References

1 *Darkov A.V., Shaposhnikov N.N.* The building mechanics. — Moscow: The higher school, 1976. — 600 p.

2 *Snitko N.K.* The building mechanics. — Moscow: The higher school, 1980. — 488 p.

3 *Butenko Yu.I., Zasyadko N.A., Kan S.N., Pustovoytov V.P.* The building mechanics of rod systems and covers. — Kiev: The higher school, 1990. — 488 p.

4 *Makarova E.* Engineering calculations in Mathcad. — Sankt-Petersburg: Piter, 2005.

А.Қ.Бейсебаев, Е.К.Богатова, Т.В.Заикина

Шектік жағдайы бойынша рамалық конструкцияны беріктілікке есептеу

Мақалада рамалық конструкцияларды шектік күйі бойынша сыртқы жүктеме қарқындылығын біртіндеп көбейтуге негізделген есептеу алгоритмі көрсетілген. Иілімді топсалардың пайда болу реті мен сәйкес жүктеме анықталды. Статикалық анықталмайтын жүйелерді күш әдісімен есептеуді автоматтандыру үшін матрицалық формадағы алгоритм қолданылды.

A.K.Beysebayev, E.K.Bogatova, T.V.Zaikina

Strengthening calculation of the frame design for the limiting condition

In this work the algorithm of calculation of frame structures to limit state, based on the gradual increase in the intensity of the external load is stated. The order of occurrence of plastic hinges and the corresponding load are described. To automate the analysis of statically indeterminate systems by force algorithm is used in the matrix form.

УДК 517.95

М.Т.Дженалиев[1], К.Б.Иманбердиев[2], К.А.Айменова[2]

[1]Институт математики и математического моделирования КН МОН РК,
[2]Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы (E-mail: muvasharkhan@gmail.com)

Оптимизационный метод решения некорректной задачи для бигармонического уравнения

В ограниченной двумерной прямоугольной области рассмотрена граничная задача для бигармонического уравнения. Изучаемая некорректная граничная задача сведена к задаче оптимального управления. В терминах сопряженной граничной задачи установлены условия оптимальности. Найден критерий сильной разрешимости некорректной граничной задачи.

Ключевые слова: некорректная задача, бигармоническое уравнение, методы оптимального управления, вариационное неравенство, сопряженная граничная задача.

Введение. В последнее время среди специалистов по уравнениям математической физики значительно возрос интерес к задачам, не являющимся корректными, по Ж. Адамару [1]. Задачи такого рода всегда привлекали внимание исследователей. Прежде всего, это связано не только с их важностью в теоретическом плане, но также и с тем, что с ними приходится сталкиваться во многих прикладных задачах из различных областей науки и техники. В связи с некорректными задачами можно отметить классические работы Ж. Адамара [1], А.Н. Тихонова [2], М.М. Лаврентьева [3] и многих других, обративших внимание исследователей на некорректные задачи и внесших существенный вклад в развитие этого важного направления математики.

Актуальность темы обусловлена, с одной стороны, важностью практического приложения теории некорректных задач при решении различных проблем науки и техники, и с другой — необходимостью построения новых методов решения этих задач.

Некорректные задачи для уравнения Лапласа рассматривались многими авторами. В данной работе изучается некорректная задача для бигармонического уравнения в двумерной прямоугольной области.

1. Постановка задачи. В данной работе изучается некорректная задача для бигармонического уравнения в двумерной прямоугольной области.

В области $\Omega = \{x, y \mid 0 < x < 2\pi,\ 0 < y < 1\}$ рассматривается следующая граничная задача:

$$\Delta^2 u = f(x, y),\ \{x \in (0, 2\pi),\ y \in (0,1)\} = \Omega; \tag{1}$$

$$u^{(j)}(0, y) = u^{(j)}(2\pi, y),\ \ j = \overline{0,3}; \tag{2}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_y(x,0) = \varphi_1(x), \quad u_{yy}(x,0) = 0, \quad u_{yy}(x,1) = 0, \tag{3}$$

с дополнительным условием $u(x,1) \in U_g$ — выпуклое замкнутое множество из $L_2(0, 2\pi)$. (4)

Предполагается, что данные в задаче (1)–(3) удовлетворяют следующим условиям:

$$f \in L_2(\Omega);\ \varphi_1 \in L_2(0, 2\pi). \tag{5}$$

В книге R. Lattes, J.-L. Lions [4] указывается, что задача (1)–(3) является некорректно поставленной в пространстве $L_2(\Omega)$ (по этому поводу см. также [5; 253–268]).

