–(8), с учётом (10), переписутся в виде

$$\begin{aligned} u_{rk} &= \left( \frac{\partial \Phi_{1k}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_{2k}}{\partial \theta} + \xi \frac{\partial \Phi_{3k}}{\partial r} i \right) e^{i\xi\eta}, \\ u_{\theta k} &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_{1k}}{\partial \theta} - \frac{\partial \Phi_{2k}}{\partial r} + \frac{\xi}{r} \frac{\partial \Phi_{3k}}{\partial \theta} i \right) e^{i\xi\eta}, \\ u_{\eta k} &= \left( \xi \Phi_{1k} i - \xi^2 m_s^2 \Phi_{3k} \right) e^{i\xi\eta}; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\eta\eta k} &= -\mu \left[ \left( 2 + \frac{\lambda}{\mu} M_p^2 \right) \xi^2 \Phi_{1k} + 2m_s^2 \xi^3 \Phi_{3k} i \right] e^{i\xi\eta}, \\ \sigma_{\theta\theta k} &= \mu \left[ -\frac{\lambda}{\mu} M_p^2 \xi^2 \Phi_{1k} + \frac{2}{r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi_{1k}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \Phi_{1k}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_{2k}}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \Phi_{2k}}{\partial r \partial \theta} + \frac{\xi}{r} \frac{\partial^2 \Phi_{3k}}{\partial \theta^2} i + \xi \frac{\partial \Phi_{3k}}{\partial r} i \right) \right] e^{i\xi\eta}, \\ \sigma_{rrk} &= \mu \left[ -\frac{\lambda}{\mu} M_p^2 \xi^2 \Phi_{1k} + 2 \left( \frac{\partial^2 \Phi_{1k}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi_{2k}}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi_{2k}}{\partial \theta} + \xi \frac{\partial^2 \Phi_{3k}}{\partial r^2} i \right) \right] e^{i\xi\eta}, \\ \sigma_{r\eta k} &= \mu \left[ 2\xi \frac{\partial \Phi_{1k}}{\partial r} i + \frac{\xi}{r} \frac{\partial \Phi_{2k}}{\partial \theta} i - \xi^2 (1+m_s^2) \frac{\partial \Phi_{3k}}{\partial r} \right] e^{i\xi\eta}, \\ \sigma_{\eta\theta k} &= \mu \left[ \frac{2\xi}{r} \frac{\partial \Phi_{1k}}{\partial \theta} i - \xi \frac{\partial \Phi_{2k}}{\partial r} i - \frac{\xi^2 (1+m_s^2)}{r} \frac{\partial \Phi_{3k}}{\partial \theta} \right] e^{i\xi\eta}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta k} &= \mu \left( \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \Phi_{1k}}{\partial \theta \partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Phi_{1k}}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_{2k}}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \Phi_{2k}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_{2k}}{\partial r} + \frac{2\xi}{r} \frac{\partial^2 \Phi_{3k}}{\partial r \partial \theta} i - \frac{2\xi}{r^2} \frac{\partial \Phi_{3k}}{\partial \theta} i \right) e^{i\xi\eta}; \\ u_{x1} &= \left( \frac{\partial \Phi_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial y} + \xi \frac{\partial \Phi_{31}}{\partial x} i \right) e^{i\xi\eta}, \quad u_{y1} = \left( \frac{\partial \Phi_{11}}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial x} + \xi \frac{\partial \Phi_{31}}{\partial y} i \right) e^{i\xi\eta}, \quad u_{\eta 1} = \left( \xi \Phi_{11} i - \xi^2 m_s^2 \Phi_{31} \right) e^{i\xi\eta}; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\eta\eta 1} &= -\mu \left[ \left( 2 + \frac{\lambda}{\mu} M_p^2 \right) \xi^2 \Phi_{11} + 2m_s^2 \xi^3 \Phi_{31} i \right] e^{i\xi\eta}, \\ \sigma_{yy1} &= \mu \left[ -\frac{\lambda}{\mu} M_p^2 \xi^2 \Phi_{11} + 2 \left( \frac{\partial^2 \Phi_{11}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Phi_{21}}{\partial x \partial y} + \xi \frac{\partial^2 \Phi_{31}}{\partial y^2} i \right) \right] e^{i\xi\eta}, \\ \sigma_{xx1} &= \mu \left[ -\frac{\lambda}{\mu} M_p^2 \xi^2 \Phi_{11} + 2 \left( \frac{\partial^2 \Phi_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{21}}{\partial x \partial y} + \xi \frac{\partial^2 \Phi_{31}}{\partial x^2} i \right) \right] e^{i\xi\eta}, \\ \sigma_{x\eta 1} &= \mu \left[ 2\xi \frac{\partial \Phi_{11}}{\partial x} i + \xi \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial y} i - \xi^2 (1+m_s^2) \frac{\partial \Phi_{31}}{\partial x} \right] e^{i\xi\eta}, \\ \sigma_{y\eta 1} &= \mu \left[ 2\xi \frac{\partial \Phi_{11}}{\partial y} i - \xi \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial x} i - \xi^2 (1+m_s^2) \frac{\partial \Phi_{31}}{\partial y} \right] e^{i\xi\eta}, \\ \sigma_{xy1} &= \mu \left( 2 \frac{\partial^2 \Phi_{11}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Phi_{21}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Phi_{21}}{\partial x^2} + 2\xi \frac{\partial^2 \Phi_{31}}{\partial x \partial y} i \right) e^{i\xi\eta}. \end{aligned} \quad (15)$$

В дозвуковом случае  $M_{sk} < 1$  ( $m_{sk} > 0$ ,  $k=1,2$ ), и решения уравнений (11) можно представить в виде [1]

$$\Phi_{jk} = \Phi_{jk}^{(1)} + \Phi_{jk}^{(2)}, \quad j=1,2,3, \quad k=1,2, \quad (16)$$

где:

