УДК 517.947

М.Б.Муратбеков, С.Ж.Игисинов, А.Б.Шыракбаев

Таразский государственный педагогический институт
(E-mail: musahan_m@mail.ru)

О разделимости дифференциального оператора неклассического типа, заданного в неограниченной области

В статье исследован один класс вырождающихся дифференциальных операторов. В ходе исследования вычислены условия сущестования решения и разделимости. Данные исследования могут быть применены в гидромеханике, газодинамике, в теориях поверхности и мембран.

Ключевые слова: вырождающийся оператор, оператор неклассического типа, резольвента, ограниченная обратимость, обратный оператор, неограниченная область, разделимость.

1 Введение. Постановка задачи. Формулировка основных результатов

Обзор литературы, посвященной уравнениям неклассического типа, можно найти в [1–6]. В этих работах исследованы разрешимость и гладкость решений краевых задач для уравнений неклассического типа без вырождения. Свойства полупериодической задачи Дирихле для вырождающихся уравнений изучены в [6–8].

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$Lu = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sum_{k=0}^{s} R_k(y)\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}} + \sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_k(y)\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}}, \tag{1.1}$$

определенный на множестве $C_o^\infty(\Omega)$, где $\Omega = \{(x,y) : -\infty < x < +\infty, 0 < y < 1\}$; $C_o^\infty(\Omega)$ — множество функций, бесконечно дифференцируемых удовлетворяющих условию

$$u(x,0) = u(x,1) = 0, \tag{1.2}$$

и финитных по переменной x.

Непосредственно можно убедиться, что оператор L допускает замыкание в $L_2(\Omega)$. Замыкание также обозначим через L.

В дальнейшем предположим, что коэффициенты оператора L удовлетворяют условиям

$i)$ $C_k(y) \in C[0,1]$ $(k = 0,1,...,m), R_k(y) \in C[0,1]$ $(k = 0,1,...,s)$;

$ii)$ $C_k(y) \geq 0$ $(k = 0,1,...,m)$ и не убывают на отрезке $[0,1]$; $(-1)^k R_k(y) \geq 0$ для всех k $(k = 0,1,...,s)$ либо $(-1)^k R_k(y) \leq 0$ для всех k $(k = 0,1,...,s)$; $|R_k(y)|$ $(k = 0,1,...,s)$ не убывают на отрезке $[0,1]$;

$iii)$ $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{C_k(2y)}{C_k(y)} < \infty$ $(k = 0,1,...,m)$;

$\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{R_k(2y)}{R_k(y)} < \infty$ $(k = 0,1,...,s)$.

Всюду в дальнейшем через $b(y)$ обозначим неотрицательную функцию, следующими свойствами:

$i)$ $b(y) \in C[0,1]$;

$ii)$ $b(y) \geq 0$ и не убывает на отрезке $[0,1]$;

$iii)$ $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{b(2y)}{b(y)} < \infty$.

Теорема 1.1. Пусть выполнены условия i)- iii). Тогда оператор $L+\lambda E$ при $\lambda \geq 0$ непрерывно обратим в пространстве $L_2(\Omega)$.

Определение 1.1. Будем говорит, что оператор L разделим, если для всех функций $u \in D(L)$ имеет место оценка

$$\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right\|_2+\sum_{k=0}^{s}\left\|R_k(y)\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}}\right\|_2+\sum_{k=0}^{m}\left\|C_k(y)\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}}\right\|_2 \leq C(\|Lu\|_2+\|u\|_2),$$

где $C>0$ — постоянное число.

Теорема 1.2. Пусть $C_k(y)$, $(k=0,1,...,m)$, $R_k(y)$, $(k=0,1,...,s)$ и $b(y)$ удовлетворяют условиям $i)-iii)$. Тогда оператор при $\lambda>0$ $b(y)D_x^{\beta}(L+\lambda E)$ $(\beta=0,1,...m;\beta=0,1,...s)$ ограничен в $L_2(\Omega)$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{|t|\to\infty}\gamma_t>0,$$

где

$$\gamma_t=\frac{\theta_t^4}{(1+|t|)^{2\beta}}\times\inf_{\theta_t\geq\xi\geq 1}\left(\frac{1+\theta_t^{-2}(\sum\limits_{k=0}^{m}t^{2k}C_k(\frac{\xi}{\theta_t})+\sum\limits_{k=0}^{s}|t|^{2k+1}|R_k(\frac{\xi}{\theta_t})|+\lambda)}{b(\frac{\xi}{\theta_t})}\right)^2,$$

$-\infty<t<\infty$, где θ_t — удовлетворяет неравенству

$$C^{-1}\leq\theta_t^{-2}(\sum_{k=0}^{m}t^{2k}C_k(\frac{1}{\theta_t})+\sum_{k=0}^{s}|t|^{2k+1}|R_k(\frac{1}{\theta_t})|+\lambda)\leq C,$$

где $C>1$ — любое фиксированное число.

Теорема 1.3. Пусть выполнены условия $i)-iii)$. Тогда оператор L разделим.

В работе, в частности, будут использованы рассуждения, которые использованы в работах [6–8].

2 Вспомогательные оценки

Пусть $l_t+\lambda E$ — оператор Штурма-Лиувилля, определенный равенством

$$(l_t u+\lambda E)u=-u''(y)-i\sum_{k=0}^{s}(-1)^k R_k(y)t^{2k+1}u(y)+\sum_{k=0}^{m}C_k(y)t^{2k}u(y)+\lambda u(y), \tag{2.1}$$

где $-\infty<t<\infty$ на множестве $W_{2,0}^2(0,1)$; ($W_{2,0}^2(0,1)$ — пространство функций $u\in L_2(0,1)$, у которых существуют (обобщенные) производные до порядка 2, также принадлежащие $L_2(0,1)$ и $u(0)=u(1)=0$).