Отметим, что критерий корректности однородной смешанной задачи Коши для уравнения Пуассона в прямоугольной области был установлен в работе Т.Ш.Кальменова и У.А.Искаковой [6]. В ней критерий корректности был получен в терминах собственных значений и коэффициентов разложения правой части уравнения по полной ортонормированной системе собственных функций некоторого семейства обобщенных спектральных задач с наличием оператора отклонения-инвертирования по одной из двух независимых переменных. В работе [7] рассматривается некорректная задача для уравнения теплопроводности. Общий метод регуляризации построения приближенного решения некорректных задач математической физики был предложен А.Н.Тихоновым [2]. В работе R. Lattes, J.-L. Lions [4] для регуляризации некорректно поставленных краевых задач предлагается метод квазиобращения путем замены исходного уравнения семейством вспомогательных (имеющих более высокий дифференциальный порядок) с малым параметром, для каждого из которых решается корректная граничная задача. Особенности и вопросы регуляризации задач Коши для абстрактных дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами изучают I.V.Melnikova и U.A.Anufrieva [8], где на основе применения методов полугрупп ими получены алгоритмы построения точных и регуляризованных решений.

В данной работе для решения некорректной задачи мы применяем методы оптимального управления.

2. Задача оптимизации. Для решения задачи (1)–(4) сформулируем в соответствие к ней следующую оптимизационную задачу:

$$\Delta^2 u = f(x, y); \tag{6}$$

$$u^{(j)}(0, y) = u^{(j)}(2\pi, y),\ \ j = \overline{0,3}; \tag{7}$$

$$u(x,0) = 0,\ u(x,1) = \psi(x),\ u_{yy}(x,0) = 0,\ u_{yy}(x,1) = 0, \tag{8}$$

с функционалом оптимальности

$$J(\psi) = \int_0^{2\pi} | u_y(x,0) - \varphi_1(x) |^2 \, dx \to \min_{\psi \in U_g}. \tag{9}$$

Заметим, что в оптимизационной задаче (6)–(9) функция $\psi(x)$ играет роль функции управления, подчиненной ограничению принадлежности заданному выпуклому замкнутому множеству $U_g \subset L_2(0, 2\pi)$. Кроме того, из теории эллиптических уравнений известно, что граничная задача (6)–(8) поставлена корректно, т.е. однозначно разрешима для любых заданных функций управления $\psi \in U_g$.

Как известно, из теории оптимального управления задача оптимизации (6)–(9) также является некорректной. Для изучения поставленной задачи будем применять стабилизатор Тихонова.

3. Регуляризация задачи оптимизации. Эффективным инструментом решения некорректной задачи является метод регуляризации. В нашем случае функционал

$$\alpha\int_0^{2\pi} |\psi(x)|^2\, dx, \ \ (\alpha > 0)$$

будет служить стабилизатором.

Рассмотрим задачу минимизации функционала:

$$J_\alpha(\psi) = \int_0^{2\pi} |u_y(x,0) - \varphi_1(x)|^2\, dx + \alpha\int_0^{2\pi} |\psi(x)|^2\, dx \to \min_{\psi\in U_g}. \qquad (10)$$

Таким образом, мы получили регуляризованную оптимизационную задачу (6)–(8), (10). Она будет корректной задачей оптимизации. Поэтому для каждого значения $\alpha > 0$ эта задача имеет единственное оптимальное управление, доставляющее минимальное значение минимизируемому функционалу (10). Однако не исключается тот факт, что минимальное значение функционала (10) может быть строго больше нуля.

Для задачи оптимизации (6)–(8), (10) установим условия оптимальности.

Определение 1. Элемент $\overline{\psi} \in L_2(0,2\pi)$, *удовлетворяющий условию*

$$J_\alpha(\overline{\psi}) = \inf_{\psi\in U_g} J_\alpha(\psi),$$

называется оптимальным управлением.

Введем следующие обозначения:

$u(x,y;\psi)$ есть решение задачи (6)–(8), соответствующее заданному управлению $\psi(x)\in U_g$;

$u(x,y;0)$ — соответствует решению задачи (6)–(8) при $\psi(x)\equiv 0$;

$$\pi(\psi_1,\psi_2) = \int_0^{2\pi} [u_y(x,0;\psi_1) - u_y(x,0;0)]\cdot\overline{[u_y(x,0;\psi_2) - u_y(x,0;0)]}dx + \alpha\cdot\int_0^{2\pi} \psi_1(x)\overline{\psi_2(x)}dx;$$

$$L(\psi_1) = \int_0^{2\pi} [\varphi_1(x) - u_y(x,0;0)]\cdot\overline{[u_y(x,0;\psi_1) - u_y(x,0;0)]}dx,$$

здесь $\pi(\psi_1,\psi_2)$ — билинейный непрерывный функционал на U_g, а $L(\psi_1)$ — линейный непрерывный функционал на допустимом множестве управлений U_g, так как ниже в п. 4 будет показано, что решение $u(x,y;\psi)$ задачи (6)–(8) не только непрерывно, но и является непрерывно дифференцируемым по управлению ψ.

Используя эти обозначения, функционал (10) можно переписать в виде:

$$J_\alpha(\psi) = \pi(\psi,\psi) - 2L(\psi) + \int_0^{2\pi} |u_y(x,0;0) - \varphi_1(x)|^2\, dx\,.$$

4. Существование решения регуляризованной задачи и вариационное неравенство. Справедлива следующая теорема [9].

