ӘОЖ 517.9+51:53

Б.А.Шалдықова

Рудный индустриалдық институты

ЖЫЛУӨТКІЗГІШТІКТІҢ СПЕКТРАЛДЫ-ЖҮКТЕЛГЕН ОПЕРАТОРЫ ҮШІН ШЕКАРАЛЫҚ ЕСЕБІ II

Настоящая работа является продолжением работы [1]. Здесь исследуются вопросы разрешимости характеристических интегральных уравнений. Методом регуляризации Карлемана-Векуа решаются исходные особые интегральные уравнения Вольтерра второго рода. Исследуется разрешимость взаимно-сопряженных граничных задач. Изучаются вопросы спектра обобщенных спектральных задач для нагруженного оператора теплопроводности. Нумерация формул и пунктов продолжает соответствующую нумерацию работы [1].

The present work is continuation of work [1]. It examines the questions of solvability of the characteristic of integral equations. The method of regularization of the Carleman-Vekua solved the original integral equations. Resolvability of the is mutual-interfaced boundary problems is investigated. Questions of a spectrum of the generalized spectral problems for the loaded operator of heat conductivity are studied. Numbering of formulas and points continues corresponding numbering of work [1].

Лемма 3. 2-лемманың шарттары орындалғанда келесі теңсіздік орын алады:

$$\left|Q_2(t,\tau)-Q(t,\tau)\right|\le M_1\frac{t^{2\omega+\beta}}{t-\tau}+M_2t^{2\omega-1}.$$

Лемма 3-тің дәлелденуі. Лемма 1-ді ескере отырып, келесіні аламыз:

$$\left|Q_2(t,\tau)-Q(t,\tau)\right|=\left|\frac{\alpha^2(t)}{4(t-\tau)}-\frac{(2\omega-1)\left(\alpha(t)\right)^{\frac{2\omega-1}{\omega}}\left(\alpha(\tau)\right)^{\frac{2\omega-1}{\omega}}}{4\left(\alpha(t)\right)^{\frac{2\omega-1}{\omega}}-\left(\alpha(\tau)\right)^{\frac{2\omega-1}{\omega}}}\right|=$$

$$=\frac{(2\omega-1)\left(\alpha(t)\right)^{\frac{2\omega-1}{\omega}}\left(\alpha(\tau)\right)^{\frac{2\omega-1}{\omega}}}{4\left(\alpha(t)\right)^{\frac{2\omega-1}{\omega}}-\left(\alpha(\tau)\right)^{\frac{2\omega-1}{\omega}}}\left|\frac{\alpha^2(t)\left[\left(\alpha(t)\right)^{\frac{2\omega-1}{\omega}}-\left(\alpha(\tau)\right)^{\frac{2\omega-1}{\omega}}\right]}{(2\omega-1)(t-\tau)\left(\alpha(t)\right)^{\frac{2\omega-1}{\omega}}\left(\alpha(\tau)\right)^{\frac{2\omega-1}{\omega}}}-1\right|=$$

$$=\frac{(2\omega-1)\left(t\left(1+\alpha_0(t)\right)\right)^{2\omega-1}\left(\tau\left(1+\alpha_0(\tau)\right)\right)^{2\omega-1}}{4\left(t\left(1+\alpha_0(t)\right)\right)^{2\omega-1}-\left(\tau\left(1+\alpha_0(\tau)\right)\right)^{2\omega-1}}\times$$

$$\times\left|\left(t\left(1+\alpha_0(t)\right)\right)^{2\omega-1}\frac{\left[\left(t\left(1+\alpha_0(t)\right)\right)^{2\omega-1}-\left(\tau\left(1+\alpha_0(\tau)\right)\right)^{2\omega-1}\right]}{(2\omega-1)(t-\tau)\left(t\left(1+\alpha_0(t)\right)\right)^{2\omega-1}\left(\tau\left(1+\alpha_0(\tau)\right)\right)^{2\omega-1}}\right|\le$$

$$\le\frac{(2\omega-1)\left(t\left(1+\alpha_0(t)\right)\right)^{2\omega-1}\left(\tau\left(1+\alpha_0(\tau)\right)\right)^{2\omega-1}}{4\left(t\left(1+\alpha_0(t)\right)\right)^{2\omega-1}-\left(\tau\left(1+\alpha_0(\tau)\right)\right)^{2\omega-1}}\times$$

$$\times\left|\left(t\left(1+\alpha_0(t)\right)\right)\left(\tau\left(1+\alpha_0(\tau)\right)\right)^{1-2\omega}\frac{\left(\left(\alpha(\tau)\right)^{\frac{2\omega-1}{\omega}}\right)'_{|\tau=t}-1/2\left(\left(\alpha(\tau)\right)^{\frac{2\omega-1}{\omega}}\right)''_{|\tau=t}(t-\tau)}{(2\omega-1)(t-\tau)}-1\right|\le$$

$$\le\frac{(2\omega-1)\left(t\left(1+\alpha_0(t)\right)\right)^{2\omega-1}\left(\tau\left(1+\alpha_0(\tau)\right)\right)^{2\omega-1}}{4\delta(\omega)\left(t\left(1+\alpha_0(t)\right)\right)^{2\omega-2}\left(t\left(1+\alpha_0(t)+t\alpha_0'(t)\right)\right)(t-\tau)}\times$$

$$\times\Big|\left(1+\alpha_0(t)+t\alpha_0'(t)\right)-\frac{2\omega-2}{2}(t-\tau)\left(t\left(1+\alpha_0(t)\right)\right)^{2-2\omega}\left(t_2\left(1+\alpha_0(t_2)\right)\right)^{2\omega-3}\left(1+\alpha_0(t_2)+t_2\alpha_0'(t_2)\right)^2-$$