Введем величину

$$\mu_t=\inf_{u\in C^2[0,1],u(0)=u(1)=0}\frac{\int\limits_0^1|l_t+\lambda E)u|^2dy}{\int\limits_0^1|(1+|t|)^{\beta}b(y)u|^2dy}=\inf_{u\in C^2[0,1],u(0)=u(1)=0}\frac{\|l_t+\lambda E)u\|^2}{\|(1+|t|)^{\beta}b(y)u\|_{2,(0,1)}^2}. \tag{2.2}$$

Лемма 2.1. Пусть коэффициенты оператора $l_t+\lambda E$ удовлетворяют условиям $i)-iii)$. Тогда выполняются неравенства

$$\tilde{C}^{-1}\gamma_t\leq\mu_t\leq\tilde{C}\gamma_t,\ \ -\infty<t<\infty,$$

где γ_t определяется равенством

$$\gamma_t = \frac{\theta_t^4}{(1+|t|)^{2\beta}} \times \inf_{\theta_t \geq \xi \geq 1} \left(\frac{1+\theta_t^{-2}(\sum\limits_{k=0}^{m} t^{2k} C_k(\frac{\xi}{\theta_t}) + \sum\limits_{k=0}^{s} |t|^{2k+1} |R_k(\frac{\xi}{\theta_t})| + \lambda)}{b(\frac{\xi}{\theta_t})} \right). \tag{2.3}$$

Доказательство. При доказательстве этой леммы мы будем пользоваться рассуждениями и выкладками, использованными в [7, 8]. Выберем функцию $\theta_t \geq 1$, удовлетворяющую неравенству

$$C^{-1} \leq \theta_t^{-2} \left(\sum_{k=0}^{m} t^{2k} C_k(\frac{1}{\theta_t}) + \sum_{k=0}^{s} |t|^{2k+1} |R_k(\frac{1}{\theta_t})| + \lambda \right) \leq C. \tag{2.4}$$

В силу непрерывности и монотонности коэффициентов оператора (1.1), такой выбор при некотором $C > 0$, не зависящем от t, возможен. Отметим, что если $t \to \infty$, то $\theta_t \to \infty$. Действительно, если это не так, то существуют $t_1 < t_2 < t_3 < ...$, такие, что $\theta_{t_i} \leq \theta_0$, $\theta_0^{-1} \in (0,1]$, и на основании

$$C_k \left(\frac{1}{\theta_{t_i}} \right) \geq C_k \left(\frac{1}{\theta_0} \right) \ \ (k = 0, 1, ..., m), \ \ \left| R_k \left(\frac{1}{\theta_{t_i}} \right) \right| \geq R_k \left(\frac{1}{\theta_0} \right) \ \ (k = 0, 1, ..., s)$$

получим противоречие с (2.4). Заменяя y на $\dfrac{x}{\theta_t}$ равенство (2.2), приведем к виду

$$\mu_t = \frac{\theta_t^4}{(1+|t|)^{2\beta}} \times \inf_{z \in C^2[0,\theta_t], z(0)=z(\theta_t)=0} \frac{\int\limits_0^{\theta_t} \left| -u'' + \theta_t^{-2} \left(\sum\limits_{k=0}^{m} t^{2k} C_k(\frac{x}{\theta_t}) + i \sum\limits_{k=0}^{s} |t|^{2k+1} |R_k(\frac{x}{\theta_t})| + \lambda \right) u \right|^2 dx}{\int\limits_0^{\theta_t} \left| b(\frac{x}{\theta_t}) u \right|^2 dx}.$$

Пусть

$$\tilde{b}(x) = b(\frac{x}{\theta_t});$$

$$\psi_t(x) = \theta_t^{-2} \left(\sum_{k=0}^{m} t^{2k} C_k(\frac{x}{\theta_t}) + i \sum_{k=0}^{s} |t|^{2k+1} |R_k(\frac{x}{\theta_t})| + \lambda \right),$$

тогда

$$\mu_t = \frac{\theta_t^4}{(1+|t|)^{2\beta}} \times \inf_{z \in C^2[0,\theta_t], z(0)=z(\theta_t)=0} \frac{\int\limits_0^{\theta_t} |-u'' + \psi_t(x) u|^2 dx}{\int\limits_0^{\theta_t} \left| \tilde{b}(x) u \right|^2 dx}. \tag{2.5}$$

Оценим $\int\limits_0^{\theta_t} |-u'' + \psi_t(x) u|^2 dx$ снизу. Учитывая то, что $z \in C^2[0, \theta_t]$, $z(0) = z(\theta_t) = 0$ интегрированием по частям получим

$$\| -u'' + \psi_t(x) u \|_{2,(0,\theta_t)} \cdot \|u\|_{2,(0,\theta_t)} \geq | < -u'' + \psi_t(x) u, u > | = \left| \int\limits_0^{\theta_t} (-u'' + \psi_t(x) u) \bar{u} dx \right| =$$

$$= \left| -u' \bar{u} |_0^{\theta_t} + \int_0^{\theta_t} (|u'|^2 + \psi_t(x) |u|^2) dx \right| = \left| \int\limits_0^{\theta_t} (|u'|^2 + \psi_t(x) |u|^2) dx \right| =$$

$$= \left| \int_0^{\theta_t} (|u'|^2 + (Re\psi_t(x) + iIm\psi_t(x))|u|^2)dx \right|. \tag{2.6}$$