Теорема 1. Так как $\pi(\psi,\psi)$ — *билинейный непрерывный симметричный функционал на* U_g *и удовлетворяет условию*

$$\pi(\psi,\psi) \geq \|\psi\|^2,\ (c = const > 0), \qquad (11)$$

то для задачи (6)–(8), (10) найдется такой элемент $\overline{\psi}\in U_g$:

$$J(\overline{\psi}) = \inf_{\psi\in U_g} J(\psi),$$

и этот элемент будет единственным.

Неравенство (11) действительно имеет место, так как

$$\pi(\psi,\psi) = \int_0^{2\pi} [u_y(x,0;\psi) - u_y(x,0;0)]^2\, dx + \alpha\cdot\int_0^{2\pi} \psi^2(x)dx.$$

Решение оптимизационной задачи (6)–(8), (10) обозначим через

$$\overline{\psi}(x) = \arg\min_{\psi\in U_g} J_\alpha(\psi).$$

Далее согласно теории строго выпуклых задач оптимизации справедлив следующий критерий оптимальности, формулируемый в терминах производной по направлению.

Утверждение 1 (вариационное неравенство). Функция $\overline{\psi}(x)\in U_g$ *является функцией оптимального управления, тогда и только тогда, когда выполняется следующее неравенство:*

$$\left\langle J_{\alpha\psi}(\overline{\psi}), \psi-\overline{\psi}\right\rangle \geq 0,\ \ \forall\psi\in U_g\subset L_2(0,2\pi),$$

т.е. выполняется

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}[u_y(x,0;\psi)-\varphi_1]\cdot\overline{u_{y\psi}(x,0;\overline{\psi})\cdot[\psi(x)-\overline{\psi}(x)]}dx+\\&+\alpha\cdot\int_0^{2\pi}\overline{\psi}(x)\cdot\overline{[\psi(x)-\overline{\psi}(x)]}dx\geq 0,\ \ \forall\ \psi\in U_g.\end{aligned}\tag{12}$$

Теперь проведем необходимые действия для дальнейшего преобразования вариационного неравенства (12).

Для этого граничную задачу (6)–(8) запишем в операторном виде:

$$Au=F\overset{\Delta}{=}\{f,\psi\}.$$

Так как граничная задача (6)–(8) для любых допустимых управлений однозначно разрешима, то ее решению $u(x,y;\psi)$, используя ее операторную запись, можно придать следующий вид:

$$u(x,y;\psi)=A^{-1}F=A_1^{-1}f+A_2^{-1}\psi.$$

Далее берем производную от этого решения по направлению

$$u_\psi(x,0;\overline{\psi})\cdot[\psi-\overline{\psi}]=A^{-1}(\psi-\overline{\psi})=A_1^{-1}f+A_2^{-1}\psi-[A_1^{-1}f+A_2^{-1}\psi]=u_\psi(x,y;\psi)-u_\psi(x,y;\overline{\psi}),$$

или

$$u_\psi(x,0;\overline{\psi})\cdot[\psi-\overline{\psi}]=u_\psi(x,y;\psi)-u_\psi(x,y;\overline{\psi}).$$

Таким образом, неравенство (12) принимает вид

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}[u_y(x,0;\psi)-\varphi_1]\cdot\overline{[u_y(x,0;\psi)-u_y(x,0;\overline{\psi})]}dx+\\&+\alpha\cdot\int_0^{2\pi}\overline{\psi}(x)\cdot\overline{[\psi(x)-\overline{\psi}(x)]}dx\geq 0,\ \ \forall\ \psi\in U_g.\end{aligned}\tag{13}$$

5. Сопряженная граничная задача. Для дальнейшего изучения регуляризованной оптимизационной задачи (6)–(8), (10) введем сопряженную граничную задачу:

$$\begin{cases}\Delta^2 w=0;\\ w^{(j)}(0,y)=w^{(j)}(2\pi,y),\quad j=\overline{0,3};\\ w(x,0)=0,\ \ w(x,1)=0;\\ w_{yy}(x,0)=u_y(x,0;\overline{\psi})-\varphi_1,\ \ w_{yy}(x,1)=0.\end{cases}\tag{14}$$

Для ее формального вывода рассмотрим следующее выражение:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\Delta^2\tilde{u}(x,y)\overline{w(x,y)}dydx=0,$$

где $\tilde{u}(x,y)=u(x,y;\psi)-u(x,y;\overline{\psi})$ и $\Delta^2\tilde{u}(x,y)=0$.

Преобразуя это выражение, находим:

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}\int_0^1\Delta^2\tilde{u}(x,y)\cdot\overline{w(x,y)}dydx=-2\int_0^{2\pi}[\psi(x)-\overline{\psi}(x)]\cdot\overline{w_{xxy}(x,1)}dx-\\&-\int_0^{2\pi}\tilde{u}_y(x,0)\cdot\overline{w_{yy}(x,0)}dx-\int_0^{2\pi}[\psi(x)-\overline{\psi}(x)]\cdot\overline{w_{yyy}(x,1)}dx=0.\end{aligned}\tag{15}$$

Таким образом, отсюда мы получаем искомую сопряженную граничную задачу (14).