$$-\frac{1}{2}(t-\tau)\left(t\left(1+\alpha_0(t)\right)\right)^{2-2\omega}\left(t_2\left(1+\alpha_0(t_2)\right)\right)^{2\omega-3}\left(2\alpha_0'(t_2)+t_2\alpha_0''(t_2)\right)+$$

$$+\frac{1}{2}(2\omega-1)(2\omega-2)\left(t\left(1+\alpha_0(t)\right)\right)t_2\left(1+\alpha_0(t_2)\right)^{2\omega-3}\left(t_3\left(1+\alpha_0(t_3)\right)\right)^{-2\omega}\left(1+\alpha_0(t_2)+t_2\alpha_0'(t_2)\right)^2\times$$

$$\times\left(1+\alpha_0(t_3)+t_3\alpha_0'(t_3)\right)(t-\tau)^2+\frac{(2\omega-1)}{2\left(t\left(1+\alpha_0(t)\right)\right)^{\omega-1}}\left(t_2\left(1+\alpha_0(t_2)\right)\right)^{2\omega-2}\times$$

$$\times\left(t_3\left(1+\alpha_0(t_3)\right)\right)^{-2\omega}\left(1+\alpha_0(t_3)\right)+t_3\alpha_0'(t_3)\left(2\alpha_0'(t_2)+t_2\alpha_0''(t_2)(t-\tau)^2-1\right)\Big|\le$$

$$\le\frac{(2\omega-1)\left(t\left(1+\alpha_0(t)\right)\right)^{2\omega-1}\left(\tau\left(1+\alpha_0(\tau)\right)\right)^{2\omega-1}}{4\delta(\omega)\left(t\left(1+\alpha_0(t)\right)\right)^{2\omega-2}\left(t\left(1+\alpha_0(t)+t\alpha_0'(t)\right)\right)(t-\tau)}\times$$

$$\times(t)+t\alpha_0'(t)(\omega-1)(t-\tau)\left(\frac{\left(t_2\left(1+\alpha_0(t_2)\right)\right)^{2\omega-3}}{\left(t\left(1+\alpha_0(t)\right)\right)^{2-2\omega}}\right)\left(1+\alpha_0(t)+t\alpha_0'(t)\right)^2-\frac{1}{2}(t-\tau)\left(t\left(1+\alpha_0(t)\right)\right)^{2-2\omega}\times$$

$$\times\left(1+\alpha_0(t_3)\right)+t\alpha_0'(t_3)(t-\tau)+\frac{(2\omega-2)(2\omega-1)}{2}\left(t\left(1+\alpha_0(t)\right)\right)^{1-\omega}\left(\frac{\left(t_2\left(1+\alpha_0(t_2)\right)\right)^{2\omega-3}}{\left(t_3\left(1+\alpha_0(t_3)\right)\right)^{2\omega}}\right)\times$$

$$\times\left(1+\alpha_0(t_2)+t_2\alpha_0'(t_2)\right)^2\left(1+\alpha_0(t_3)\right)+t_3\alpha_0'(t_3)t\alpha_0'(t_3)(t-\tau)^2\frac{(2\omega-1)\left(t_2\left(1+\alpha_0(t_2)\right)\right)^{2\omega-2}}{2\left(t\left(1+\alpha_0(t)\right)\right)^{\omega-1}}.$$

Мұндағы $t_3=\tau+\theta_3(t-\tau), 0\le\theta_3\le 1$ болғандықтан,

$$\left|Q_2(t,\tau)-Q(t,\tau)\right|\le\frac{(2\omega-1)2^{2\omega}t^{2\omega}}{4\delta(\omega)t-\tau}\left(\alpha_0(t)+t\alpha_0'(t)\right)+\frac{(2\omega-1)2^{2\omega+1}}{4\delta(\omega)}(\omega-1)t^{2\omega-1}+$$

$$+\frac{1}{4}t^{2\omega}+\frac{2\omega-1}{4}t^{2\omega-1}(t-\tau)+(2\omega-1)(\omega-1)t^{2\omega-2}(t-\tau)+(2\omega-1)t^{2\omega-1}\le M_1\frac{t^{2\omega+\beta}}{t-\tau}+M_2t^{2\omega-1}.$$

3-лемма дәлелденді.

1-теореманың дәлелденуі. (34) шартты ескере отырып, ең алдымен келесі теңсіздікті аламыз:

$$P_2(t,\tau)=\left(\frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)}\right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\frac{\left(t\left(1+\alpha_0(t)\right)\right)^{\omega}}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}\le M_3(\omega)\left(\frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)}\right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\frac{t^{\omega}}{(t-\tau)^{3/2}}. \tag{35}$$

$Q_2-Q\ge 0$ болатын ω параметрінің мәні және $0\le\tau\le t\le\infty$ үшін талап етіліп отырған баға төмендегі теңсіздіктерден алынады:

$$\left|K-K_2\right|\le\left|(P-P_2)\exp\{-Q\}\right|+\left|P_2\exp\{-Q\}\left(1-\exp\{-Q+Q\}\right)\right|\le\left|P-P_2\right|\exp\{-Q\}+\left|P_2(Q_2-Q)\exp\{-Q\}\right|.$$

