НОВЫЕ КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА W_q^{α} С ДОМИНИРУЮЩЕЙ СМЕШАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Басаров С. Ж., Тлеуханова Н.Т.

Евразийский национальный университет имени Л. Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан

E-mail: bassarov.serzhan98@gmail.com, tleukhanova@rambler.ru

В данной работе рассматривается задача нахождения сетки $M_k, k = 1, \dots, N$и коэффициентов c_k таких, что погрешность

$$\inf_{M,c} \sup_{||f||_F=1} \left| I(f) - \sum_{k=1}^{N} c_k f(M_k) \right| (1)$$

была близка к оптимальной погрешности.

В работах Е. Д. Нурсултанова и Н. Т. Тлеухановой [1] используя сетки Смоляка была дана кубатурная формула в явном виде.

В данной работе построена кубатурная формула для периодических функций из пространства с доминирующей смешанной производной (пространство Соболева $W_q^{\alpha}[0,1]^n$):

$$F_m(f;p) = \frac{1}{p^m} \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_n=m \\ k_j\geq 0}} \sum_{r_1=0}^{p^{k_1-1}} \cdots \sum_{r_n=0}^{p^{k_n-1}} (1-p)^{\sum_{j=1}^{n-1} sign k_j} \times$$

$$\times f\left(\frac{r_1}{p^{k_1}}, \cdots, \frac{r_n}{p^{k_n}}\right) \frac{1}{(p-1)^{n-1}} \prod_{j=1}^{n-1} \left[\sum_{l=1}^{p-1} e^{2\pi i \frac{l r_j}{p}} \right], (2)$$

где p—простое число и $m \in N$.

При p=2, то формула (2) совпадает с кубатурной формулой, полученной в [1].

Пусть $1 < q < \infty$, $\alpha > 0$, f—1-периодическая функция из $L_q[0,1]^n$ с рядом Фурье $\sum_{k\in Z^n} a_k e^{2\pi i k x}$, где $kx = \sum_{j=1}^{n} k_j x_j$.

Будем говорить, что $f \in W_q^{\alpha}[0,1]^n (\alpha = (\alpha, \dots, \alpha))$, если найдется $f^{\alpha} \in L_q[0,1]^n$, ряд Фурье которой совпадает с рядом $\sum_{k\in Z^n} \overline{k}^{\alpha} a_k e^{2\pi i k x}$, где $\overline{k}^{\alpha} = \prod_{j=1}^{n} \overline{k}_j^{\alpha}$, $\overline{k}_j = max\{1, \vee k_j \vee\}$, $j = 1, \dots, n$.

$$\|f\|_{W_q^{\alpha}[0,1]^n} = \|f^{\alpha}\|_{L_q[0,1]^n} < \infty. \quad (3)$$

Пусть N—натуральное число. Множества вида

$$\Gamma(N) = \left\{ k = (k_1, \dots, k_n) : \prod_{j=1}^{n} \overline{k}_j \leq N \right\} \quad (4)$$

называют гиперболическим крестом. А элементы этого множества называют крестом.

Функцию

$$T_N(x) = \sum_{k\in\Gamma(N)} a_k e^{2\pi i k x}$$

называют тригонометрическим полиномом со спектром из гиперболического креста.

Следующая теорема показывает, что кубатурная формула (2) точна для полиномов со спектром из гиперболического креста.

Теорема 1. Пусть тригонометрический полином со спектром из гиперболического креста (4). Тогда

$$\int_{[0,1]^n} T_{p^m}(x)dx = F_m(T_{p^m};p).$$

Теорема 2. Пусть $n, m \in N$.

Если $1 < q \leq \infty$, $\alpha > \frac{1}{q} = max\left\{\frac{1}{q}, \frac{1}{2}\right\}$, $f \in W_q^\alpha$, то

$$_{||f||_{W_q^\alpha}=1} |I(f) - F_m(f;p)| \leq c\frac{m^{\frac{n-1}{q}}}{p^{\alpha m}}.$$

Исследование поддержаны Министерством образования и науки РК грант AP14870758.

Список использованной литературы

1. Нурсултанов Е. Д., Тлеуханова Н. Т., О восстановлении мультипликативных преобразований функций из анизотропных пространств, Сиб. матем. журн., 55:3 (2014), 592–609.
2. Нурсултанов Е. Д., Тлеуханова Н. Т., Квадратурные формулы для классов функций малой гладкости, Матем. сб., 194:10 (2003), 133–160.

ВЗАИМНЫЕ НАКРЫВАНИЯ КОНУСОВ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ И ОЦЕНКИ ИХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МАЖОРАНТ

Бахтигареева Э. Г.[1], Гольдман М. Л.[1], Каршыгина Г. Ж.[2]
[1]*Математический институт им. Академика С.М. Никольского РУДН, Москва, Россия,*
[2]*Карагандински университет им. Академика Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан*
E-mail: seulydia@yandex.ru, karshygina84@mail.ru

В статье изучаются вопросы взаимного накрывания и эквивалентности конусов монотонных функций и соответствующие оценки их мажорант. Рассмотрены два вида накрываний: поточечные и интегральные. Им отвечают поточечные и интегральные оценки мажорант на этих конусах. Мы существенно опираемся на результаты наших работ [1-3].

Через $L_0^+(0,T)$ обозначим множество всех неотрицательных измеримых по Лебегу функций на $(0,T)$, где $T \in (0,\infty]$. Пусть K - конус в $L_0^+(0,T)$, снабженный функционалом $\rho_K : K \to [0,\infty)$; $h \in K,\ \alpha \in [0,\infty) \Rightarrow \alpha h \in K,\ \rho_K(\alpha h) = \alpha \rho_K(h)$;
$\rho_K(h) = 0 \Rightarrow h = 0$ почти всюду на $(0,T)$.

На множестве $L_0^+(0,T)$ рассмотрим два отношения порядка.

Поточечное отношение: $f \leq g$ означает, что $f(t) \leq g(t)$ для почти всех $t \in (0,T)$.

Пусть теперь $q \in (0,\infty)$, $\mu -$ неотрицательная борелевская мера на $(0,T)$, такая что

$$0 < M_q(t) := \left(\int_{(0,t]} d\mu\right)^{1/q} < \infty,\ t \in (0,T).$$

Интегральное отношение порядка: $f \underset{q}{\prec} g$ означает