Так как $Im\psi_t(x)$ не меняет знака на $[0, \theta_t]$ и $Re\psi_t(x) \geq 0$, то

$$2\left| \int_0^{\theta_t} (|u'|^2 + (Re\psi_t(x) + iIm\psi_t(x))|u|^2)dx \right| \geq \left| \int_0^{\theta_t} (-|u'|^2 + Re\psi_t(x)|u|^2)dx \right| +$$

$$+\left| \int_0^{\theta_t} (iIm\psi_t(x))|u|^2)dx \right| = \int_0^{\theta_t} (|u'|^2 + Re\psi_t(x)|u|^2)dx + \int_0^{\theta_t} |Im\psi_t(x)||u|^2)dx.$$

На основании этого неравенства и (2.6) имеем

$$\| -u'' + \psi_t(x)u\|_{2,(0,\theta_t)} \cdot \|u\|_{2,(0,\theta_t)} \geq \int_0^{\theta_t} (|u'|^2 + Re\psi_t(x)|u|^2)dx + \int_0^{\theta_t} |Im\psi_t(x)||u|^2 dx. \tag{2.7}$$

Из монотонности функции $Re\psi_t(x), |Im\psi_t(x)|$ и (2.4) следует, что

$$Re\psi_t(x) + |Im\psi_t(x)| \geq C^{-1} > 0 \text{ при } x \geq 1.$$

Учитывая это и очевидное неравенство

$$\int_0^1 |u'|^2 dx \geq \int_0^1 |u|^2 dx,$$

заключаем, что

$$\int_0^{\theta_t} (|u'|^2 + Re\psi_t(x)|u|^2)dx + \int_0^{\theta_t} |Im\psi_t(x)||u|^2)dx = \int_0^1 (|u'|^2 + Re\psi_t(x)|u|^2 + |Im\psi_t(x)||u|^2)dx +$$

$$+\int_1^{\theta_t} (|u'|^2 + |u|^2(Re\psi_t(x) + |Im\psi_t(x)|))dx \geq \int_0^1 |u|^2 dx + \int_1^{\theta_t} (Re\psi_t(x) + |Im\psi_t(x)|)|u|^2 dx \geq C^{-1} \int_0^{\theta_t} |u|^2 dx.$$

Отсюда и из неравенства (2.7) находим

$$\| -u'' + \psi_t(x)u\|_{2,(0,\theta_t)} \geq C_0 \|u\|_{2,(0,\theta_t)}, \;\; C_0 = \frac{1}{2}C^{-1}. \tag{2.8}$$

Неравенства (2.8) и (2.6) дают, что

$$\| -u'' + \psi_t(x)u\|_{2,(0,\theta_t)} \geq C_1 \|u'\|_{2,(0,\theta_t)}, \;\; C_1 = C_0^{\frac{1}{2}}. \tag{2.9}$$

Возьмем две функции $\varphi_1, \varphi_2 \in C^2(-\infty, \infty)$, удовлетворяющие условиям

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 \equiv 1, \;\; \sup_{x \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^{2} (|\varphi_i''(x)| + |\varphi_i'(x)| + |\varphi_i(x)|) \leq C_2;$$

$$\varphi_1 = \begin{cases} 1, & \text{при } x \in [\frac{3}{2}k - \frac{1}{4}, \frac{3}{2}k + \frac{1}{4}], k = 0, \pm1, \pm2, ...; \\ 0, & \text{при } x \in [\frac{3}{2}k + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}k + 1], k = 0, \pm1, \pm2, ...; \end{cases}$$

$$\varphi_2 = \begin{cases} 0, & \text{при } x \in [\frac{3}{2}k - \frac{1}{4}, \frac{3}{2}k + \frac{1}{4}], k = 0, \pm1, \pm2, ...; \\ 1, & \text{при } x \in [\frac{3}{2}k + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}k + 1], k = 0, \pm1, \pm2, ... \end{cases}$$

Носитель функции $\varphi_1(x)$ состоит из непересекающихся отрезков $\Delta_k, k = 0, \pm1, \pm2, ...$ и носитель функции $\varpi_2(x)$ — так же из непересекающихся отрезков Δ_k.

Если $u \in C^2[0, \theta_t$ и $u(0) = u(\theta_t) = 0$, то, используя (2.8), (2.9), будем иметь

$$\| -(u\varphi_i)'' + \psi_t(x)u\varphi_i\|_2 = \| -u''\varphi_i - 2u'\varphi_i' - u\varphi_i'' + \psi_t(x)u\varphi_i\|_2 =$$

$$= \|\varphi_i(-u'' + \psi_t(x)u) - 2u'\varphi_i' - u\varphi_i''\|_2 \le \|\varphi_i(-u'' + \psi_t(x)u)\|_2 + \| -2u'\varphi_i' - u\varphi_i''\|_2 \le$$

$$\le \|\varphi_i(-u'' + \psi_t(x)u)\|_2 + \| -2u'\varphi_i'\|_2 + \| -u\varphi_i''\|_2 \le \tilde{C}_0\| -u'' + \psi_t(x)u\|_2, i = 1, 2.$$