6. Условия оптимальности. Используя равенство $w_{yy}(x,0)=u_y(x,0)-\varphi_1$, перепишем выражение (15) в виде:

$$-2\int_0^{2\pi}[\psi(x)-\overline{\psi(x)}]\cdot\overline{w_{xxy}(x,1)}dx-$$
$$-\int_0^{2\pi}\tilde{u}_y(x,0)\cdot\overline{[u_y(x,0;\overline{\psi})-\varphi_1]}dx-\int_0^{2\pi}[\psi(x)-\overline{\psi(x)}]\cdot\overline{w_{yyy}(x,1)}dx=0. \tag{16}$$

А из соотношений (16) и (13) придем к неравенству:

$$\int_0^{2\pi}[-2w_{xxy}(x,1)-w_{yyy}(x,1)+\alpha\overline{\psi}(x)]\cdot\overline{[\psi(x)-\overline{\psi}(x)]}dx\ge 0,\ \forall\psi\in U_g. \tag{17}$$

Таким образом, на основе утверждения 1 мы установили условия оптимальности, которые можно сформулировать в виде следующего утверждения:

Утверждение 2. Чтобы элемент $\overline{\psi}(x)$ был оптимальным решением в задаче (6)–(8) и (10), необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял граничным задачам (6)–(8), (14) и вариационному неравенству (17).

7. Метод разделения переменных для условия оптимальности. Для разрешения условий оптимальности (6)–(8), (14}) и (17) используем метод разделения переменных. Будем искать решения граничных задач (6)–(8) и (14) в виде:

$$u(x,y)=\sum_{k\in Z}u_k(y)e^{ikx},\ w(x,y)=\sum_{k\in Z}w_k(y)e^{ikx}, \tag{18}$$

где

$$e^{ikx},\ \lambda_k=k^4,\ k\in Z=\{0,\pm1,\pm2,...\}, \tag{19}$$

системы ортонормированных собственных функций и собственных значений для спектральной задачи:

$$X_k^{IV}(x)=\lambda_k X_k(x),\ X_k^{(j)}(0)=X_k^{(j)}(2\pi),\ j=\overline{0,3}.$$

Из системы (6)–(8), (14) и (17) на основе представлений их решений (18) соответственно получаем:

$$\begin{cases}u_k^{iv}(y)-2k^2u_k''(y)+k^4u_k(y)=f_k(y),\ \ k=1,2,...;\\ u_k(0)=0;\ \ u_k(1)=\psi_k;\ \ u_k''(0)=0;\ u_k''(1)=0;\end{cases} \tag{20}$$

$$\begin{cases}w_k^{iv}(y)-2k^2w_k''(y)+k^4w_k(y)=0,\ \ k=1,2,...;\\ w_k(0)=0;\ \ w_k(1)=0;\ \ w_k''(0)=u_k(0)-\varphi_{1k};\ w_k''(1)=0;\end{cases} \tag{21}$$

$$[2k^2w_k'(1)-w_k'''(1)+\alpha\overline{\psi}_k]\overline{[\psi_k-\overline{\psi}_k]}\ge 0, \tag{22}$$

$\forall\psi_k,\ k\in Z,$ для которых $\psi\in U_g$. Здесь $f_k(y),\ \psi_k,\ \varphi_{1k}\ k=1,2,...$ — коэффициенты Фурье функций $f(x,y),\ \psi(x),\ \varphi_1(x)$ по системе (19).

Итак, нами установлен следующий критерий оптимальности для задачи оптимизации (6)–(8) и (10).

Утверждение 3. Для оптимальности бесконечномерного вектора $\{\psi_k,\ k\in Z\}$ в задаче (6)–(8) и (10) необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял системам граничных задач (20)–(21) и вариационных неравенств (22).

8. Решение граничных задач (20) методом разделения переменных. Для решения граничных задач (20) введем вспомогательную функцию

$$v_k(y)=u_k''(y)-k^2u_k(y). \tag{23}$$

Тогда уравнения в (20) запишутся в виде: $v_k''(y)-k^2u_k(y)=f_k(y)$. Таким образом, из (20) получаем систему граничных задач

$$\begin{cases}v_k''(y)-k^2v_k(y)=f_k(y);\\ v_k(0)=0,\ v_k(1)=-k^2\psi_k,\ k=\pm1,\pm2,...,\ k\ne 0.\end{cases} \tag{24}$$

Умножим уравнение из (24) на $sh\,k(y-\eta)$ и проинтегрируем полученное по η от 0 до y. В результате будем иметь

$$-v_k'(0)sh\,ky + kv_k(y) = \int_0^y f_k(\eta)sh\,k(y-\eta)d\eta,\ k \in Z \setminus \{0\}. \quad (25)$$

