21. *Nursultanov E.D.* Network spaces and inequalities of Hardy-Littlewood type // Mat. Sb. — 1998. — Vol. 189. — № 3. — P. 83–102 [In Russian].
22. *Carro M. J., Raposo J. A.* and *Soria J.* Recent Developments in the Theory of Lorentz Spaces and Weighted Inequalities // Mem. Amer. Math. Soc. — Vol. 187. — 2007.

УДК 517.956.3

О граничной задаче для спектрально-нагруженного параболического оператора

On the boundary value problem for the spectrally loaded parabolic operator

Солдатов А.П.[1], Рамазанов М.И.[2], Шалдыкова Б.А.[3]

[1]*Белгородский государственный университет, Россия;*
[2]*Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова;*
[3]*Рудненский индустриальный институт (E-mail: bahyt21@mail.ru)*

Мақалада шектелмеген аймақтарда жүктеме қосылғышының туындысының реті теңдеудің дифференциалдық бөлігінің ретіне тең және жүктеме нүктесі кеңістік айнымалысы бойынша айнымалы жылдамдықпен қозғалатын параболалық типті спектралды-жүктелген теңдеулер үшін шекаралық есептер зерттеледі. Бұл жағдайда жүктелген дифференциалдық оператордың әлсіз ауытқуы бар операторларға тән емес жаңа қасиеттері пайда болады. Алдында қарастырылған [1–5] есептерден айырмашылығы, жүктеме нүкте $x = \alpha(t)$ бұл жерде $\alpha(t) = \left[t(1+\alpha(t)\right]^{\omega}$, $\omega < 1/2$ заңы бойынша қозғалады.

The object of this research is to investigate the boundary value problems for the spectrally-loaded parabolic equations in unbounded domain, when the order of initial in a loaded term is equal to the order of a differential part of equation and loaded point in space variable moves with variable speed. In this case new properties of the loaded differential operator are manifested, which are not inherited by operators with little disturbance. They require a special theoretical research. In contradistinction to earlier discussed problems [1–5] th loaded point is moving according to law $x = \alpha(t)$, where $\alpha(t) = \left[t(1+\alpha(t)\right]^{\omega}$, $\omega < 1/2$

1. Постановки задач. Рассмотрим в области Q = $\left\{x \in R_+, t \in R_+\right\}$ граничные задачи для спектрально-нагруженного уравнения теплопроводности

$$L_\lambda u = f \Leftrightarrow \begin{cases} u_t - u_{xx} + \lambda u_{xx}(x,t)\Big|_{x=\alpha(t)} = f; \\ u(x,0) = 0, u(0,t) = 0; \end{cases} \tag{1}$$

$$L_\lambda^* v = g \Leftrightarrow \begin{cases} -v_t - v_{xx} + \bar{\lambda}\delta''(x-\alpha(t)) \otimes \int\limits_0^\infty v(\xi,t)d\xi = g; \\ v(x,\infty) = 0, v(0,t) = v(\infty,t) = v_x(\infty,t) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

и обобщенные спектральные задачи

$$L_1 u = -\lambda u_{xx}\left(x,t\right)_{|x=\alpha(t)} \Leftrightarrow \begin{cases} u_t - u_{xx} = -\lambda u_{xx}(x,t)_{|x=\alpha(t)}; \\ u(x,0) = 0, u(0,t) = 0; \end{cases} \tag{3}$$

$$L_1^* v = -\bar{\lambda} \cdot \delta''(x-\alpha(t)) \otimes \int\limits_0^\infty v(\xi,t)d\xi \Leftrightarrow \begin{cases} -v_t - v_{xx} = -\bar{\lambda} \cdot \delta''(x-\alpha(t)) \otimes \int\limits_0^\infty v(\xi,t)d\xi; \\ v(x,\infty) = 0, v(0,t) = v(\infty,t) = v_x(\infty,t) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Заданные функции выбираются из классов

$$\left(\alpha(t)\right)^{\frac{\omega-3/2}{\omega}} f \in L_1(Q),\ \left(\alpha(t)\right)^{-1}(x+\sqrt{t})\ g \in L_\infty(Q));$$

$$\left(\alpha(t)\right)^{\frac{\omega-3/2}{\omega}}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_0^t\int\limits_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau\right)_{|x=\alpha(t)}\in L_1(R_+)\,. \tag{5}$$