Осылайша, 1–3 леммаларын ескере отырып

$$\left|K-K_2\right|\le\left(\frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)}\right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\left\{\bar{M}\frac{t^{\omega+\beta}}{(t-\tau)^{3/2}}+M_3\frac{t^{\omega}}{(t-\tau)^{3/2}}\left(M_1\frac{t^{2\omega+\beta}}{t-\tau}+M_2t^{2\omega-1}\right)\right\}e^{-Q}\le$$

$$\le\left(\frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)}\right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\frac{t^{\omega-1}}{\sqrt{t-\tau}}\left(\bar{M}\frac{t^{\beta+1}}{t-\tau}+\bar{M}_1\frac{t^{2\omega+\beta+1}}{(t-\tau)^2}+\bar{M}_2\frac{t^{2\omega}}{t-\tau}\right)e^{-Q}\le\left(\frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)}\right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\frac{t^{\omega-1}}{\sqrt{t-\tau}};$$

$$\left(\frac{t}{t-\tau}e^{-Q/2}\bar{M}t^{\beta}+\frac{t^2}{\left((t-\tau)^2\right)}e^{-Q/2}\bar{M}_1t^{2\omega-1+\beta}+\frac{t}{t-\tau}e^{-Q/2}\bar{M}_2t^{2\omega-1}\right)e^{-Q/2}\le C(\omega)\left(\frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)}\right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\frac{t^{\omega-1}}{\sqrt{t-\tau}}\exp\{-Q/2\}$$

теңсіздігін аламыз. Мұнда сонымен қатар

$$x^n e^{mx} \le \left(\frac{n}{m}\right)^n e^{-\frac{n}{m}}, \forall x \ge 0$$

теңсіздігі қолданылады.

$Q_2 - Q \le 0$ болатын ω параметрінің мәні мен $0 \le \tau \le t \le \infty$ үшін осы теңсіздіктерде Q_2, Q сәйкесінше P_2, P функцияларының орындарын ауыстыру жеткілікті.

(32) теңсіздіктің нақтылығы $K_2(t,\tau) - K(t,\tau)$ айырымы әлсіз ерекшелікке ие екендігін көрсетеді, және келесі шектік арақатынас орындалады:

$$\lim_{t\to+0}\int_0^t \left(\frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)}\right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} \frac{t^{\omega-1}}{\sqrt{t-\tau}}\left[\exp\left(-Q(t,\tau)/2\right) + \exp\left(-Q_2(t,\tau)/2\right)\right]d\tau = 0,$$

және (28) теңдеу (27) теңдеу үшін шын мәнінде сипаттамалық болып табылады.

1-теорема дәлелденді.

(28) және (29) сипаттамалық интегралдық теңдеулердің шешімдері келесі өрнектермен анықталады [2, 3]:

$$\mu(t) = f_1(t) + \lambda\int_0^t \frac{\left[\left(\alpha(\tau)\right)^{1/\omega}\right]'}{\left(\alpha(\tau)\right)^2}\cdot r_{\lambda_-}\left(\frac{1}{2\omega-1}\left[\left(\alpha(t)\right)^{-\frac{2\omega-1}{\omega}} - \left(\alpha(\tau)\right)^{-\frac{2\omega-1}{\omega}}\right]\right) f_1(\tau)d\tau +$$
$$+\sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k \exp\left(-iz_k\frac{\left(\alpha(t)\right)^{-\frac{2\omega-1}{\omega}}}{2\omega-1}\right), \quad t \in R_+; \tag{36}$$

$$v(t) = g_1(t) + \bar{\lambda}\int_t^\infty \frac{\left[\left(\alpha(\tau)\right)^{1/\omega}\right]'}{\left(\alpha(t)\right)^2}\cdot r_{\lambda_+}\left(\frac{1}{2\omega-1}\left[\left(\alpha(t)\right)^{-\frac{2\omega-1}{\omega}} - \left(\alpha(\tau)\right)^{-\frac{2\omega-1}{\omega}}\right]\right) g_1(\tau)d\tau, \quad t \in R_+. \tag{37}$$

Алынған (36) және (37) шешімдері келесі шарттарды қанағаттандырады:

$$\mu(t) - \phi\left(\frac{(2\omega-1)^{-1}}{\left(\alpha(t)\right)^{(2\omega-1)/\omega}}\right) \in M(R_+), \qquad v(t) = \frac{1}{\left(\alpha(t)\right)^2}\cdot\psi\left(\frac{(2\omega-1)^{-1}}{\left(\alpha(t)\right)^{(2\omega-1)/\omega}}\right) \in L_1(R_+); \tag{38}$$

$\lambda = \exp\left(\left|\arg\lambda + 2k\pi\right|\right)$ теңдеуімен өрнектелген сызықтар өзара қиылыспайтын $D_m,\ m = 0,1,2,...$ облыстарға λ параметрінің комплекстік жазықтығын келесі түрде бөледі:

$$D_{2n} = \left\{D_n^{(1)} \cap D_n^{(2)}\right\} \setminus \bigcup_{k=-1}^{2n-1} D_k, D_{-1} =, \ D_{2n+1} = \left\{D_n^{(1)} \cup D_n^{(2)}\right\} \setminus \bigcup_{k=0}^{2n} D_k,$$

мұнда

$$D_n^{(1)} = \left\{\lambda : |\lambda| < \exp\left[(2n+1)\pi - \arg\lambda\right]\right\},\ D_n^{(2)} = \left\{\lambda : |\lambda| < \exp\left[2n\pi + \arg\lambda\right]\right\},\ n = 0,1,2,...$$

$D_m\ m = 0,1,2,...$ облысының $\partial D_m,\ m = 0,1,2,...$ шекарасының сыртқы бөліктерін $\Gamma_m,\ m = 0,1,2,...$ арқылы белгілейміз.

4. (17) және (22) интегралдық теңдеулерді регуляризация әдісімен шешу.