Отсюда для $y=1$, учитывая граничные условия из (24), находим неизвестную постоянную $v_k'(0)$:

$$v_k'(0) = -\int_0^1 f_k(\eta)\frac{sh\,k(1-\eta)}{sh\,k}d\eta - \frac{k^3}{sh\,k}\psi_k,\ k \in Z \setminus \{0\}. \quad (26)$$

Теперь мы можем записать решение граничной задачи (24) в следующем виде:

$$v_k(y) = \int_0^1 G_k(y,\eta)f_k(\eta)d\eta - \psi_k\frac{k^2 sh\,ky}{sh\,k},\ \ k \in Z \setminus \{0\}, \quad (27)$$

где функция Грина $G_k(y,\eta)$ определяется согласно соотношению:

$$G_k(y,\eta) = \begin{cases} -\dfrac{sh\,k(1-y)\cdot sh\,k\eta}{k\,sh\,k}, & 0<\eta<y<1; \\ -\dfrac{sh\,k(1-\eta)\cdot sh\,ky}{k\,sh\,k}, & 0<y<\eta<1. \end{cases} \quad (28)$$

Далее из (20) и (23) получаем систему граничных задач для исходных неизвестных функций $u_k(y)$:

$$\begin{cases} u_k''(y) - k^2u_k(y) = v_k(y); \\ u_k(0)=0,\ u_k(1)=\psi_k,\ k = Z \setminus \{0\}. \end{cases} \quad (29)$$

Эти задачи аналогичны граничным задачам (24). Их решения записываются в виде:

$$u_k(y) = \int_0^1 G_k(y,\theta)f_k(\theta)d\theta + \psi_k\frac{k^2 sh\,ky}{sh\,k},\ \ k \in Z \setminus \{0\}. \quad (30)$$

Рассмотрим случай, когда $k=0$. Функцию Грина в этом случае можно было бы построить так же, как и для $k \neq 0$, однако ее можно получить простым предельным переходом

$$G_0(y,\eta) = \lim_{k\to 0} G_k(y,\eta) = \begin{cases} -(1-y)\eta, & 0<\eta<y<1; \\ -(1-\eta)y, & 0<y<\eta<1. \end{cases} \quad (31)$$

Из (24) и (30) соответственно получаем:

$$v_0(y) = \int_0^1 G_0(y,\eta)f_0(\eta)d\theta; \quad (32)$$

$$u_0(y) = \int_0^1 G_0(y,\theta)v_0(\theta)d\theta + \psi_0 y. \quad (33)$$

Таким образом, нами получены формулы (27), (30), (32) и (33) для решения системы граничных задач (20).

Из (30) и (33) находим решения системы граничных задач (20):

$$u_k(y) = \int_0^1 G_k(y,\theta)\left[\int_0^1 G_k(\theta,\eta)f_k(\eta)d\eta - \psi_k\frac{k^2 sh\,k\theta}{sh\,k}\right]d\theta + \psi_k\frac{sh\,ky}{sh\,k},\ \ k \in Z \setminus \{0\}; \quad (34)$$

$$u_0(y) = \int_0^1 G_0(y,\theta)\int_0^1 G_0(\theta,\eta)f_0(\eta)d\eta d\theta + \psi_0 y. \quad (35)$$

9. Решение граничных задач (21) методом разделения переменных. Для решения системы сопряженных граничных задач (21) введем вспомогательную функцию

$$a_k(y) = w_k''(y) - k^2w_k(y). \quad (36)$$

Тогда уравнение в (21) запишется в виде: $a_k''(y) - k^2a_k(y) = 0$.

Таким образом, из (21) получаем систему граничных задач

$$\begin{cases} a_k''(y) - k^2a_k(y) = 0; \\ a_k(0) = u_k'(0) - \varphi_{1k},\ a_k(1)=0,\ k=\pm1,\pm2,...,\ k\neq 0. \end{cases} \quad (37)$$

Умножим уравнение из (37) на $sh\,k(y-\eta)$ и проинтегрируем полученное по η от 0 до y. В результате будем иметь

$$-a_k'(0)sh\,ky + ka_k(y) - k[u_k'(0)-\varphi_{1k}]ch\,ky = 0,\ k\in Z\setminus\{0\}. \tag{38}$$

Отсюда для $y=1$, учитывая граничные условия из (21), находим неизвестную постоянную $a_k'(0)$:

$$-a_k'(0) = -k[u_k'(0)-\varphi_{1k}]\frac{ch\,k}{sh\,k},\ k\in Z\setminus\{0\}. \tag{39}$$

Теперь, используя (38), мы можем записать решение граничной задачи (37):

$$a_k(y) = [u_k'(0)-\varphi_{1k}]\frac{sh\,k(1-y)}{sh\,k}. \tag{40}$$

Далее из (21) и (36) получаем граничную задачу для исходной неизвестной функции $w_k(y)$:

$$\begin{cases} w_k''(y) - k^2 w_k(y) = a_k(y); \\ w_k(0)=0,\ w_k(1)=0,\ k = Z\setminus\{0\}. \end{cases} \tag{41}$$

Граничные задачи (41) аналогичны задачам (24). Их решения записываются в виде:

$$w_k(y) = \int_0^1 G_k(y,\theta)a_k(\theta)d\theta,\ \ k\in Z\setminus\{0\}, \tag{42}$$

где функция Грина $G_k(y,\eta)$ определятся согласно соотношениям (28). Рассмотрим случай $k=0$. Функция Грина в этом случае нами уже построена (31).