Теперь воспользуемся этим неравенством и (2.5)

$$\mu_t = \frac{\theta_t^4}{(1+|t|)^{2\beta}} \times \inf_{\substack{z\in C^2[0,\theta_t] \\ z(0)=z(\theta_t)=0}} \frac{\int_0^{\theta_t} | -u'' + \psi_t(x)u|^2 dx}{\int\limits_0^{\theta_t} \left|\tilde{b}(x)u\right|^2 dx} \ge$$

$$\ge \frac{\theta_t^4}{\tilde{C}_0(1+|t|)^{2\beta}} \times \inf_{\substack{z\in C^2[0,\theta_t] \\ z(0)=z(\theta_t)=0}} \frac{\sum\limits_{i=1}^{2}\int\limits_0^{\theta_t} | -(u\varphi)'' + \psi_t(x)u\varphi|^2 dx}{\sum\limits_{i=1}^{2}\int\limits_0^{\theta_t} \left|\tilde{b}(x)u\varphi\right|^2 dx} =$$

$$= \frac{\theta_t^4}{\tilde{C}_0(1+|t|)^{2\beta}} \times \inf_{\substack{z\in C^2[0,\theta_t] \\ z(0)=z(\theta_t)=0}} \frac{\sum\limits_{i=1}^{2}\sum\limits_{k=0}^{N_{ki}}\int_{(0,\theta_t)\cap\Delta k_i} | -(u\varphi)'' + \psi_t(x)u\varphi|^2 dx}{\sum\limits_{i=1}^{2}\sum\limits_{k=0}^{N_{ki}}\int\limits_{(0,\theta_t)\cap\Delta k_i} \left|\tilde{b}(x)u\varphi\right|^2 dx}. \tag{2.10}$$

Пусть $\Delta = (\Delta^-, \Delta^+) \subseteq (0, \theta_t)$ и $\Delta^- - \Delta^+ \le 1$. Для любой функции $u \in C^2(\Delta^-)$, $u(\Delta^-) = u(\Delta^+) = 0$, повторяя выкладки, примененные при доказательстве неравенства (2.8), получим

$$2\left(\int\limits_{\Delta^-}^{\Delta^+} | -u'' + \psi_t(x)u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{\Delta^-}^{\Delta^+} |u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \ge \int\limits_{\Delta^-}^{\Delta^+} (|u'|^2 + (Re\psi_t(x) +$$

$$+|Im\psi_t(x)|)|u|^2)dx \ge \int\limits_{\Delta^-}^{\Delta^+} |u|^2(1 + \tilde{\psi}_t(x))dx;$$

$$\tilde{\psi}_t(x) = Re\psi_t(x) + |Im\psi_t(x)|.$$

Так как $Re\psi_t(x), |Im\psi_t(x)|$ не убывают, справедливо неравенство

$$2\left(\int\limits_{\Delta^-}^{\Delta^+} | -u'' + \psi_t(x)u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{\Delta^-}^{\Delta^+} |u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \ge (1 + \tilde{\psi}_t(\Delta^-)) \int\limits_{\Delta^-}^{\Delta^+} |u|^2 dx.$$

Тогда

$$\int\limits_{\Delta^-}^{\Delta^+} |-u'' + \psi_t(x)u|^2 dx \geq C_1(1+\tilde{\psi}_t(\Delta^-))^2 \int\limits_{\Delta^-}^{\Delta^+} |u|^2 dx, C_1 = \frac{1}{4}. \qquad (2.11)$$

Соотношение (2.10) и неравенство

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{b_1 + b_2 + ... + b_n} \geq \inf_i \frac{a_i}{b_i}, \quad a_i \geq 0, b_i \geq 0$$

дают, что

$$\mu_t \geq \frac{\theta_t^4}{\tilde{C}_0(1+|t|)^{2\beta}} \times \inf_{\substack{\delta\in[0,\theta_t] \\ \Delta^+ - \Delta^- \leq 1}} \inf_{\substack{u\in C^2[0,\theta_t] \\ u\varphi_i(\Delta^-) = u\varphi_i(\Delta^+)}} \frac{\int\limits_{\Delta^-}^{\Delta^+} |-(u\varphi)'' + \psi_t(x)u\varphi|^2 dx}{\int_{\Delta^-}^{\Delta^+} \left|\tilde{b}(x)u\varphi\right|^2 dx}.$$

Отсюда и из (2.11) вытекает

$$\mu_t \geq \frac{C_1}{\tilde{C}_0} \cdot \frac{\theta_t^4}{(1+|t|)^{2\beta}} \times \inf_{\substack{\delta\in[0,\theta_t] \\ \Delta^+ - \Delta^- \leq 1}} \frac{(1+\tilde{\psi}_t(\Delta^-))^2}{\tilde{b}^2(\Delta^+)} = C_2 \frac{\theta_t^4}{(1+|t|)^{2\beta}} \times \inf_{\substack{\delta\in[0,\theta_t] \\ \Delta^+ - \Delta^- \leq 1}} \frac{(1+\tilde{\psi}_t(\Delta^-))^2}{\tilde{b}^2(\Delta^+)}.$$

Если $\Delta^- \leq 1$, то, учитывая неравенства

$$\Delta^+ \leq 2, \frac{\tilde{b}(\Delta^+)}{\tilde{b}(1)} \leq \frac{\tilde{b}(2)}{\tilde{b}(1)} < C_3, \tilde{\psi}_t(1) \leq C,$$