– для массива

$$\Phi_{j1}^{(1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} K_n(k_{j1} r) e^{in\theta}, \quad \Phi_{j1}^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} g_j(\xi, \zeta) \exp\left(iy\zeta + (x-h)\sqrt{\zeta^2 + k_{j1}^2}\right) d\zeta; \quad (17)$$

– для несущего слоя

$$\Phi_{j2}^{(1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj+3} K_n(k_{j2}r) e^{in\theta}, \quad \Phi_{j2}^{(2)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj+6} I_n(k_{j2}r) e^{in\theta}. \quad (18)$$

Здесь  $I_n(k_j r), K_n(k_j r)$  — соответственно модифицированные функции Бесселя и функции Макдональда,  $k_{j1} = |m_{j1} \xi|, k_{j2} = |m_{j2} \xi|, j = 1, 2, 3; g_j(\xi, \zeta), a_{n1}, \dots, a_{n9}$  — неизвестные функции и коэффициенты, подлежащие определению.

Как показано в [1], представление потенциалов для полупространства в форме (16) приводит к их следующим выражениям в декартовой системе координат:

$$\Phi_{j1} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{e^{-xf_j}}{2f_j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} \Phi_{nj} + g_j(\xi, \zeta) e^{(x-h)f_j} \right] e^{iy\zeta} d\zeta, \quad (19)$$

где  $f_j = \sqrt{\zeta^2 + k_{j1}^2}, \Phi_{nj} = [(\zeta + f_j)/k_{j1}]^n, j = 1, 2, 3.$

Воспользуемся с учётом (19) граничными условиями на свободной от нагрузок поверхности полупространства:

$$\text{при } x = h \quad \sigma_{xx1} = \sigma_{xy1} = \sigma_{x\eta1} = 0. \quad (20)$$

Выделяя коэффициенты при  $e^{iy\zeta}$  и приравнявая, в силу произвольности  $y$ , их нулю, получим систему трёх уравнений, из которой выражаем функции  $g_j(\xi, \zeta)$  через неизвестные коэффициенты  $a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}$ :

$$g_j(\xi, \zeta) = \frac{1}{\Delta_*} \sum_{l=1}^3 \Delta_{jl}^* e^{-hf_l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nl} \Phi_{nl}, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_* &= (2\rho_*^2 - \beta^2)^2 - 4\rho_*^2 \sqrt{\rho_*^2 - \alpha^2} \sqrt{\rho_*^2 - \beta^2}, \\ \Delta_{11}^* &= \frac{\Delta_*}{2\sqrt{\rho_*^2 - \alpha^2}} - \frac{(2\rho_*^2 - \beta^2)^2}{\sqrt{\rho_*^2 - \alpha^2}}, \quad \Delta_{12}^* = -2\zeta(2\rho_*^2 - \beta^2), \quad \Delta_{13}^* = 2\xi(2\rho_*^2 - \beta^2)\sqrt{\rho_*^2 - \beta^2}, \\ \Delta_{21}^* &= -\frac{M_{s1}^2}{m_{s1}^2} \Delta_{12}^*, \quad \Delta_{22}^* = -\frac{\Delta_{**}}{2\sqrt{\rho_*^2 - \beta^2}}, \quad \Delta_{23}^* = -4\xi\zeta \frac{M_{s1}^2}{m_{s1}^2} \sqrt{\rho_*^2 - \alpha^2} \sqrt{\rho_*^2 - \beta^2}, \\ \Delta_{31}^* &= -\frac{\Delta_{13}^*}{m_{s1}^2 \xi^2}, \quad \Delta_{32}^* = \frac{\Delta_{21}^*}{\beta^2}, \quad \Delta_{33}^* = -\frac{\Delta_{**}}{2\sqrt{\rho_*^2 - \beta^2}} + \frac{(2\rho_*^2 - \beta^2)^2}{\sqrt{\rho_*^2 - \beta^2}}, \end{aligned}$$

$$\alpha = M_{p1} \xi, \quad \beta = M_{s1} \xi, \quad \rho_*^2 = \xi^2 + \zeta^2, \quad \Delta_{**} = (2\rho_*^2 - \beta^2)^2 - 4\rho_*^2 \sqrt{\rho_*^2 - \alpha^2} \sqrt{\rho_*^2 - \beta^2}, \quad \rho_{**}^2 = \xi^2 + (2/m_{s1}^2 - 1)\zeta^2.$$

Заметим, что  $\Delta_*(\rho_*)$  — определитель Рэлея, который обращается в нуль при  $\rho_{*R}^2 = \xi^2 M_R^2$  или в двух точках  $\pm \zeta_R = \pm |\xi| \sqrt{M_R^2 - 1}$ , где  $M_R = c/c_R$  — число Маха,  $c_R$  — скорость поверхностных волн Рэлея [1], которую условимся называть рэлеевской скоростью. Из последнего следует, что  $\Delta_*(\rho_*)$  не обращается в нуль на действительной оси, если  $M_R < 1$ , или  $c < c_R$ , т.е. при дорэлеевских скоростях движения нагрузки. В этом случае потенциалы (19) можно представить в виде

$$\Phi_{j1} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{e^{-xf_j}}{2f_j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} \Phi_{nj} + e^{(x-h)f_j} \sum_{l=1}^3 \frac{\Delta_{jl}^*}{\Delta_*} e^{-hf_l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nl} \Phi_{nl} \right] e^{iy\zeta} d\zeta. \quad (22)$$

Следует отметить, что рэлеевская скорость  $c_R$  несколько ниже (на 5÷10 %) скорости волн сдвига в массиве [3].