Из (40) и (42) соответственно получаем:

$$a_0(y) = [u_0'(0)-\varphi_{10}](1-y); \tag{43}$$

$$w_0(y) = \int_0^1 G_0(y,\theta)a_0(\theta)d\theta. \tag{44}$$

Таким образом, нами получены формулы (30), (42), (43) и (44) для решения системы граничных задач (21). Из (42) и (44) находим:

$$w_k(y) = \int_0^1 G_k(y,\theta)\left\{[u_k'(0)-\varphi_{1k}]\frac{sh\,k(1-\theta)}{sh\,k}\right\}d\theta,\ \ k\in Z\setminus\{0\}; \tag{45}$$

$$w_0(y) = \int_0^1 G_0(y,\theta)\left\{[u_0'(0)-\varphi_{10}](1-\theta)\right\}d\theta. \tag{46}$$

Для полного определения решений сопряженных граничных задач (21) осталось найти производные $u_k'(0)$.

Из формулы (34) получаем:

$$\begin{gathered} u_k(y) = \int_0^1\int_0^1 G_k(y,\theta)\,G_k(\theta,\eta)\,f_k(\eta)d\eta d\theta + \\ +\psi_k\left[\frac{k\,ch\,k\,sh\,ky}{2sh^2 k} + y\frac{k\,ch\ ky}{2sh\,k} + \frac{sh\,ky}{sh\,k}\right],\ \ k\in Z\setminus\{0\}. \end{gathered} \tag{47}$$

Решение $u_0(y)$ определено ранее соотношением (35). Теперь, найдя производную от решений (47) и (35), получаем искомую величину производной для $k\in Z\setminus\{0\}$:

$$u_k'(0) = -\int_0^1 \frac{sh\,k(1-\theta)}{sh\,k}\int_0^1 G_k(\theta,\eta)\,f_k(\eta)d\eta d\theta + \psi_k\left[\frac{k^2 ch\,k}{2sh^2 k} + \frac{k}{2sh\,k}\right]. \tag{48}$$

Для случая $k=0$ из (35) получаем:

$$u_k'(y) = \int_0^1 \theta\int_0^1 G_0(\theta,\eta)\,f_0(\eta)d\eta d\theta - \int_0^1 (1-\theta)\int_0^1 G_0(\theta,\eta)\,f_0(\eta)d\eta d\theta + \psi_0. \tag{49}$$

Из (49) получаем для искомой величины:

$$u_k'(0) = -\int_0^1 (1-\theta)\int_0^1 G_0(\theta,\eta)\,f_0(\eta)d\eta d\theta + \psi_0. \tag{50}$$

10. Решение сопряженных граничных задач (21) и их производные. Теперь подставим значения производной в точке $y=0$, определенные формулами (48) и (50), в формулы, задающие решения сопряженных граничных задач (45) и (46). Имеем решения сопряженных граничных задач (21):

$$w_k(y)=\left[U_k+\psi_k\left(\frac{k^2 ch\,k}{2sh^2k}+\frac{k}{2sh\,k}\right)-\varphi_{1k}\right]\cdot\int_0^1 G_k(y,\theta)\frac{sh\,k(1-\theta)}{sh\,k}d\theta,\quad k\in Z\setminus\{0\};\tag{51}$$

$$w_0(y)=[U_0+\psi_0-\varphi_{10}]\int_0^1(1-\theta)G_0(y,\theta)d\theta,\tag{52}$$

где

$$U_k=-\int_0^1\frac{sh\,k(1-\theta)}{sh\,k}\int_0^1 G_k(\theta,\eta)f_k(\eta)d\eta d\theta,\quad k\in Z\setminus\{0\};$$

$$U_0=-\int_0^1(1-\theta)\int_0^1 G_0(\theta,\eta)f_0(\eta)d\eta d\theta.$$

Для получения подробного представления семейства вариационных неравенств (22) нам нужно выписать производные функции $w_k(y): w_k'(y)$ и $w_k'''(y),\ k\in Z$ при $y=1$ решений сопряженных граничных задач (21).