которые следуют из условий $i) - iii)$ и выбора θ_t, будем иметь

$$\left(\frac{(1+\tilde{\psi}_t(\Delta^-))^2}{\tilde{b}(\Delta^+)}\right)^2 \geq C_4 \left(\frac{(1+\tilde{\psi}_t(1))^2}{\tilde{b}^2(\Delta^+)}\right)^2 \geq C_4 \left(\frac{(1+\tilde{\psi}_t(1))^2}{C_3\tilde{b}^2(1)}\right)^2 =$$

$$= \frac{C_4}{C_3^2} \left(\frac{(1+\tilde{\psi}_t(1))^2}{\tilde{b}^2(1)}\right)^2 = C_5 \left(\frac{(1+\tilde{\psi}_t(1))^2}{\tilde{b}^2(1)}\right)^2. \qquad (2.12)$$

Если же $\Delta^- \geq 1$, то очевидно $\Delta^+ \leq 2\Delta^-$, поэтому

$$\frac{\tilde{b}(\Delta^+)}{\tilde{b}(\Delta^-)} \leq \frac{\tilde{b}(2\Delta^-)}{\tilde{b}(\Delta^-)} < C_3, \tilde{b}(\Delta^+) \leq \tilde{b}(2\Delta^-) \leq C_3\tilde{b}(\Delta^-);$$

$$\frac{(1+\tilde{\psi}_t(\Delta^-))^2}{\tilde{b}^2(\Delta^+)} = \frac{(1+\tilde{\psi}_t(\Delta^-))^2}{\tilde{b}^2(\Delta^-)} \cdot \frac{\tilde{b}^2(\Delta^-)}{\tilde{b}^2(\Delta^+)} \geq$$

$$\geq \frac{1}{C_3^2} \cdot \left(\frac{(1+\tilde{\psi}_t(\Delta^-))^2}{\tilde{b}(\Delta^+)}\right)^2 = C_6 \left(\frac{(1+\tilde{\psi}_t(\Delta^-))^2}{\tilde{b}(\Delta^-)}\right)^2. \qquad (2.13)$$

Из (2.12) и (2.13) следует, что

$$\mu_t \geq \tilde{C}^{-1} \cdot \frac{\theta_t^4}{(1+|t|)^{2\beta}} \times \inf_{\theta_t \geq xi \geq 1} \left(\frac{(1+\tilde{\psi}_t(\xi))}{\tilde{b}(\xi)}\right)^2. \qquad (2.14)$$

Оценим μ_t сверху. Если $w(x) \in C_0^\infty[0,1]$ и $w(x) \equiv 0$ при $x \notin [\frac{11}{100}, \frac{99}{100}]$, то $w(x-\xi) \in C_0^\infty[0,\theta_t]$ при $(\xi, \xi+1) \subseteq (0,\theta_t)$. Из (2.5) находим

$$\mu_t = \frac{\theta_t^4}{(1+|t|)^{2\beta}} \times \inf_{(\xi,\xi+1)} \frac{\int\limits_0^{\theta_t} |-w''(x-\xi) + \psi_t(x) w(x-\xi)|^2 dx}{\int\limits_0^{\theta_t} \left|\tilde{b}(x) w(x-\xi)\right|^2 dx} =$$

$$= \frac{\theta_t^4}{(1+|t|)^{2\beta}} \times \inf_{(\xi,\xi+1)\subset(0,\theta_t)} \frac{\int\limits_\xi^{\xi+1} |-w''(x-\xi) + \psi_t(x) w(x-\xi)|^2 dx}{\int\limits_\xi^{\xi+1} \left|\tilde{b}(x) w(x-\xi)\right|^2 dx}.$$

Произведем замену $y = x - \xi$, тогда

$$\mu_t = \frac{\theta_t^4}{(1+|t|)^{2\beta}} \times \inf_{(\xi,\xi+1)\subset(0,\theta_t)} \frac{\int\limits_0^1 |-w''(y) + \psi_t(y+\xi) w(y)|^2 dy}{\int\limits_0^1 \left|\tilde{b}(y+\xi) w(y)\right|^2 dy} \le$$

$$\le 2\frac{\theta_t^4}{(1+|t|)^{2\beta}} \times \inf_{(\xi,\xi+1)\subset(0,\theta_t)} \frac{\int\limits_0^1 |-w''(y)|^2 dy + \int\limits_0^1 |\psi_t(y+\xi)|^2 |w(y)|^2 dy}{\int\limits_0^1 \left|\tilde{b}(y+\xi) w(y)\right|^2 dy}.$$

Учитывая монотонность $\tilde{b}(\xi)$ и $|\psi_t(\xi)|$, находим неравенства

$$|\psi_t(\xi)| \le \tilde{\psi}_t(\xi), \quad \int\limits_0^1 |w(y)|^2 dy \le \int\limits_0^1 |w''(y)|^2 dy.$$