Подставляя (22) в (14), (15), получим формулы для вычислений компонент напряженно-деформированного состояния массива в декартовых координатах при  $c < c_R$ :

$$u_{i1} = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^3 (U_{lj}^{(1)} F_{nj}^{(1)} + U_{lj}^{(2)} F_{nj}^{(2)}) e^{i(y\zeta + \xi\eta)} d\zeta, \quad (23)$$

$$\frac{\sigma_{lm1}}{\mu_1} = \int \sum_{j=1}^3 \left( S_{lmj}^{(1)} F_{nj}^{(1)} + S_{lmj}^{(2)} F_{nj}^{(2)} \right) e^{i(y\zeta + \xi\eta)} d\zeta.$$

Здесь:  $l = x, y, \eta$ ,  $m = x, y, \eta$ ;

$$\begin{aligned} F_{nj}^{(1)} &= \frac{e^{-xf_j}}{2f_j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} \Phi_{nj}, & F_{nj}^{(2)} &= e^{(x-h)f_j} \sum_{l=1}^3 \frac{\Delta_{jl}^*}{\Delta_*} e^{-hf_l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nl} \Phi_{nl}, \\ U_{x1}^{(1)} &= -U_{x1}^{(2)} = -f_1, & U_{x2}^{(1)} &= U_{x2}^{(2)} = -\zeta, & U_{x3}^{(1)} &= -U_{x3}^{(2)} = f_3 \xi, \\ U_{y1}^{(1)} &= U_{y1}^{(2)} = i\zeta, & U_{y2}^{(1)} &= -U_{y2}^{(2)} = if_2, & U_{y3}^{(1)} &= U_{y3}^{(2)} = -i\xi\zeta, \\ U_{\eta 1}^{(1)} &= U_{\eta 1}^{(2)} = i\xi, & U_{\eta 2}^{(1)} &= U_{\eta 2}^{(2)} = 0, & U_{\eta 3}^{(1)} &= U_{\eta 3}^{(2)} = -im_{s1}^2 \xi^2, \\ S_{xx1}^{(1)} &= S_{xx1}^{(2)} = n_2 + 2(f_1^2 - \xi^2 m_{p1}^2), & S_{xx2}^{(1)} &= -S_{xx2}^{(2)} = 2\zeta f_2, & S_{xx3}^{(1)} &= S_{xx3}^{(2)} = -2f_3^2 \xi, \\ S_{yy1}^{(1)} &= S_{yy1}^{(2)} = n_2 - 2(\zeta^2 + \xi^2 m_{p1}^2), & S_{yy2}^{(1)} &= -S_{yy2}^{(2)} = -2f_2 \zeta, & S_{yy3}^{(1)} &= S_{yy3}^{(2)} = 2\xi \zeta^2, \\ S_{\eta\eta 1}^{(1)} &= S_{\eta\eta 1}^{(2)} = n_2 - 2n_1, & S_{\eta\eta 2}^{(1)} &= S_{\eta\eta 2}^{(2)} = 0, & S_{\eta\eta 3}^{(1)} &= S_{\eta\eta 3}^{(2)} = 2m_{s1}^2 \xi^3, \\ S_{xy1}^{(1)} &= -S_{xy1}^{(2)} = -2f_1 \zeta i, & S_{xy2}^{(1)} &= S_{xy2}^{(2)} = -(f_2^2 + \zeta^2) i, & S_{xy3}^{(1)} &= -S_{xy3}^{(2)} = 2f_3 \xi \zeta i, \\ S_{\eta y 1}^{(1)} &= S_{\eta y 1}^{(2)} = -2\xi \zeta, & S_{\eta y 2}^{(1)} &= -S_{\eta y 2}^{(2)} = -\xi f_2, & S_{\eta y 3}^{(1)} &= S_{\eta y 3}^{(2)} = n_2 \zeta, \\ S_{x\eta 1}^{(1)} &= -S_{x\eta 1}^{(2)} = -2f_1 \xi i, & S_{x\eta 2}^{(1)} &= S_{x\eta 2}^{(2)} = -\xi \zeta i, & S_{x\eta 3}^{(1)} &= -S_{x\eta 3}^{(2)} = n_2 f_3 i, \end{aligned}$$

$n_1 = (1 + m_{p1}^2) \xi^2$ ,  $n_2 = (1 + m_{s1}^2) \xi^2$ .

Используя известное при  $x < h$  соотношение [1]:

$$\exp\left(iy\zeta + (x-h)\sqrt{\zeta^2 + k_j^2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(k_j r) e^{in\theta} \left[ \left( \zeta + \sqrt{\zeta^2 + k_j^2} \right) / k_j \right]^n e^{-h\sqrt{\zeta^2 + k_j^2}},$$

представим  $\Phi_{j1}$  (16) в цилиндрической системе координат:

$$\Phi_{j1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( a_{nj} K_n(k_{j1} r) + I_n(k_{j1} r) \int_{-\infty}^{\infty} g_j(\xi, \zeta) \Phi_{nj} e^{-hf_j} d\zeta \right) e^{in\theta}.$$

Подставляя в последнее выражение из (21)  $g_j(\xi, \zeta)$ , для  $c < c_R$  получим:

$$\Phi_{j1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( a_{nj} K_n(k_{j1} r) + b_{nj} I_n(k_{j1} r) \right) e^{in\theta}, \quad (24)$$

где  $b_{nj} = \sum_{l=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{ml} A_{nj}^{ml}$ ,  $A_{nj}^{ml} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta_{jl}^*}{\Delta_*} \Phi_{ml} \Phi_{nj} e^{-h(f_l + f_j)} d\zeta$ .