Из (51) и (52) при $y=1$ получаем:

$$w_k'(1)=\left[U_k+\psi_k\left(\frac{k^2ch\,k}{2sh^2k}+\frac{k}{2sh\,k}\right)-\varphi_{1k}\right]\cdot\frac{2k\,ch\,k-sh\,k}{4k\,sh^2k},\quad k\in Z\setminus\{0\};\tag{53}$$

$$w_0'(1)=-\frac{1}{6}\cdot\left[U_0+\psi_0-\varphi_{10}\right];\tag{54}$$

$$w_k'''(1)=\left[U_k+\psi_k\left(\frac{k^2ch\,k}{2sh^2k}+\frac{k}{2sh\,k}\right)-\varphi_{1k}\right]\cdot\frac{k\,sh\,k-k^2ch\,k}{2\,sh^2k},\quad k\in Z\setminus\{0\};\tag{55}$$

$$w_0'''(1)=\frac{U_0+\psi_0-\varphi_{10}}{2}.\tag{56}$$

11. Частный случай вариационных неравенств (22). Подставляя значения производных решений сопряженных граничных задач (21), определенные согласно формулам (53)–(56), в вариационные неравенства (22), получаем для значений их первых сомножителей в левой части следующее:

$$2k^2w_k'(1)-w_k'''(1)+\alpha\bar\psi_k=[U_k-\varphi_{1k}]\cdot V_k+W_k\bar\psi_k,\quad k\in Z\setminus\{0\};\tag{57}$$

$$-w_0'''(1)+\alpha\bar\psi_0=-\frac{U_0-\varphi_{10}}{2}+\frac{-1+2\alpha}{2}\bar\psi_0,\ k=0,\tag{58}$$

где

$$V_k=\frac{2k^2(2k\,ch\,k-sh\,k)}{4k\,sh^2k}-\frac{k\,sh\,k+k^2ch\,k}{2\,sh^2k},\ W_k=\left[\frac{k^2ch\,k}{2sh^2k}+\frac{k}{2sh\,k}\right]\cdot V_k+\alpha.$$

12. Задача (1)–(5) при условии $U_g\equiv L_2(0,2\pi)$. Теперь положим, что $U_g\equiv L_2(0,2\pi)$, т.е. снимем ограничение (4). Так как для функции $\psi(x)$ нет ограничений, кроме принадлежности ее пространству $L_2(0,2\pi)$, и вариационное неравенство (22) превращается в вариационное равенство, то оптимальное значение коэффициентов Фурье $\bar\psi_k,\ k=1,2,...$, находим, приравнивая нулю правые части соответственно выражений (57) и (58)

$$\bar\psi_k=-\frac{[U_k-\varphi_{1k}]\cdot V_k}{W_k},\quad k\in Z\setminus\{0\};\tag{59}$$

$$\bar\psi_0=\frac{U_0-\varphi_{10}}{-1+2\alpha},\ k=0.\tag{60}$$

13. Решения граничных задач (20), соответствующие оптимальным коэффициентам Фурье $\bar\psi_k,\ k=1,2,...$ Подставляя в формулы (47) и (35) решения граничных задач (20), оптимальные коэффициенты Фурье $\bar\psi_k,\ k\in Z$, из (59) и (60) получим:

$$u_k(y)=\int_0^1\int_0^1 G_k(y,\theta)G_k(\theta,\eta)f_k(\eta)d\eta d\theta-$$
$$-\frac{[U_k-\varphi_{1k}]\cdot V_k}{W_k}\left[\frac{k\,ch k\, sh ky}{2sh^2 k}-y\frac{k\, ch\, ky}{2sh k}+\frac{sh ky}{sh k}\right],\ k\in Z\setminus\{0\};\tag{61}$$

$$u_0(y)=\int_0^1 G_0(y,\theta)\int_0^1 G_0(\theta,\eta)f_0(\eta)d\eta d\theta+\frac{U_0-\varphi_{10}}{-1+2\alpha}\cdot y,\tag{62}$$

где значения чисел V_k, W_k, $k\in Z\setminus\{0\}$, определены ниже формулы (58).

Теперь в формулах (61) и (62) устремим α к нулю. Будем иметь:

$$u_{k0}(y)=\lim_{\alpha\to 0}u_k(y)=\int_0^1\int_0^1 G_k(y,\theta)G_k(\theta,\eta)f_k(\eta)d\eta d\theta-$$
$$-\frac{[U_k-\varphi_{1k}]\cdot 2sh^2 k}{k^2 ch k+k\, sh k}\left[\frac{k\,ch k\, sh ky}{2sh^2 k}-y\frac{k\, ch\, ky}{2sh k}+\frac{sh ky}{sh k}\right],\ k\in Z\setminus\{0\};\tag{63}$$

$$u_{00}(y)=\lim_{\alpha\to 0}u_0(y)=\int_0^1 G_0(y,\theta)\int_0^1 G_0(\theta,\eta)f_0(\eta)d\eta d\theta-[U_0-\varphi_{10}]\cdot y,\tag{64}$$

Далее заметим, что непосредственная проверка показывает справедливость равенств:

$$u_k'(0)=\varphi_{1k},\ k\in Z.$$

Этого и следовало ожидать, так как приведенные равенства должны иметь место согласно второму условию из соотношений (3), приведенного в постановке исходной некорректной граничной задачи с дополнительным условием.