Из последнего соотношения выводим

$$\mu_t \le 2\frac{\theta_t^4}{(1+|t|)^{2\beta}} \times \inf_{(\xi,\xi+1)\subset(0,\theta_t)} \frac{\int_0^1 |-w''(y)|^2 dy + \int\limits_0^1 |\psi_t(1+\xi)|^2 |w(y)|^2 dy}{\int\limits_0^1 \left|\tilde{b}(y+\xi) w(y)\right|^2 dy} =$$

$$= 2\frac{\theta_t^4}{(1+|t|)^{2\beta}} \times \inf_{(\xi,\xi+1)\subset(0,\theta_t)} \frac{\int_0^1 |-w''(y)|^2 dy + \int\limits_0^1 |\psi_t(1+\xi)|^2 |w(y)|^2 dy}{\int\limits_{0,11}^{0,99} \left|\tilde{b}(y+\xi) w(y)\right|^2 dy} \le$$

$$\le 2\frac{\theta_t^4}{(1+|t|)^{2\beta}} \times \inf_{(\xi,\xi+1)\subset(0,\theta_t)} \frac{\int_0^1 |-w''(y)|^2 dy + \tilde{\psi}_t^2(1+\xi) \int\limits_0^1 |-w''(y)|^2 dy}{\tilde{b}^2(0,11+\xi) \int\limits_0^1 |w(y)|^2 dy} \le$$

$$\leq 2\frac{\theta_t^4}{(1+|t|)^{2\beta}} \times \inf_{(\xi,\xi+1)\subset(0,\theta_t)} \frac{(1+\tilde{\psi}_t^2(1+\xi))\int\limits_0^1 |w''(y)|^2 dy}{\tilde{b}^2(0,11+\xi)\int_0^1 |w(y)|^2 dy} \leq$$

$$\leq C_8 \frac{\theta_t^4}{(1+|t|)^{2\beta}} \times \inf_{(\xi,\xi+1)\subset(0,\theta_t)} \frac{1+\tilde{\psi}_t^2(1+\xi)}{\tilde{b}^2(0,11+\xi)}, \qquad (2.15)$$

где $C_8 = 2C_7$, $C_7 = \dfrac{\int_0^1 |w''(y)|^2 dy}{\int_0^1 |w(y)|^2 dy}$.

Поскольку $1+\xi \leq 2^4(\xi+0,11)$ при $\xi \geq 0$, то из условия $ii)$ следует

$$\frac{\tilde{b}^2(1+\xi)}{\tilde{b}^2(0,11+\xi)} \leq \frac{\tilde{b}^2(2^4(1+\xi))}{\tilde{b}^2(0,11+\xi)} \leq C_9.$$

Поэтому

$$\inf_{(\xi,\xi+1)\subset(0,\theta_t)} \left[\frac{(1+\tilde{\psi}_t(1+\xi))^2}{\tilde{b}^2(0,11+\xi)}\right]^2 \leq \frac{1}{C_9} \inf_{(\xi,\xi+1)\subset(0,\theta_t)} \left[\frac{(1+\tilde{\psi}_t(1+\xi))^2}{\tilde{b}^2(1+\xi)}\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{C_9} \inf_{\theta_t \geq \xi \geq 1} \frac{(1+\tilde{\psi}_t(\xi))^2}{\tilde{b}^2(\xi)}.$$

Теперь неравенство (2.15) можно переписать в следующем виде:

$$\mu_t \leq \tilde{C} \frac{\theta_t^4}{(1+|t|)^{2\beta}} \times \inf_{\theta_t \geq \xi \geq 1} \frac{(1+\tilde{\psi}_t(\xi))^2}{\tilde{b}^2(\xi)}, \tilde{C} = \frac{C_8}{C_9}. \qquad (2.16)$$

Неравенства (2.14) и (2.16) доказывают лемму 2.1.

3 Доказательство теорем 1.1–1.3

Докажем теорему 1.1. Для любого $u \in C_0^\infty(\Omega)$ имеем

$$< Lu + \lambda u, u >= \int\limits_\Omega \left|-\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2 dxdy + \int\limits_\Omega \sum_{k=0}^s R_k \frac{\partial^{2k+1} u}{\partial x^{2k+1}} u dxdy +$$

$$+ \int\limits_\Omega \sum_{k=0}^m C_k(y) \left|\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right|^2 dxdy + \lambda \int\limits_\Omega |u|^2 dxdy.$$

Нетрудно проверить, что второе слагаемое равно нулю. В этом можно убедиться путем интегрирования по частям. Используя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$Lu + \lambda u\|_2 \geq \lambda \|u\|_2. \qquad (3.1)$$

Рассмотрим уравнение

$$Lu + \lambda u = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sum_{k=0}^s R_k \frac{\partial^{2k+1} u}{\partial x^{2k+1}} + \sum_{k=0}^m (-1)^k C_k(y) \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} + \lambda u = f, f \in C_0^\infty(\Omega). \qquad (3.2)$$

Выполним в уравнении (3.2) преобразование Фурье по x

$$(l_t+\lambda E)\tilde{u}=-\tilde{u}_{yy}+\sum_{k=0}^{m}C_k(y)t^{2k}\tilde{u}-\sum_{k=0}^{s}iR_k(y)(-1)^k t^{2k+1}\tilde{u}+\lambda\tilde{u}=\tilde{f}; \tag{3.3}$$

$$\tilde{u}(t,0)=\tilde{u}(t,1)=0, \tag{3.4}$$

где

$$\tilde{u}=F_{x\to t}u(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,y)e^{-ixt}dx;$$

$$\tilde{f}=F_{x\to t}f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)e^{-ixt}dx.$$

Отсюда нетрудно заметить, что задача о решении уравнения (3.2) перейдет в задачу о решении уравнения (3.3). Поэтому рассмотрим оператор Штурма-Лиувилля, определенный равенством

$$(l_t+\lambda E)u=-u''(y)+\sum_{k=0}^{m}C_k(y)t^{2k}u(y)-\sum_{k=0}^{s}iR_k(y)(-1)^k t^{2k+1}u(y)+\lambda u(y)$$

на множестве $W_{2,0}^2(0,1)$. Отметим, что найдется ограниченный обратный оператор $(l_t+\lambda E)^{-1}$, определенный на всем пространстве. Отсюда следует, что функция

$$\tilde{u}=(l_t+\lambda E)^{-1}\tilde{f}$$

является решением задачи (3.3)-(3.4).