Подставляя (24) в (12), (13), получаем формулы для вычислений компонент напряженно-деформированного состояния массива в цилиндрических координатах при  $c < c_R$ :

$$u_{l1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^3 \left[ U_{lj1}^{(1)} \left( K_n(k_{j1} r) \right) a_{nj} + U_{lj1}^{(2)} \left( I_n(k_{j1} r) \right) b_{nj} \right] e^{i(\xi\eta + n\theta)}, \quad (25)$$

$$\frac{\sigma_{lm1}}{\mu_1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^3 \left[ S_{lmj1}^{(1)} \left( K_n(k_{j1} r) \right) a_{nj} + S_{lmj1}^{(2)} \left( I_n(k_{j1} r) \right) b_{nj} \right] e^{i(\xi\eta + n\theta)}.$$

Здесь  $l = r, \theta, \eta$ ,  $m = r, \theta, \eta$ .

$$\begin{aligned} U_{r11}^{(1)} &= k_{11} K_n'(k_{11} r), & U_{r21}^{(1)} &= -\frac{n}{r} K_n(k_{21} r), & U_{r31}^{(1)} &= -\xi k_{31} K_n'(k_{31} r), \\ U_{\theta 11}^{(1)} &= \frac{n}{r} K_n(k_{11} r) i, & U_{\theta 21}^{(1)} &= -k_{21} K_n'(k_{21} r) i, & U_{\theta 31}^{(1)} &= -\frac{n}{r} \xi K_n(k_{31} r) i, \\ U_{\eta 11}^{(1)} &= \xi K_n(k_{11} r) i, & U_{\eta 21}^{(1)} &= 0, & U_{\eta 31}^{(1)} &= -k_{31}^2 K_n(k_{31} r) i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{rr11}^{(1)} &= 2 \left( k_{11}^2 + \frac{n^2}{r^2} - \frac{\lambda_1 M_{p1}^2 \xi^2}{2\mu_1} \right) K_n(k_{11}r) - \frac{2k_{11}K'_n(k_{11}r)}{r}, \quad S_{rr21}^{(1)} = \frac{2n}{r^2} K_n(k_{21}r) - \frac{2k_{21}K'_n(k_{21}r)}{r}, \\
 S_{rr31}^{(1)} &= -2\xi \left( k_{31}^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) K_n(k_{31}r) + \frac{2\xi k_{31}K'_n(k_{31}r)}{r}, \quad S_{\theta\theta 11}^{(1)} = -2 \left( \frac{n^2}{r^2} + \frac{\lambda_1 M_{p1}^2 \xi^2}{2\mu_1} \right) K_n(k_{11}r) + \frac{2k_{11}K'_n(k_{11}r)}{r}, \\
 S_{\theta\theta 21}^{(1)} &= -\frac{2nK_n(k_{21}r)}{r^2} + \frac{2nk_{21}K'_n(k_{21}r)}{r}, \quad S_{\theta\theta 31}^{(1)} = \frac{2\xi n^2 K_n(k_{31}r)}{r^2} - \frac{2\xi k_{31}K'_n(k_{31}r)}{r}, \\
 S_{\eta\eta 11}^{(1)} &= -2\xi^2 \left( \frac{1 + \lambda_1 M_{p1}^2}{2\mu_1} \right) K_n(k_{11}r), \quad S_{\eta\eta 21}^{(1)} = 0, \quad S_{\eta\eta 31}^{(1)} = 2m_{31}^2 \xi^3 K_n(k_{31}r), \\
 S_{r\theta 11}^{(1)} &= \left( -\frac{2nK_n(k_{11}r)}{r^2} + \frac{2nk_{11}K'_n(k_{11}r)}{r} \right) i, \quad S_{r\theta 21}^{(1)} = \left( -\left( k_{21}^2 + \frac{2n^2}{r^2} \right) K_n(k_{21}r) + \frac{2k_{21}K'_n(k_{21}r)}{r} \right) i, \\
 S_{r\theta 31}^{(1)} &= \left( \frac{2n\xi K_n(k_{31}r)}{r^2} - \frac{2n\xi k_{31}K'_n(k_{31}r)}{r} \right) i, \\
 S_{\theta\eta 11}^{(1)} &= -\frac{2n\xi K_n(k_{11}r)}{r}, \quad S_{\theta\eta 21}^{(1)} = \xi k_{21} K'_n(k_{21}r), \quad S_{\theta\eta 31}^{(1)} = \frac{n\xi^2 (1 + m_{31}^2) K_n(k_{31}r)}{r}, \\
 S_{r\eta 11}^{(1)} &= 2\xi k_{11} K'_n(k_{11}r) i, \quad S_{r\eta 21}^{(1)} = -\frac{\xi n K_n(k_{21}r) i}{r}, \quad S_{r\eta 31}^{(1)} = -\xi^2 k_{31} (1 + m_{31}^2) K'_n(k_{31}r) i;
 \end{aligned}$$

$K'_n(k_{j1}r) = \frac{dK_n(k_{j1}r)}{d(k_{j1}r)}$ ;  $U_{lj1}^{(2)}$ ,  $S_{lmj1}^{(2)}$  получаются из  $U_{lj1}^{(1)}$ ,  $S_{lmj1}^{(1)}$  заменой  $K_n$  на  $I_n$ .

Подставляя  $\Phi_{j2}$  (16) в (12), (13), получаем формулы для вычислений компонент напряженно-деформированного состояния несущего слоя при  $c < c_R$ .

$$\begin{aligned}
 u_{l2} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^3 \left[ U_{lj2}^{(1)}(K_n(k_{j2}r)) a_{nj+3} + U_{lj2}^{(2)}(I_n(k_{j2}r)) a_{nj+6} \right] e^{i(\xi\eta+n\theta)}, \\
 \frac{\sigma_{lm2}}{\mu_2} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^3 \left[ S_{lmj2}^{(1)}(K_n(k_{j2}r)) a_{nj+3} + S_{lmj2}^{(2)}(I_n(k_{j2}r)) a_{nj+6} \right] e^{i(\xi\eta+n\theta)}.
 \end{aligned} \tag{26}$$

Здесь  $l = r, \theta, \eta$ ,  $m = r, \theta, \eta$ .