Келесі белгілеулерді енгіземіз:

$$\tilde{K}(t,\tau) = K_2(t,\tau) - K(t,\tau), \tag{39}$$

және (28) теңдеуін ескеріп, (17) теңдеуін келесі түрде жазамыз:

$$K_\lambda\mu \equiv (I - \lambda K)\mu = \lambda\int_0^1 \tilde{K}(t,\tau)\mu(\tau)d\tau + f_1(t),\ t \in R. \tag{40}$$

Оң жағын уақытша белгілі функция ретінде қарастырып, ақырғы теңдеуді характеристикалық теңдеу ретінде шешеміз. Онда (36) формулаға сәйкес мынаны аламыз:

$$\mu(t) = f_1(t) + \lambda\int_0^1 \tilde{K}(t,\tau)\mu(\tau)d\tau + \lambda\int_0^1 \frac{\left[\left(\alpha(\tau)\right)^{1/\omega}\right]'}{\left(\alpha(\tau)\right)^2}\cdot r_\lambda\left(\frac{1}{2\omega-1}\left[\left(\alpha(t)\right)^{-\frac{2\omega-1}{\omega}} - \left(\alpha(\tau)\right)^{-\frac{2\omega-1}{\omega}}\right]\right)\times$$

$$\times\left[f_1(\tau)+\lambda\int_0^{\tau}\tilde{K}(\tau,\mu)\mu(\eta)d\eta\right]d\tau+\sum_{k=-N_1}^{N_2}c_k\exp\left(-iz_k\frac{(\alpha(t))^{-\frac{2\omega-1}{\omega}}}{2\omega-1}\right).$$

Берілген теңдеуді мына түрге келтіреміз:

$$\hat{K}_\lambda\mu\equiv\left(I-\lambda\hat{K}\right)\mu\equiv\mu(t)-\lambda\int_0^t\hat{K}(t,\tau)\mu(\tau)d\tau=\hat{f}(t)+\sum_{k=-N_1}^{N_2}c_k\exp\left(-iz_k\frac{(\alpha(t))^{-\frac{2\omega-1}{\omega}}}{2\omega-1}\right),\ t\in R, \tag{41}$$

мұнда

$$\hat{K}(t,\tau)=\tilde{K}(t,\tau)+\lambda\int_\tau^t\frac{\left[(\alpha(\eta))^{1/\omega}\right]'}{(\alpha(\eta))^2}\cdot r_{\lambda_-}\left(\frac{1}{2\omega-1}\left[(\alpha(t))^{-\frac{2\omega-1}{\omega}}-(\alpha(\eta))^{-\frac{2\omega-1}{\omega}}\right]\right)\cdot\tilde{K}(\eta,\tau)d\eta\equiv\tilde{K}(t,\tau)+\lambda\tilde{\tilde{K}}(t,\tau);$$

$$\hat{f}(t)=f_1(t)+\lambda\int_0^t\frac{\left[(\alpha(\tau))^{1/\omega}\right]'}{(\alpha(\tau))^2}\cdot r_{\lambda_-}\left(\frac{1}{2\omega-1}\left[(\alpha(t))^{-\frac{2\omega-1}{\omega}}-(\alpha(\tau))^{-\frac{2\omega-1}{\omega}}\right]\right)f_1(\tau)d\tau.$$

Енді (41) теңдеуі регулярлық болып табылатынын, яғни біртіндеп жуықтау әдісімен шешілетінін, көрсетеміз.

Әрі қарай ыңғайлы болу үшін келесі белгілеуді енгіземіз:

$$\gamma=2\omega-1,\ \omega>1/2,\ \gamma>0\ . \tag{42}$$

Теорема 2. *Егер* $\alpha(t)=\left(t\left(1+\alpha_0(t)\right)\right)^{(\gamma-1)/2}$ *функциясы, мұндағы* $\alpha_0(t)=t^{\beta}\sigma(t),\beta>0$, *ал* $\sigma(t)$ *функциясы* $0<t<\infty$ *интервалында екі рет үзіліссіз дифференциалданатын және* $\left|\sigma(t)\right|\le C,\sigma(t)\ne0$ *болса, онда* $\tilde{K}(t,\tau)$ *ядросы әлсіз ерекшелікке ие, яғни келесі баға орын алады:*

$$\left|\hat{K}(t,\tau)\right|\le C\frac{t^{1/2+\varepsilon}}{\tau^{1-\gamma/2+\varepsilon}(t-\tau)^{1/2}},\ 0<\varepsilon<\gamma/2,\ \gamma=2\omega-1>0,\ 0<\tau<t<\infty\ . \tag{43}$$

Дәлелдеуі. $\hat{K}(t,\tau)$ $\tilde{K}(t,\tau)+\lambda\tilde{\tilde{K}}(t,\tau)$ белгілеуіне ие болғандықтан, (43) бағалауы (32)-ден және төмендегі келтірілген қатыстардан шығады. Келесі қос теңсіздікті пайдаланып:

$$C_1t^{\gamma-1}(t-\tau)\le t^{\gamma}-\tau^{\gamma}\le C_2t^{\gamma-1}(t-\tau),$$

мұнда $C_1=\min\{1,\gamma\}$, $C_2=\max\{1,\gamma\}$, алдымен мынаны аламыз $(\gamma=2\omega-1)$:

$$K(t,\tau)\le M_1(\gamma)\int_\tau^t\eta^{-\gamma-1}\left(\frac{\eta}{\tau}\right)^{1-\gamma/2}\cdot\frac{\eta^{(\gamma-1)/2}}{\sqrt{\eta-\tau}}\cdot\frac{\sqrt{t}\eta^{\gamma/2}}{\sqrt{t-\eta}}\exp\left(-\frac{C_1(\gamma)(t-\eta)}{t\eta^{\gamma}}\right)d\mu+M_2(\gamma)\int_\tau^t\eta^{-\gamma-1}\left(\frac{\eta}{\tau}\right)^{1-\gamma/2}\times$$

$$\times\frac{\eta^{(\gamma-1)/2}}{\sqrt{\eta-\tau}}\cdot\frac{t^{3/2}\eta^{3\gamma/2}}{(t-\eta)^{3/2}}\exp\left(-\frac{C_2(\gamma)t\eta^{\gamma}}{t-\eta}\right)d\eta=J_1(t,\tau)+J_2(t,\tau).$$