14. Основной результат. Пример некорректной граничной задачи. Анализ формулы (63) для решений граничных задач (20) показывает:

– во-первых, с ростом индекса k и при $\alpha\to 0$ решения граничных задач (20) $u_k(y)$ (61) (соответственно (63) могут неограниченно возрастать с асимптотикой $k\exp\{k\}$, если этот рост не будет «подавляться» соответствующим более быстрым уменьшением абсолютных величин коэффициентов Фурье φ_{1k} и значений норм $\|f_k(y)\|_{L_2(0,1)}$;

– во-вторых, справедлив следующий основной результат работы:

Теорема. Для того чтобы граничная задача (1)–(3) и (5) имела единственное $L_2(\Omega)$-сильное решение, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия:

$$\{k^{-2}\exp\{k\}\cdot\varphi_{1k}\}_{k=1}^{\infty},\ \{k^{-2}\exp\{k\}\cdot\|f_k(y)\|_{L_2(0,1)}\}_{k=1}^{\infty}\subset l_2;\tag{65}$$

– в-третьих, можно рассматривать аналоги примера Адамара в случае нашей задачи. Примем следующие предположения:

$$f(x,y)=0,\ \varphi_1(x)=k^2\exp\{-\sqrt{k}\}\sin kx,\ k\in Z.\tag{66}$$

Действительно, в рассматриваемом случае, используя формулы (63) и (64), решение граничной задачи (1)–(3) и (5) будет иметь вид:

$$u(x,y)=\frac{k^2\exp\{-\sqrt{k}\}\cdot 2sh^2 k}{k^2 ch k+k\, sh k}\cdot\left[\frac{k\,ch k\, sh ky}{2sh^2 k}-y\frac{k\, ch\, ky}{2sh k}+\frac{sh ky}{sh k}\right]\cdot\sin kx,\ \ k=1,2,...\tag{67}$$

Из (67) видно, что полученное решение в рассматриваемом нами примере единственно. Более того, при $k\to\infty$ функция $\varphi_1(x)$ равномерно стремится к нулю и притом не только сама, но и все ее производные, и принадлежать пространству $L_2(0,2\pi)$. Однако решение (67) при $y>0$ имеет вид синусоиды со сколь угодно большой амплитудой и не принадлежит пространству $L_2(\Omega)$.

Для того чтобы функция $\varphi_1(x)$ удовлетворяла условию (65), необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты Фурье $\varphi_{1k}(x)$ имели асимптотику для больших k порядка $\exp\{-(1+\varepsilon)\}$, где $\varepsilon>0$.

В рассматриваемом нами аналоге примера Адамара для коэффициентов Фурье функции $\varphi_1(x)$ имеем асимптотику, всего лишь равную: $k^2\exp\{-\sqrt{k}\}$, и для коэффициентов Фурье решения $u(x,y)$

соответственно — $\exp\{k-\sqrt{k}\}$. Это показывает некорректность рассматриваемой граничной задачи для бигармонического уравнения.

Таким образом, доказанная теорема позволяет строить бесчисленное множество аналогов примера Адамара (некорректных граничных задач).

References

1 *Hadamard J.* The Cauchy problem for the linear equations with private derivatives of hyperbolic type. — Moscow: Nauka, 1978. — 352 p.

2 *Tihonov A.N., Arsenin V.Ya.* Methods of the solution of ill-posed problems. — Moscow: Nauka, 1979. — 142 p.

3 *Lavrentev M.M.* // Reports AS USSR. A series of the mathematician. — 1956. — Т. 20. — № 6. — P. 819–842.

4 *Lattes R., Lions J.-L.* Methode de quasireversibilite et applications. — Paris: Dunod, 1967.

5 *Dezin A.A.* The general questions of the theory of boundary problems. — Moscow: Nauka, 1980. — 207 p.

6 *Kalmenov T.Sh., Iskakova U.A.* // Reports or RAS. — 2007. — Т. 414. — № 2. — P. 168–171.

7 *Sobolev S.L.* The equations of mathematical physics. — Moscow: Nauka, 1966. — 444 p.

8 *Melnikova I.V., Anufrieva U.A.* // Journal of Mathematical Sciences. — 2008. — 148. — № 4. — P. 481–632.

М.Т.Жиенәлиев, Қ.Б.Иманбердиев, Қ.Ә.Айменова

Бигармоникалық теңдеу үшін корректі емес есепті шешудің тиімділік әдісі

Шектелген екі өлшемді облыста бигармоникалық теңдеу үшін шекаралық есеп қарастырылды. Зерттелетін корректі емес шекаралық есеп тиімді басқару есебіне келтірілген. Түйіндес шекаралық есеп түсінігі негізінде тиімділік шарттары алынған. Корректі емес шекаралық есептің әлді шешімділігінің критерийі табылған.

M.T.Dzhenaliyev, K.B.Imanberdiyev, K.A.Aymenova

Optimization method of solution ill-posed problem for biharmonical equation

In bounded two-dimensional rectangular region we consider a boundary value problem for the biharmonical equation. The studied ill-posed boundary problem was reduced to the optimal control problem. In terms of the adjoint boundary value problem the optimality conditions are established. The strongly solvability criterion is found for ill-posed boundary problem.