$$\begin{aligned}
 U_{r12}^{(1)} &= k_{12} K'_n(k_{12}r), \quad U_{r22}^{(1)} = -\frac{n}{r} K_n(k_{22}r), \quad U_{r32}^{(1)} = -\xi k_{32} K'_n(k_{32}r), \\
 U_{\theta 12}^{(1)} &= \frac{n}{r} K_n(k_{12}r) i, \quad U_{\theta 22}^{(1)} = -k_{22} K'_n(k_{22}r) i, \quad U_{\theta 32}^{(1)} = -\frac{n}{r} \xi K_n(k_{32}r) i, \\
 U_{\eta 12}^{(1)} &= \xi K_n(k_{12}r) i, \quad U_{\eta 22}^{(1)} = 0, \quad U_{\eta 32}^{(1)} = -k_{32}^2 K_n(k_{32}r) i, \\
 S_{rr12}^{(1)} &= 2 \left( k_{12}^2 + \frac{n^2}{r^2} - \frac{\lambda_2 M_{p2}^2 \xi^2}{2\mu_2} \right) K_n(k_{12}r) - \frac{2k_{12}K'_n(k_{12}r)}{r}, \quad S_{rr22}^{(1)} = \frac{2n}{r^2} K_n(k_{22}r) - \frac{2k_{22}K'_n(k_{22}r)}{r}, \\
 S_{rr32}^{(1)} &= -2\xi \left( k_{32}^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) K_n(k_{32}r) + \frac{2\xi k_{32}K'_n(k_{32}r)}{r}, \quad S_{\theta\theta 12}^{(1)} = -2 \left( \frac{n^2}{r^2} + \frac{\lambda_2 M_{p2}^2 \xi^2}{2\mu_2} \right) K_n(k_{12}r) + \frac{2k_{12}K'_n(k_{12}r)}{r}, \\
 S_{\theta\theta 22}^{(1)} &= -\frac{2nK_n(k_{22}r)}{r^2} + \frac{2nk_{22}K'_n(k_{22}r)}{r}, \quad S_{\theta\theta 32}^{(1)} = \frac{2\xi n^2 K_n(k_{32}r)}{r^2} - \frac{2\xi k_{32}K'_n(k_{32}r)}{r}, \\
 S_{\eta\eta 12}^{(1)} &= -2\xi^2 \left( \frac{1 + \lambda_2 M_{p2}^2}{2\mu_2} \right) K_n(k_{12}r), \quad S_{\eta\eta 22}^{(1)} = 0, \quad S_{\eta\eta 32}^{(1)} = 2m_{32}^2 \xi^3 K_n(k_{32}r), \\
 S_{r\theta 12}^{(1)} &= \left( -\frac{2nK_n(k_{12}r)}{r^2} + \frac{2nk_{12}K'_n(k_{12}r)}{r} \right) i, \quad S_{r\theta 22}^{(1)} = \left( -\left( k_{22}^2 + \frac{2n^2}{r^2} \right) K_n(k_{22}r) + \frac{2k_{22}K'_n(k_{22}r)}{r} \right) i,
 \end{aligned}$$

$$S_{r\theta 32}^{(1)} = \left( \frac{2n\xi K_n(k_{32}r)}{r^2} - \frac{2n\xi k_{32}K_n'(k_{32}r)}{r} \right) i,$$

$$S_{\theta\eta 12}^{(1)} = -\frac{2n\xi K_n(k_{12}r)}{r}, \quad S_{\theta\eta 22}^{(1)} = \xi k_{22}K_n'(k_{22}r), \quad S_{\theta\eta 32}^{(1)} = \frac{n\xi^2(1+m_{32}^2)K_n(k_{32}r)}{r},$$

$$S_{r\eta 12}^{(1)} = 2\xi k_{12}K_n'(k_{12}r)i, \quad S_{r\eta 22}^{(1)} = -\frac{\xi n K_n(k_{22}r)i}{r}, \quad S_{r\eta 32}^{(1)} = -\xi^2 k_{32}(1+m_{32}^2)K_n'(k_{32}r)i; \quad K_n'(k_{j2}r) = \frac{dK_n(k_{j2}r)}{d(k_{j2}r)};$$

$U_{lj2}^{(2)}, S_{lmj2}^{(2)}$  получаются из  $U_{lj2}^{(1)}, S_{lmj2}^{(1)}$  заменой  $K_n$  на  $I_n$ .

При действии на оболочку бегущей синусоидальной нагрузки в установившемся состоянии зависимость всех величин от  $\eta$  имеет вид (9), поэтому

$$u_{0,j}(\theta, \eta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{0nj} e^{in\theta} e^{i\xi n \eta}, \quad j = r, \theta, \eta. \quad (27)$$

Подставляя (27) в (2), для  $n$ -го члена разложения получим:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^2 u_{0m\eta} + v_{02} n \xi_0 u_{0n\theta} - 2i v_0 \xi_0 u_{0nr} &= G_0 (q_{m\eta 2} - q_{m\eta 1}), \\ v_{02} n \xi_0 u_{0m\eta} + \varepsilon_2^2 u_{0n\theta} - 2i n u_{0nr} &= G_0 (q_{n\theta 2} - q_{n\theta 1}), \\ 2i v_0 \xi_0 u_{0m\eta} + 2i n u_{0n\theta} + \varepsilon_3^2 u_{0nr} &= G_0 (q_{nr 2} - q_{nr 1}), \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^2 &= \alpha_0^2 - \varepsilon_0^2, \quad \varepsilon_2^2 = \beta_0^2 - \varepsilon_0^2, \quad \varepsilon_3^2 = \gamma_0^2 - \varepsilon_0^2, \quad \xi_0 = \xi R, \\ \alpha_0^2 &= 2\xi_0^2 + v_{01} n^2, \quad \beta_0^2 = v_{01} \xi_0^2 + 2n^2, \quad \gamma_0^2 = \chi^2 (\xi_0^2 + n^2)^2 + 2, \quad \varepsilon_0^2 = v_{01} \xi_0^2 M_{s0}^2, \\ v_{01} &= 1 - v_0, \quad v_{02} = 1 + v_0, \quad M_{s0} = c / c_{s0}, \quad c_{s0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho_0}}, \quad \chi^2 = \frac{h_0^2}{6R^2}, \quad G_0 = -\frac{v_{01} R^2}{\mu_0 h_0}; \end{aligned}$$

при  $r = R_1$ :  $q_{nj1} = (\sigma_{rj1})_n, q_{nj2} = (\sigma_{rj2})_n, j = \eta, \theta, r$ .