Мұнда $C_j(\gamma),\tilde{M}_j(\gamma),\ j=1,2,$ — γ-дан ғана тәуелді тұрақтылар; $J_1(t,\tau)$, $J_2(t,\tau)$ сәйкес мынаған тең:

$$J_1=M_1(\gamma)\frac{\sqrt{t}}{\tau^{1-\gamma/2}}\int_\tau^t\frac{1}{\eta^{(\gamma+1)/2}\sqrt{(\eta-\tau)(t-\eta)}}\exp\left(-\frac{C_1(\gamma)(t-\mu)}{t\eta^{\gamma}}\right)d\eta=M_1(\gamma)\frac{\sqrt{t}}{\tau^{1-\gamma/2}}I_1(t,\tau);$$

$$J_2=M_2(\gamma)\frac{\sqrt{t}}{\tau^{1-\gamma/2}}\int_\tau^t\frac{t\eta^{(\gamma-1)/2}}{(t-\eta)^{3/2}(\eta-\tau)^{1/2}}\exp\left(-\frac{C_2(\gamma)t\eta^{\gamma}}{t-\eta}\right)d\eta=M_2(\gamma)\frac{\sqrt{t}}{\tau^{1-\gamma/2}}I_2(t,\tau).$$

Әрі қарай $I_1(t,\tau),I_2(t,\tau)$ функцияларының әрқайсысын екі қосылғыштың қосындысы түрінде көрсетеміз

$$I_1(t,\tau)=I_{11}(t,\tau)+I_{12}(t,\tau);\ \ I_2(t,\tau)=I_{21}(t,\tau)+I_{22}(t,\tau),$$

олардың әрқайсысы үшін аламыз

$$I_{11}(t,\tau)=\int_\tau^{\frac{t+\tau}{2}}\frac{1}{\eta^{(\gamma+1)/2}\sqrt{(\eta-\tau)(t-\eta)}}\exp\left(-\frac{C_1(\gamma)(t-\eta)}{t\eta^{\gamma}}\right)d\eta\le C(\gamma)\sqrt{t}\int_\tau^{\frac{t+\tau}{2}}\frac{\sqrt{t}d\eta}{(t-\eta)\sqrt{\eta(\eta-\tau)}}\le\left\|z^2=\frac{t-\tau}{t-\eta}-1\right\|\le$$

$$\le \frac{C(\gamma)}{\sqrt{t-\tau}}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z^2+\tau/t}} = \frac{C(\gamma)}{\sqrt{t-\tau}}\ln\left(\sqrt{t/\tau}+\sqrt{t/\tau+1}\right) = \frac{C(\gamma)}{\sqrt{t-\tau}}\ln\frac{1+\sqrt{1+\tau/t}}{\sqrt{\tau/t}} \le \frac{C(\gamma)}{\sqrt{t-\tau}}\ln\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{\tau/t}} \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\left[C_1 + C_2(\tau/t)^{\varepsilon}\left|\ln\frac{\tau}{t}\right|\cdot(t/\tau)^{\varepsilon}\right] = \frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\left|C_1 + C_3(t/\tau)^{\varepsilon}\right|,$$

мұнда ε параметрінің мәні $0<\varepsilon<\gamma/2$ шартынан таңдалынады

$$I_{12}(t,\tau) = \int_{(t+\tau)/2}^{t} \frac{1}{\eta^{(\gamma+1)/2}\sqrt{(\eta-\tau)(t-\eta)}}\exp\left(-\frac{C_1(\gamma)(t-\eta)}{t\eta^{\gamma}}\right)d\eta \le$$

$$\le \left(\frac{2}{(t+\tau)}\right)^{(\gamma+1)/2}\frac{C(\gamma)}{\sqrt{t-\tau}}\int_{(t+\tau)/2}^{t}\frac{1}{\sqrt{t-\eta}}\exp\left(-\frac{C_1(\gamma)(t-\mu)}{t^{\gamma-1}}\right)d\eta \le$$

$$\le C(\gamma)\left(\frac{t}{\sqrt{t+\tau}}\right)^{(\gamma+1)/2}\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\int_{(t+\tau)/2}^{t}\exp\left(-\frac{C_1(\lambda)(t-\eta)}{t^{\gamma+1}}\right)d\left(\frac{\sqrt{C_1(\gamma)(t-\eta)}}{t^{(\gamma+1)/2}}\right) \le \left\| z = \frac{\sqrt{C_1(\gamma)(t-\eta)}}{t^{(\gamma+1)/2}}\right\| \le$$

$$\le \frac{C(\gamma)}{\sqrt{t-\tau}}\int_0^{\infty}\exp\left\{-z^2\right\}dz \le \frac{C(\gamma)}{\sqrt{t-\tau}};$$

$$I_{21}(t,\tau) = \int_{\tau}^{(t+\tau)/2}\frac{\sqrt{t}\mu^{(\gamma-1)/2}}{(t-\eta)^{3/2}(\eta-\tau)^{1/2}}\exp\left(-\frac{C_2(\gamma)t\eta^{\gamma}}{t-\eta}\right)d\eta \le C(\gamma)\int_{\tau}^{\frac{t+\tau}{2}}\frac{\sqrt{t}d\eta}{(t-\eta)\sqrt{\eta(\eta-\tau)}} \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\left[C_1 + C_2(\tau/t)^{\varepsilon}\left|\ln\frac{\tau}{t}\right|\cdot(t/\tau)^{\varepsilon}\right] = \frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\left[C_1 + C_3(t/\tau)^{\varepsilon}\right],$$

