О ТЕОРЕМЕ ПОТАПОВА-СИМОНОВА

Кеңес Ж.К.
Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана
E-mail: zhangeldi.94@list.ru

Изучение взаимоотношений между классами составляет предмет *теории вложений* - необъятного раздела теории функций с многочисленными ответвлениями в многие области математики. При этом постановка задач теории вложений, по существу, заключается в выяснении неулучшаемых соотношений между числовыми и функциональными параметрами, определяющих два класса, при выполнении которых один из них в том или ином смысле содержится в другом.

Центральными понятиями теории вложений и приближений являются понятия модуля непрерывности и наилучшего приближения (полиномами по ортогональной системе $\{\varphi_k\}$) функции $f(x)\in L^p(a,b)(1\le p\le\infty, L^\infty\equiv C)$.

Общепринято, что модуль гладкости и наилучшие приближения отражают совершенно различные свойства функции – структурные (как быстро изменяется на промежутке задания) и конструктивные (как хорошо приближается линейной комбинацией функций, принятых в качестве эталонных) соответственно, и в этом заключается «интрига» темы.

Тем самым, следующие соотношения между ними (здесь ортогональная система – тригонометрическая; $1\le p\le\infty$; $n=1,2,\ldots$)

$$E_n(f)_p\le c\omega_p\left(\tfrac{1}{n},f\right) \qquad \text{и} \qquad \omega_p\left(\tfrac{1}{n},f\right)\le c\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}E_k(f)_p$$

составляют основу теории и называются соответственно прямыми и обратными теоремами теории приближений (а им подобные - теоремами типа Джексона и типа Бернштейна соответственно, - по именам авторов).

Тем не менее, развитие теории приближений, даже в ее основах, продолжается (см. [3] и имеющуюся в нем библ.). Здесь в качестве показательного примера можно привести следующее, в какой-то мере неожиданное, соотношение Потапова – Симонова [1,2] (в одной и той же метрике p, $1<p<\infty$; $\alpha>0$)

$$\omega_\alpha\left(\frac{1}{n};f\right)_p \succ\prec E_n(f)_p+n^{-\alpha}\left\|S_n^{(\alpha)}(f)\right\|_p \quad (n=1,2,\ldots), \quad (1)$$

показывающее, что если привлечь еще и частичные суммы $S_n(f)$ тригонометрического ряда Фурье функции $f\in L^p(0,2\pi)$ по спектру $\frac{1}{2},\cos x,\sin x,\ldots,\cos nx,\sin nx$, по которому производится наилучшее приближение, то структурные и конструктивные характеристики функции f «смыкаются».

Зададимся вопросом «Насколько в теореме Потапова-Симонова важно присутствие каждого слагаемого правой части в неравенстве (1)?».

В данной работе получен ответ на этот вопрос в случае $p=2$.

Вычислены порядки каждого слагаемого в порядковом соотношении Потапова-Симонова и пришли к выводу, что в теореме Потапова-Симонова каждое слагаемое опустить без потери справедливости утверждения (1) нельзя.

Список использованных источников

1. *Темиргалиев Н.* Непрерывная и дискретная математика в органическом единстве в контексте направлений исследований // Электронное издание. ИТМиНВ. Астана, 2012. С. 1-259.
2. *Симонов Б.В.* О свойствах преобразованного ряда Фурье //Деп. в ВИНИТИ 22.06.81, №3031-81. С. 45.
3. *Потапов М.К., Симонов Б.В.* О взаимосвязи обобщенных классов функций Бесова-Никольского и Вейля-Никольского // Analysis Mathematica. т. 22. 1996. С. 299-316.