Разрешая (28) относительно  $u_{0m\eta}, u_{0n\theta}, u_{0nr}$ , находим:

$$u_{0m\eta} = \frac{G_0}{\delta_n} \sum_{j=1}^3 \delta_{\eta j} (q_{nj2} - q_{nj1}), \quad u_{0n\theta} = \frac{G_0}{\delta_n} \sum_{j=1}^3 \delta_{\theta j} (q_{nj2} - q_{nj1}), \quad u_{0nr} = \frac{G_0}{\delta_n} \sum_{j=1}^3 \delta_{rj} (q_{nj2} - q_{nj1}). \quad (29)$$

Здесь  $\delta_n = \delta_{|n|} = (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3)^2 - (\varepsilon_1 \xi_1)^2 - (\varepsilon_2 \xi_2)^2 - (\varepsilon_3 \xi_3)^2 + 2\xi_1 \xi_2 \xi_3$ ,

$$\delta_{\eta 1} = (\varepsilon_2 \varepsilon_3)^2 - \xi_1^2, \quad \delta_{\eta 2} = \xi_1 \xi_2 - \xi_3 \varepsilon_3^2, \quad \delta_{\eta 3} = i(\varepsilon_2^2 \xi_2 - \xi_1 \xi_3),$$

$$\delta_{\theta 1} = \delta_{\eta 2}, \quad \delta_{\theta 2} = (\varepsilon_1 \varepsilon_3)^2 - \xi_2^2, \quad \delta_{\theta 3} = i(\varepsilon_1^2 \xi_1 - \xi_2 \xi_3),$$

$$\delta_{r1} = -\delta_{\eta 3}, \quad \delta_{r2} = -\delta_{\theta 3}, \quad \delta_{r3} = (\varepsilon_1 \varepsilon_2)^2 - \xi_3^2, \quad \xi_1 = 2n, \quad \xi_2 = 2v_0 \xi_0, \quad \xi_3 = v_{02} \xi_0 n;$$

для  $q_{nj1}$  и  $q_{nj2}$  индекс  $j = 1$  соответствует индексу  $\eta, j = 2 — \theta, j = 3 — r$ .

Для определения входящих в выражения (23), (25), (26) коэффициентов  $a_{n1}, \dots, a_{n9}$  воспользуемся следующими граничными условиями.

*При скользящем контакте слоёв оболочки:*

– для скользящего контакта оболочки с массивом

$$\text{при } r = R_1 \quad u_{r1} = u_{r2}, u_{r2} = u_{0r}, \quad \sigma_{r\eta 2} = 0, \quad \sigma_{r\theta 2} = 0, \quad \sigma_{r\eta 1} = 0, \quad \sigma_{r\theta 1} = 0,$$

$$\text{при } r = R_2 \quad \sigma_{rj2} = P_j(\theta, \eta), \quad j = r, \theta, \eta, \quad (30)$$

– для жёсткого контакта оболочки с массивом

$$\text{при } r = R_1 \quad u_{r1} = u_{r2}, \quad \sigma_{r\eta 2} = 0, \quad \sigma_{r\theta 2} = 0, \quad u_{j1} = u_{0j},$$

$$\text{при } r = R_2 \quad \sigma_{rj2} = P_j(\theta, \eta), \quad j = r, \theta, \eta. \quad (31)$$

*При жёстком сопряжении слоёв оболочки:*

– для скользящего контакта оболочки с массивом

$$\text{при } r = R_1 \quad u_{r1} = u_{r2}, \quad u_{j2} = u_{0j}, \quad \sigma_{r\eta1} = 0, \quad \sigma_{r\theta1} = 0,$$

$$\text{при } r = R_2 \quad \sigma_{rj2} = P_j(\theta, \eta), \quad j = r, \theta, \eta, \tag{32}$$

– для жёсткого контакта оболочки с массивом

$$\text{при } r = R_1 \quad u_{j1} = u_{j2}, \quad u_{j1} = u_{0j}, \tag{33}$$

$$\text{при } r = R_2 \quad \sigma_{rj2} = P_j(\theta, \eta), \quad j = r, \theta, \eta.$$

Подставляя в любое из граничных условий (30)–(33) соответствующие выражения и приравнявая коэффициенты рядов при  $e^{in\theta}$ , получим бесконечную систему ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) линейных алгебраических уравнений, для решения которой рекомендуется использовать метод последовательных отражений (приближений) [4]. Согласно этому методу граничные условия можно представить в виде бесконечной системы линейных алгебраических уравнений блочно-диагонального типа с матрицами (9×9) вдоль главной диагонали:

– граничные условия (30)