мұнда ақырғы теңсіздік $I_{11}(t,\tau)$ бағалауынан алынады және ε параметрінің мәні сол сияқты $0<\varepsilon<\gamma/2$ шартынан таңдалынады

$$I_{22}(t,\tau) = \int_{(t+\tau)/2}^{t}\frac{t\eta^{(\gamma-1)/2}}{(t-\tau)^{3/2}(\eta-\tau)^{1/2}}\exp\left(-\frac{C_2(\gamma)t\eta^{\gamma}}{t-\eta}\right)d\eta \le \frac{C(\gamma)}{\sqrt{t-\tau}}\int_{(t+\tau)/2}^{t}\frac{t\eta^{(\gamma-1)/2}}{(t-\eta)^{3/2}}\exp\left(-\frac{C_3(\gamma)t(t+\tau)^{\gamma}}{t-\eta}\right)d\eta =$$

$$= \frac{C(\gamma)}{\sqrt{t-\tau}}\int_{(t+\tau)/2}^{t}\frac{t\eta^{(\gamma-1)/2}}{(t-\eta)^{3/2}}\exp\left(-\frac{C_3(\gamma)t^{\gamma+1}}{t-\eta}\left\{1+\frac{\tau}{t}\right\}^{\gamma}\right) \le$$

$$\le \frac{C(\gamma)}{\sqrt{t-\tau}}\int_0^{t}\frac{t^{(\gamma+1)/2}}{(t-\eta)^{3/2}}\exp\left(-\frac{C_4(\gamma)t^{\gamma+1}}{t-\eta}\right)d\eta = \left\| \begin{matrix} z = \dfrac{t^{(\gamma+1)/2}}{2\sqrt{t-\eta}} \\ dz = \dfrac{t^{(\gamma+1)/2}d\gamma}{4(t-\eta)^{3/2}} \end{matrix} \right\| = \frac{C(\gamma)}{\sqrt{t-\tau}}\int_{t^{\gamma/2}/2}^{\infty}\exp\left\{-z^2\right\}dz \le \frac{C(\gamma)}{\sqrt{t-\tau}}.$$

Бұл теңсіздіктерде $C(\gamma), C_j, j=1,2,3,4$ әр түрлі және тек қана γ-дан тәуелді.

Алынған теңсіздіктерден ізделінді (43) баға шығады. *Лемма дәлелденді.*

Сонымен, оң жақ бөлік үшін (43) баға бойынша (41) теңдеуі біртіндеп жуықтау әдісімен көрсетуге болатын жалғыз ғана шешімге ие болады.

(17) және (41) теңдіктерден біртекті теңдеу

$$K_{2\lambda}\mu \equiv (I-\lambda K_2)\mu \equiv \mu(t) - \lambda\int_0^t K_2(t,\tau)\mu(\tau)d\tau = 0,\ t\in R_+ \qquad (44)$$

біртекті емес теңдеуге тепе-тең болатыны

$$\hat{K}_{\lambda}\mu = \mu(t) - \lambda\int_0^t \hat{K}(t,\tau)\mu(\tau)d\tau = \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k \exp\left(-\frac{iz_k}{2\omega-1}(\alpha(t))^{-\frac{2\omega-1}{\omega}}\right),\ t\in R_+, \qquad (45)$$

шығады.

(45)-тің орнына интегралдық теңдеулер жүйесін қарастырамыз

$$\hat{K}_\lambda \mu \equiv \mu(t) - \lambda \int_0^t \hat{K}(t,\tau)\mu(\tau)d\tau = \exp\left(-\frac{iz_k}{2\omega-1}(\alpha(t))^{-\frac{2\omega-1}{\omega}}\right), k = -N_1,...,0,....,N_{2,} \ t \in R_+ . \quad (46)$$

Әрі қарай (46)-нің әрбір теңдеуі жалғыз тривиалды емес шешімге ие болатындықтан, $\lambda \in C / D_0$ параметрінің әрбір мәні үшін $\mu_{\lambda k}(t)$, $k = -N_1,... 0, ..., N_2$, функциялары (44) біртекті теңдеудің сәйкес меншікті функциялары болып табылады (ендеше (17) біртекті теңдеуі үшін де орындалады).

Келесі леммалардың дұрыстығын дәлелдеу қиын емес.

Лемма 4. $\lambda \in D_0$ мәні K_2 (17) операторының регулярлық саны болып табылады.

Лемма 5. $C \setminus D_0$ жиыны K_2 (17) операторының характеристикалық санын құрайды. Сонымен қатар егер $\lambda \in D_m \cup \Gamma_{m-1} \setminus \left\{(-1)^m e^{m\pi}\right\}$, $m = 1,2,...,$ онда $\dim Ker(K_{2\lambda}) = \aleph(\lambda) = m$; және сәйкес меншікті функциялармен (46) теңдеуінің шешімі болады

$$\mu_{\lambda k}(t) = \left[\hat{K}_\lambda\right]^{-1}\left[\exp\left(-\frac{iz_k}{2\omega-1}(\alpha(t))^{-\frac{2\omega-1}{\omega}}\right)\right], \ k = 1,....,m = \aleph(\lambda) = N_1 + N_2 + 1 .$$

Ескерту 5. Біртекті емес (41) интегралдық теңдеуінің жалпы шешімі, (17) теңдеу сияқты, келесі функция болып табылады:

$$\mu_\lambda(t) = \left[\hat{K}_\lambda\right]^{-1}\hat{f}(t) + \sum_{k=1}^{m=N_1+N_2+1} c_k \mu_{\lambda k}(t), \quad t \in R_+ , \quad (47)$$

мұнда c_k, $k = 1, ..., m$ — кез келген тұрақты.