Теперь для того, чтобы получить решение нашей первоначальной задачи, остается применить обратное преобразование Фурье. Таким образом

$$u(x,y)=(L+\lambda E)^{-1}f=F^{-1}\tilde{u}=F^{-1}(l_t+\lambda E)^{-1}\tilde{f}. \tag{3.5}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 3.1. Пусть $C_k(y),R_k(y)\in C[0,1]$ $(k=\bar{0,m};k=\bar{0,s})$ и $C_k(y)\geq 0$ $(k=\bar{0,m}$, тогда справедливо следующее равенство:

$$\|b(y)D_x^{\beta}(L+\lambda E)^{-1}\|_{2\to 2}=\sup_{t\in\mathbb{R}}\||t|^{\beta}b(y)(l_t+\lambda E)^{-1}\|_{2\to 2};$$

$\beta=0,1,...,2s+1$.

Доказательство. Для любого $f\in C_0^{\infty}(\Omega)$

$$b(y)D_x^{\beta}(L+\lambda E)^{-1}f=b(y)D_x^{\beta}F_{t\to x}^{-1}(l_t+\lambda E)^{-1}\tilde{f}=b(y)F_{t\to x}^{-1}(it)^{\beta}(l_t+\lambda E)^{-1}\tilde{f}(t,y).$$

$$\|b(y)D_x^{\beta}(L+\lambda E)^{-1}f\|_2^2=\|b(y)F_{t\to x}^{-1}(it)^{\beta}(l_t+\lambda E)^{-1}\tilde{f}(t,y)\|_2^2=$$
$$=<b(y)F_{t\to x}^{-1}(it)^{\beta}(l_t+\lambda E)^{-1}\tilde{f}(t,y),b(y)F_{t\to x}^{-1}(it)^{\beta}(l_t+\lambda E)^{-1}\tilde{f}(t,y)>. \tag{3.6}$$

Известно, что F^{-1} и F — унитарные операторы в $L_2(\mathbb{R})$. Поэтому

$$\|b(y)D_x^{\beta}(L+\lambda E)^{-1}f\|_2^2=<b(y)(l_t+\lambda E)^{-1}\tilde{f}(t,y),b(y)(F_{t\to x}^{-1})^*F_{t\to x}^{-1}(it)^{\beta}(l_t+\lambda E)^{-1}\tilde{f}(t,y)>=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^1|b(y)|it|^{\beta}(l_t+\lambda E)^{-1}\tilde{f}(t,y)|^2)dy\right)dt=$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\| b(y)|t|^{\beta}(l_t+\lambda E)^{-1}\tilde{f}(t,y)\right\|_2^2)dt \le \int_{-\infty}^{\infty} \left\| b(y)(t)^{\beta}(l_t+\lambda E)^{-1}\|_2^2\|\tilde{f}(t,y)\right\|_2^2)dt \le$$

$$\le \sup_{t\in\mathbb{R}} \|b(y)|t|^{\beta}(l_t+\lambda E)^{-1}\|_2^2 \int_{-\infty}^{\infty} \|\tilde{f}(t,y)\|_2^2)dt = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|b(y)|t|^{\beta}(l_t+\lambda E)^{-1}\|_2^2\|\tilde{f}\|_2^2.$$

Отсюда по определению нормы

$$\|b(y)D_x^{\beta}(L+\lambda E)^{-1}\|_2^2 \le \sup_{t\in\mathbb{R}} \|b(y)(t)^{\beta}(l_t+\lambda E)^{-1}\|_2^2;$$

$$\|(L+\lambda E)^{-1}f\|_2^2 \le \sup_{t\in\mathbb{R}} \|b(y)|t|^{\beta}(l_t+\lambda E)^{-1}\|_2^2\|f\|_2^2;$$

$$\|(L+\lambda E)^{-1}\|_2^2 \le \sup_{t\in\mathbb{R}} \|b(y)|t|^{\beta}(l_t+\lambda E)^{-1}\|_2^2. \tag{3.7}$$

Обозначим через $\Phi(t)$ функцию

$$\Phi(t) = \|b(y)|t|^{\beta}(l_t+\lambda E)^{-1}\tilde{f}(t,y)\|_2^2.$$

Так как $f \in C_0^{\infty}(\Omega)$, то $\Phi(t) \ge 0$ — непрерывная функция. Поэтому для любого интервала $(\alpha,\beta) : (\beta-\alpha) = 1$ верно неравенство

$$\int_{\alpha}^{\beta} \Phi(t)dt \le \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t)dt,$$

или

$$\Phi(\xi)(\beta-\alpha) \le \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t)dt, \xi \in (\alpha,\beta).$$

Отсюда

$$\Phi(\xi) \le \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t)dt.$$

Последнее неравенство показывает, что

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|b(y)|t|^{\beta}(l_t+\lambda E)^{-1}\|_2^2\|\tilde{f}\|_2^2 \le \int_{-\infty}^{\infty} \left\|b(y)|t|^{\beta}(l_t+\lambda E)^{-1}\tilde{f}(t,y)\right\|_2^2)dt =$$

$$= \|b(y)D_x^{\beta}(L+\lambda E)^{-1}f\|_2^2 \tag{3.8}$$

Лемма 3.1 доказана.