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^3 \left[ U_{rj1}^{(1)}(K_n(k_{j1}R_1)) a_{nj}^{(2K)} - U_{rj2}^{(1)}(K_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+3}^{(2K)} - U_{rj2}^{(2)}(I_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+6}^{(2K)} \right] = \\ & = \begin{cases} 0 & \text{при } K = 0, \\ -\sum_{j=1}^3 U_{rj1}^{(2)}(I_n(k_{j1}R_1)) a_{nj}^{(2K-1)} & \text{при } K \neq 0, \end{cases} \\ & \sum_{j=1}^3 \left\{ \delta_{r3} S_{rrj1}^{(1)}(K_n(k_{j1}R_1)) a_{nj}^{(2K)} + \left[ \frac{\delta_n}{G_0 \mu_1} U_{rj2}^{(1)}(K_n(k_{j2}R_1)) - \tau \delta_{r3} S_{rrj2}^{(1)}(K_n(k_{j2}R_1)) \right] a_{nj+3}^{(2K)} + \right. \\ & \left. + \left[ \frac{\delta_n}{G_0 \mu_1} U_{rj2}^{(2)}(I_n(k_{j2}R_1)) - \tau \delta_{r3} S_{rrj2}^{(2)}(I_n(k_{j2}R_1)) \right] a_{nj+6}^{(2K)} \right\} = \begin{cases} 0 & \text{при } K = 0, \\ -\sum_{j=1}^3 \left[ \delta_{r3} S_{rrj1}^{(2)}(I_n(k_{j1}R_1)) \right] a_{nj}^{(2K-1)} & \text{при } K \neq 0, \end{cases} \\ & \sum_{j=1}^3 \left[ S_{r\eta j2}^{(1)}(K_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+3}^{(2K)} + S_{r\eta j2}^{(2)}(I_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+6}^{(2K)} \right] = 0, \\ & \sum_{j=1}^3 \left[ S_{r\theta j2}^{(1)}(K_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+3}^{(2K)} + S_{r\theta j2}^{(2)}(I_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+6}^{(2K)} \right] = 0, \\ & \sum_{j=1}^3 S_{r\eta j1}^{(1)}(K_n(k_{j1}R_1)) a_{nj}^{(2K)} = \begin{cases} 0 & \text{при } K = 0, \\ -\sum_{j=1}^3 S_{r\eta j1}^{(2)}(I_n(k_{j1}R_1)) a_{nj}^{(2K-1)} & \text{при } K \neq 0, \end{cases} \\ & \sum_{j=1}^3 S_{r\theta j1}^{(1)}(K_n(k_{j1}R_1)) a_{nj}^{(2K)} = \begin{cases} 0 & \text{при } K = 0, \\ -\sum_{j=1}^3 S_{r\theta j1}^{(2)}(I_n(k_{j1}R_1)) a_{nj}^{(2K-1)} & \text{при } K \neq 0, \end{cases} \\ & \sum_{j=1}^3 \left[ \tau S_{rmj2}^{(1)}(K_n(k_{j2}R_2)) a_{nj+3}^{(2K)} + \tau S_{rmj2}^{(2)}(I_n(k_{j2}R_2)) a_{nj+6}^{(2K)} \right] = \begin{cases} P_{nm}/\mu_1 & \text{при } K = 0, \\ 0 & \text{при } K \neq 0; \end{cases} \end{aligned}$$

– граничные условия (31)