(17)-теңдеуге одақтас болып табылатын (22) интегралдық теңдеуін қарастырамыз. (22)-теңдеуінің ядросы әлсіз ерекшелікке ие екенін көрсетеміз, яғни

$$\lim_{t\to+\infty}\int_t^\infty K_2(\tau,t)d\tau = 0 .$$

Шынында

$$\lim_{t\to+\infty}\int_t^\infty \frac{\alpha(\tau)}{2\sqrt{\pi}(\tau-t)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{\alpha^2(\tau)}{4(\tau-t)}\right\}d\tau = \lim_{t\to+\infty}\int_t^\infty \frac{4}{\sqrt{\pi}(\alpha(\tau))^2}\left\{\frac{\alpha(\tau)}{2\sqrt{\tau-t}}\right\}^3 \exp\left\{-\left(\frac{\alpha(\tau)}{2\sqrt{\tau-t}}\right)^2\right\}d\tau \le$$

$$\le C\lim_{t\to+\infty}\int_t^\infty \frac{d\tau}{(\alpha(\tau))^2} \le \lim_{t\to+\infty}\int_t^\infty \frac{d\tau}{\tau^{2\omega}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t^{2\omega-1}} = 0,$$

бұндай жағдайда кез келген $\lambda \in C$ үшін сәйкес біртекті интегралдық теңдеулер тек қана тривиалдық шешімге ие.

Сонымен, 4-ші, 5-ші леммалардың тұжырымдарынан келесі лемманы аламыз.

Лемма 6.

1. $\lambda \in C$ әрбір мәні K_2^* (22) операторының регулярлық саны болып табылады.

2. Егер $\lambda \in D_0$ болса, онда (22) біртекті емес интегралдық теңдеуі $g_1(t)$-нің кез келген оң жақ бөлігінде бірмәнді шешіледі.

3. Егер $\lambda \in D_m \cup \Gamma_{m-1} \setminus \left\{(-1)^m e^{m\pi}\right\}$, $m = 1,2,...$ болса, онда (22) біртекті емес интегралдық теңдеуінің біртекті шешімділігі үшін, $g_1(t)$ функциясы келесі ортогоналдық шарттарды қанағаттандыруы қажетті және жеткілікті

$$\int_0^\infty \mu_{\lambda k}(t)g_1(t)dt = 0, \ \ k = 1,.....,m = \aleph(\lambda) = N_1 + N_2 + 1 . \quad (48)$$

Ескерту 6. 6-лемманың тұжырымдамасына сәйкес (22) біртекті емес интегралдық теңдеудің шешімі келесі функция болады:

$$v_\lambda(t) = \left[K_{2\lambda}^*\right]^{-1} g_1(t), \ t \in R_+ . \quad (49)$$

Ескерту 7. Жоғарыдағы қорытындылардан міндетті түрде

$$\mu_\lambda(t) \in M(R_+), \ \ v_\lambda(t) \in L_1(R_+) \quad (50)$$

екені шығады.

5. (1) және (2) шекаралық есептерін зерттеу. (11)-ге сәйкес (1) есебінің шешуін мына түрде жазамыз:

$$u(x,t) = -\lambda\int_0^t \left(\alpha(\tau)\right)^{\frac{\omega-3/2}{\omega}} K_0(x,t-\tau)\mu_\lambda(\tau)d\tau + \int_0^t\int_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau, \qquad (51)$$

мұнда $\mu_\lambda(t)$ (47) және $\left(\alpha(t)\right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} f(x,t)$ функциялары сәйкес R_+ және Q-да шектелген және үзіліссіз болып табылады. $K_0(x,t-\tau)$ (13) және $G(x,\xi,t-\tau)$ (12) функцияларының теріс еместігін ескеріп, (51)-ден келесі бағаны аламыз:

$$\left|u(x,t)\right| \le \left(C_1|\lambda| + C_2\right)\int_0^t \left(\alpha(\tau)\right)^{\frac{\omega-3/2}{\omega}} K_0(x,t-\tau)d\tau \le C_{3\lambda}t^{\omega-1}\left(x+t^{1/2}\right), \qquad (52)$$

мұнда $C_{3\lambda} = C_1|\lambda| + C_2$.

$u(x,t)$ (51) шешімінің туындылары үшін келесі қатынас дұрыс:

$$\left(\alpha(t)\right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\left[u_t(x,t) - u_{xx}(x,t)\right] = -\lambda\mu(t) + \left(\alpha(t)\right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} f(x,t) \in M(Q). \qquad (53)$$

Сонымен, (51) функциясы (53) қатынасы мағынасында (1)-дегі теңдеуді қанағаттандырады. Міндетті түрде $u(x,t)$ шешімі үшін (1)-дегі бастапқы және шекаралық шарттардың орындалуы тексеріледі. Мұндай жағдайда (52) және (53)-ке сәйкес (51) функциясы (1) шекаралық есебін қанағаттандырады және U класына тиісті.

Әрі қарай (20)-ға сәйкес (2)-ші есептің шешімін мына түрде жазамыз:

$$\upsilon(x,t) = -\lambda\int_t^\infty \left(\alpha(\tau)\right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} G_{\xi\xi}(x,\xi,\tau-t)\big|_{\xi=\alpha(\tau)} v_\lambda(\tau)d\tau + \int_t^\infty\int_0^\infty G(x,\xi,\tau-t)g(\xi,\tau)d\xi d\tau, \qquad (54)$$

мұнда $v_\lambda(t) \in L_1(R_+)$.