Из леммы 3.1 следует, что оператор $b(y)D_x^{\beta}(L+\lambda E)^{-1}$ ограничен тогда и только тогда, когда

$$\overline{\lim_{|t|\to\infty}} \|b(y)|t|^{\beta}(l_t+\lambda E)^{-1}\|_{2\to 2} \le C < \infty,$$

то же самое

$$\underline{\lim_{|t|\to\infty}} \left(\|b(y)|t|^{\beta}(l_t+\lambda E)^{-1}\|_{2\to 2}\right)^{-1} > 0.$$

Величина
$$\mu_t = \|b(y)(1+|t|)^{\beta}(l_t+\lambda E)^{-1}\|_{2\to 2}. \tag{3.9}$$

По лемме 2.1 допускает оценку
$$C^{-1}\gamma_t \le \mu_t \le C\gamma_t, \;\; -\infty < t < C\infty.$$

Поэтому утверждение теоремы 1.2 об ограниченности следует из лемм 3.1 и 2.1. Тем самым теорема 1.2 доказана полностью.

Если $b(y) = R_k(y)(k=\overline{0,s})$, то, согласно (2.4), $\underline{\lim}_{|t|\to\infty} \gamma_t > 0$. Поэтому из теоремы 1.2 следует, что
$$\left\| R_k(y)\frac{\partial^{2k+1}}{\partial x^{2k+1}}(L+\lambda E)\right\|_{2\to 2} < \infty \;\; (k=\overline{0,s}).$$

Точно так же при $b(y) = C_k(y)(k=\overline{0,m})$ получаем
$$\left\| C_k(y)\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}}(L+\lambda E)\right\|_{2\to 2} < \infty \;\; (k=\overline{0,m}).$$

Из последних оценок следует, что
$$\left\| \frac{\partial^{2}}{\partial y^{2}}(L+\lambda E)\right\|_{2\to 2} < \infty.$$

Теорема 1.3 доказана полностью.

Список литературы

1 *Дубинский Ю.А.* О некоторых дифференциально-операторных уравнениях произвольного порядка // Матем. сб. — 1973. — Т. 90 (132). — № 1. — С. 3–22.

2 *Дубинский Ю.А.* Об одной абстрактной теореме и ее приложениях к краевым задачам для неклассических уравнений // Матем. сб. — 1969. — Т. 79 (121). — № 1. — С. 91–117.

3 *Романко В.К.* Разрешимость граничных задач для дифференциально-операторных уравнений высокого порядка // Дифференциальные уравнения. — 1978. — Т. 14. — № 6. — С. 1081–1092.

4 *Юрчук Н.И.* О граничных задачах для уравнений с операторами вида $\frac{d^{2m+1}}{dt^{2m+1}} + A$ // Дифференциальные уравнения. — 1974. — Т. 10. — № 5. — С. 950–952.

5 *Пятков С.П.* О корректных краевых задачах для уравнений составного типа и их обобщений: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Новосибирск, 1982.

6 *Муратбеков М.Б., Муратбеков М.М., Оспанов К.Н.* Коэрцитивная разрешимость дифференциального уравнения нечетного порядка и ее приложения // Докл. АН РФ. — 2010. — Т. 435. — № 3. — С. 1–3.

7 *Кальменов Т.Ш., Отелбаев М.О.* О гладкости решений одного класса вырождающихся эллиптических уравнений // Дифференциальные уравнения. — 1977. — Т. 13. — № 7. — С. 1244–1255.

8 *Муратбеков М.Б.* Коэрцитивные оценки для одного дифференциального оператора высокого порядка // Дифференциальные уравнения. — 1981. — Т. 17. — № 5. — С. 893–901.

М.Б.Мұратбеков, С.Ж.Игисинов, А.Б.Шырақбаев

Классикалық емес типті дифференциалдық оператордың шенелмеген облыста бөліктенуі туралы

Мақалада шенелмеген облыстағы жойылмалы дифференциалдық оператордың бір класы зерттелген. Зерттеу барысында алдымен шешімнің бар болуы және бөліктену шарттары алынды. Бұл зерттеулерді гидромеханика, газдинамикасында, беттер және қабықшалар теориясында кеңінен қолдануға болады.

M.B.Muratbekov, S.J.Igisinov, A.B.Shyrakbaev

On separability of non-classical type differential operator in an unbounded domain

In this paper we investigate a class of degenerating differential operators. These studies can be used in fluid mechanics, gas dynamics, in the theory of surfaces and membranes.

References

1 Dubinski Yu.A. *Sbornik Mathematics*, 1973, 90 (132), 1, p. 1–22.
2 Dubinski Yu.A. *Sbornik Mathematics*, 1969, 79 (121), 1, p. 91–117.
3 Romanko V.K. *Differential Equations*, 1978, 14, 6, p. 1081–1092.
4 Yurchuk N.I.*Differential Equations*, 1974, 10, 5, p. 950–952.
5 Pyatkov S.P.*Correct boundary value problems for a composite type equations and their generalizations:* abstract of dis. ... cand. phys.-math. sci., Novosibirsk, 1982.
6 Muratbekov M.B., Muratbekov M.M., Ospanov K.N.*Doklady Mathematics*, 2010, 435, 3, p. 1–3.
7 Kalmenov T.Sh., Otelbaev M.O. *Differential Equations*, 1977, 13, 7, p. 1244–1255.
8 Muratbekov M.B. *Differential Equations*, 1981, 17, 5, p. 893–901.