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^3 \left[ U_{rj1}^{(1)}(K_n(k_{j1}R_1)) a_{nj}^{(2K)} - U_{rj2}^{(1)}(K_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+3}^{(2K)} - U_{rj2}^{(2)}(I_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+6}^{(2K)} \right] = \\ & = \begin{cases} 0 & \text{при } K = 0, \\ -\sum_{j=1}^3 U_{rj1}^{(2)}(I_n(k_{j1}R_1)) a_{nj}^{(2K-1)} & \text{при } K \neq 0, \end{cases} \\ & \sum_{j=1}^3 \left[ S_{r\eta j2}^{(1)}(K_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+3}^{(2K)} + S_{r\eta j2}^{(2)}(I_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+6}^{(2K)} \right] = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^3 \left[ S_{r\theta j 2}^{(1)}(K_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+3}^{(2K)} + S_{r\theta j 2}^{(2)}(I_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+6}^{(2K)} \right] = 0, \\
 & \sum_{j=1}^3 \left\{ \left[ \frac{\delta_n}{G_0 \mu_1} U_{mj1}^{(1)}(K_n(k_{j1}R_1)) + \sum_{i=1}^3 \delta_{mi} S_{rij1}^{(1)}(K_n(k_{j1}R_1)) \right] a_{nj}^{(2K)} - \right. \\
 & \quad \left. - \tau \delta_{m3} S_{rrj2}^{(1)}(K_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+3}^{(2K)} - \tau \delta_{m3} S_{rrj2}^{(2)}(I_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+6}^{(2K)} \right\} = \\
 & = \begin{cases} 0 & \text{при } K = 0, \\ -\sum_{j=1}^3 \left[ \frac{\delta_n}{G_0 \mu_1} U_{mj1}^{(2)}(I_n(k_{j1}R_1)) + \sum_{i=1}^3 \delta_{mi} S_{rij1}^{(2)}(I_n(k_{j1}R_1)) \right] a_{nj}^{(2K-1)} & \text{при } K \neq 0, \end{cases} \\
 & \sum_{j=1}^3 \left[ \tau S_{rmj2}^{(1)}(K_n(k_{j2}R_2)) a_{nj+3}^{(2K)} + \tau S_{rmj2}^{(2)}(I_n(k_{j2}R_2)) a_{nj+6}^{(2K)} \right] = \begin{cases} P_{nm} / \mu_1 & \text{при } K = 0, \\ 0 & \text{при } K \neq 0; \end{cases} \\
 & \text{– граничные условия (32)} \\
 & \sum_{j=1}^3 \left[ U_{rj1}^{(1)}(K_n(k_{j1}R_1)) a_{nj}^{(2K)} - U_{rj2}^{(1)}(K_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+3}^{(2K)} - U_{rj2}^{(2)}(I_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+6}^{(2K)} \right] = \\
 & = \begin{cases} 0 & \text{при } K = 0, \\ -\sum_{j=1}^3 U_{rj1}^{(2)}(I_n(k_{j1}R_1)) a_{nj}^{(2K-1)} & \text{при } K \neq 0, \end{cases} \\
 & \sum_{j=1}^3 \left\{ \delta_{m3} S_{rrj1}^{(1)}(K_n(k_{j1}R_1)) a_{nj}^{(2K)} + \left[ \frac{\delta_n}{G_0 \mu_1} U_{mj2}^{(1)}(K_n(k_{j2}R_1)) - \tau \sum_{i=1}^3 \delta_{mi} S_{rij2}^{(1)}(K_n(k_{j2}R_1)) \right] a_{nj+3}^{(2K)} + \right. \\
 & \quad \left. + \left[ \frac{\delta_n}{G_0 \mu_1} U_{mj2}^{(2)}(I_n(k_{j2}R_1)) - \tau \sum_{i=1}^3 \delta_{mi} S_{rij2}^{(2)}(I_n(k_{j2}R_1)) \right] a_{nj+6}^{(2K)} \right\} = \begin{cases} 0 & \text{при } K = 0, \\ -\sum_{j=1}^3 \left[ \delta_{m3} S_{rrj1}^{(2)}(I_n(k_{j1}R_1)) \right] a_{nj}^{(2K-1)} & \text{при } K \neq 0, \end{cases} \\
 & \sum_{j=1}^3 S_{rvj1}^{(1)}(K_n(k_{j1}R_1)) a_{nj}^{(2K)} = \begin{cases} 0 & \text{при } K = 0, \\ -\sum_{j=1}^3 S_{rvj1}^{(2)}(I_n(k_{j1}R_1)) a_{nj}^{(2K-1)} & \text{при } K \neq 0, \end{cases} \\
 & \sum_{j=1}^3 S_{r\theta j1}^{(1)}(K_n(k_{j1}R_1)) a_{nj}^{(2K)} = \begin{cases} 0 & \text{при } K = 0, \\ -\sum_{j=1}^3 S_{r\theta j1}^{(2)}(I_n(k_{j1}R_1)) a_{nj}^{(2K-1)} & \text{при } K \neq 0, \end{cases} \\
 & \sum_{j=1}^3 \left[ \tau S_{rmj2}^{(1)}(K_n(k_{j2}R_2)) a_{nj+3}^{(2K)} + \tau S_{rmj2}^{(2)}(I_n(k_{j2}R_2)) a_{nj+6}^{(2K)} \right] = \begin{cases} P_{nm} / \mu_1 & \text{при } K = 0, \\ 0 & \text{при } K \neq 0; \end{cases} \\
 & \text{– граничные условия (33)} \\
 & \sum_{j=1}^3 \left[ U_{mj1}^{(1)}(K_n(k_{j1}R_1)) a_{nj}^{(2K)} - T_{mj2}^{(1)}(K_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+3}^{(2K)} - U_{mj2}^{(2)}(I_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+6}^{(2K)} \right] = \\
 & = \begin{cases} 0 & \text{при } K = 0, \\ -\sum_{j=1}^3 U_{mj1}^{(2)}(I_n(k_{j1}R_1)) a_{nj}^{(2K-1)} & \text{при } K \neq 0, \end{cases} \\
 & \sum_{j=1}^3 \left\{ \left[ \frac{\delta_n}{G_0 \mu_1} U_{mj1}^{(1)}(K_n(k_{j1}R_1)) + \sum_{i=1}^3 \delta_{mi} S_{rij1}^{(1)}(K_n(k_{j1}R_1)) \right] a_{nj}^{(2K)} - \right. \\
 & \quad \left. - \tau \sum_{i=1}^3 \delta_{mi} S_{rij2}^{(1)}(K_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+3}^{(2K)} - \tau \sum_{i=1}^3 \delta_{mi} S_{rij2}^{(2)}(I_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+6}^{(2K)} \right\} =
 \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{при } K = 0, \\ -\sum_{j=1}^3 \left[ \frac{\delta_n}{G_0 \mu_1} U_{mj1}^{(2)}(I_n(k_{j1}R_1)) + \sum_{i=1}^3 \delta_{mi} S_{rij1}^{(2)}(I_n(k_{j1}R_1)) \right] a_{nj}^{(2K-1)} & \text{при } K \neq 0, \\ \sum_{j=1}^3 \left[ \tau S_{rmj2}^{(1)}(K_n(k_{j2}R_2)) a_{nj+3}^{(2K)} + \tau S_{rmj2}^{(2)}(I_n(k_{j2}R_2)) a_{nj+6}^{(2K)} \right] = \begin{cases} P_{nm}/\mu_1 & \text{при } K = 0, \\ 0 & \text{при } K \neq 0. \end{cases} \end{cases}$$

Здесь  $m = r, \theta, \eta$ ,  $\tau = \mu_2/\mu_1$ ; для  $S_{rij}$   $i = 1 = \eta$ ,  $i = 2 = \theta$ ,  $i = 3 = r$ .

Если определитель, соответствующий определённым граничным условиям системы уравнений, не равен нулю, окончательно получим:  $a_{nJ} = a_{nJ}^{(0)} + a_{nJ}^{(2)} + a_{nJ}^{(4)} + \dots$ ,  $J = 1, 2, \dots, 9$ .

После определения коэффициентов  $a_{nJ}$  ( $J = 1, 2, \dots, 9$ ) компоненты напряжённо-деформированного состояния массива и несущего слоя можно вычислить по формулам (23), (25), (26).

В случае произвольной периодической по  $\eta$  нагрузки, разлагая ее в ряд Фурье, для каждой составляющей ряда получим рассмотренную выше задачу.

Решение аналогичной задачи для упругого пространства можно получить из данного решения, если исключить из (16)  $\Phi_{j1}^{(2)}$  и рассматривать граничные условия только при  $K = 0$ .

#### References

1. *Erzhanov Zh.S., Aitaliev Sh.M., Alekseyeva L.A.* Dynamics of tunnels and underground pipelines. — Alma-Ata: Science, 1989. — 240 p.
2. *Alekseyeva L.A., Ukrainets V.N.* Problem of permanent traffic load in elastically supported cylindrical cavity in elastic half-space // International Applied Mechanics. — 2009. — № 9. — P. 75–85.
3. *Timoshenko S.P., Goodier J.N.* Theory of Elasticity. — M.: Science, 1979. — 560 p.
4. *Ukrainets V.N.* Dynamics of shallow tunnels and underground pipelines under moving loads. — Pavlodar: The scientific publishing center of PSU named after S.Toraigyrov, 2006. — 123 p.