$\upsilon(x,t)$ функциясы V класынан болуы үшін келесі шарттың орындалуы жеткілікті:

$$\left(\alpha(t)\right)^{\frac{\omega-3/2}{\omega}}\int_t^\infty \left(\alpha(\tau)\right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} G_{\xi\xi}(x,\xi,\tau-t)\big|_{\xi=\alpha(\tau)} v(\tau)d\tau \in L_1(Q); \qquad (55)$$

$$\left(\alpha(t)\right)^{\frac{\omega-3/2}{\omega}}\int_t^\infty\int_0^\infty G(x,\xi,\tau-t)g(\xi,t)d\xi dt \in L_1(Q). \qquad (56)$$

Алынған қорытындыларды (1) және (2) шекаралық есептерінің шешімділігі бойынша келесі теорема түрінде тұжырымдаймыз.

Теорема 3. *Егер* $\lambda \in D_0$ (50) *болса, онда* $\forall f$ (5) *үшін* (1) *шекаралық есеп* $u \in U$ *жалғыз шешімге ие болады. Егер* $\lambda \in \left\{C \setminus D_0\right\} \cap \left\{D_m \cup \Gamma_{m-1} \setminus \left\{(-1)^m e^{m\pi}\right\}\right\}$ (50) *болса, онда* $\forall f$ (5) *үшін* (1) *шекаралық есебі біртекті теңдеудің* $u_{\text{бірт}}(x,t)$ *шешімдерінен тұратын жалпы* $u \in U$ *шешімге ие болады*

$$u_{\text{бірт}}(x,t) = \sum_{k=1}^m c_k u_{\lambda k}(x,t);$$

$$u_{\lambda k}(x,t) = -\lambda\int_0^t \left(\alpha(\tau)\right)^{\frac{\omega-3/2}{\omega}} K_0(x,t-\tau)\mu_{\lambda k}(\tau)d\tau, \quad k = 1,..,m,$$

мұнда $\mu_{\lambda k} = \left[\hat{K}_\lambda\right]^{-1}\left[\exp\left(-\dfrac{iz_k}{2\omega-1}\left(\alpha(t)\right)^{-\frac{2\omega-1}{\omega}}\right)\right]$, $k = 1,...,m$, c_k, $k = 1,..,m$ — *кез келген тұрақтылар, жеке шешім* $u_{\text{дерб}}(x,t)$*;*

$$u_{\text{дерб}}(x,t) = -\lambda\int_0^t \left(\alpha(\tau)\right)^{\frac{\omega-3/2}{\omega}} K_0(x,t-\tau)\left[\hat{K}_\lambda\right]^{-1}\hat{f}(\tau)d\tau + \int_0^t\int_0^\infty \left(\alpha(\tau)\right)^{\frac{\omega-3/2}{\omega}} G(x,\xi,t-\tau)\tau^{3/2-\omega}f(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

Теорема 4. *Егер* $\lambda \in D_0$ *болса, онда* $\forall f$ (5) *үшін* (2) *шекаралық есеп* $\upsilon \in V(7)$ *жалғыз шешімге ие болады. Егер* $\lambda \in \left\{C \setminus D_0\right\} \cap \left\{D_m \cup \Gamma_{m-1} \setminus \left\{(-1)^m e^{m\pi}\right\}\right\}$ *болса, онда* (2) *шекаралық есептің* $V(7)$

класында бірмәнді шешімділігі үшін g (5) *функциясы ортогоналдық шарттарды қанағаттандыруы қажетті және жеткілікті*

$$\int\limits_0^\infty u_{\lambda k}(x,t)\,g(x,t)\,dxdt = 0,\quad k = 1,......,m = \aleph(\lambda) = N_1 + N_2 + 1\,.$$

6. L_1 **(3) және** L_1^* **(4) операторларының спектрі туралы.** 4–5 леммалардың тұжырымдарынан төмендегі басты теоремаларды аламыз:

Теорема 5. D_0 *ашық жиыны* L_1 (3) *операторы үшін резольвентті, ал оның толықтауышы* $C \setminus D_0$ L_1 (3) *операторының спектрін құрайды. Сонымен қоса егер* $\lambda \in \left\{D_m \cup \Gamma_{m-1} \setminus \left\{(-1)^m e^{m\pi}\right\}\right\}$, $m = 1, 2, \ldots,$ *болса, онда* $\dim Ker(L_1) = \aleph(\lambda) = m$, *және* L_1 (3) *операторының сәйкес меншікті функциялары мына формуламен анықталады:*

$$u_{\lambda k} = -\lambda \int\limits_0^t \tau^{\omega - 3/2} K_0(x, t-\tau)\,\mu_\lambda(\tau)\,d\tau,\quad m = \aleph(\lambda) = N_1 + N_2 + 1,$$

мұнда

$$\mu_{\lambda k}(t) = \left[\hat{K}_\lambda\right]^{-1}\left[\exp\left(-\frac{iz_k}{2\omega - 1}\left(\alpha(t)\right)^{-\frac{2\omega-1}{\omega}}\right)\right],\quad k = 1,....,m = \aleph(\lambda) = N_1 + N_2 + 1\,.$$

Теорема 6. $\lambda \in C$ *мәндерінің жиыны* L_1^* (4) *операторының резольвентті жиыны болады.*

Әдебиеттер тізімі

1. *Дженалиев М.Т., Шалдықова Б.А., Құсайынова Б.С.* Жылуөткізгіштік спектралды-жүктелген операторы үшін шекаралық есебі // ҚарМУ хабаршысы. Математика сер. — 2010. — № 1(57). — 15–21-б.
2. *Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И.* Об одной граничной задаче для спектрально-нагруженного оператора теплопроводности I // Дифференциальные уравнения. — Алматы, 2007. — Т. 43. — № 4. — С. 498–508.
3. *Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И.* Об одной граничной задаче для спектрально-нагруженного оператора теплопроводности II // Дифференциальные уравнения. — Алматы, 2007. — Т. 43. — № 6. — С. 788–794.