$\delta(x-t)\in \mathrm{E}'(\mathrm{Q})$ — дельта-функция, сосредоточенная на открытой линии $\mathrm{x}=\alpha(\mathrm{t})$ области Q; $\mathrm{E}'(\mathrm{Q})$ — пространство обобщенных функций с компактным носителем в области Q,

$$erfz\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^a \exp(-\xi^2)d\xi\,,$$

функция Грина $G(x,\xi,t-\tau)$ определена формулой

$$G(x,\xi,t-\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\left\{\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right)-\exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4t}\right)\right\}. \tag{6}$$

Замечание 1. Если функция f не зависит от переменной x, то второе условие для функции f из (5) следует из первого $\left(\alpha(t)\right)^{\frac{\omega-3/2}{\omega}} f\in L_1(Q)$.

В задачах (1)–(4) предполагается, что движение точки нагрузки описывается функцией $x(t)=\alpha(t)$ при условии $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\alpha(t)}{\sqrt{t}}=\infty$.

Функциональные классы U и V для решений граничных задач и области определения операторов L и L* D (L) и D (L*) определены следующим образом:

$$U=\left\{u\left|\alpha(t)(x+\sqrt{t})^{-1}u,\left(\alpha(t)\right)^{\frac{\omega-3/2}{\omega}}(u_t-u_{xx})\in L_1(Q),\left(\alpha(t)\right)^{\frac{\omega-3/2}{\omega}}u_{xx}(x,t)_{|x-\alpha(t)}\in L_1(R_+)\right.\right\}; \tag{7}$$

$$V=\left\{v\left|\left(\alpha(t)\right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}v,\ \left(\alpha(t)\right)^{-1}(x+\sqrt{t})(v_t+v_{xx})\in L_\infty(Q),\ \left(\alpha(t)\right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\int\limits_0^\infty v(\xi,t)d\xi\in L_\infty(R_+)\right.\right\}; \tag{8}$$

$$K_2'(t_1,\tau_1)=P_2'(t_1,\tau_1)e^{-Q_2'(t_1,\tau_1)}; \tag{9}$$

$$D(L_\lambda^*)\equiv D(L_1^*)=\left\{v\left|v\in V, v(x,\infty)=0, v(0,t)=0, v(\infty,t)=0, v_x(\infty,t)=0\right.\right\}. \tag{10}$$

Граничная задача (2) является сопряженной к задаче (1). Действительно, согласно (1)–(10) имеем

$$<Lu,v>=<u,L^*v>\ \forall u\in D(L),\forall v\in D(L^*)\,. \tag{11}$$

Задача 1. Требуется исследовать вопросы разрешимости граничных задач (1) и (2) при условиях (5)–(10).

Задача 2. Требуется исследовать спектральные задачи (3) и (4) по определению пар $\left\{\lambda,u_\lambda(x,t)\right\}$ и $\left\{\lambda,v_\lambda(x,t)\right\}$ при условиях (7)–(10).

2. Сведение краевых задач к интегральным уравнениям. Сведем граничные задачи (1) и (2) к исследованию союзных особых интегральных уравнений Вольтерра второго рода. С этой целью обратив дифференциальную часть в граничной задаче (1), будем иметь

$$u(x,t)=-\lambda\int\limits_0^t erf\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)u_{\eta\eta}(\eta,\tau)\Big|_{\eta=\alpha(\tau)}d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau; \tag{12}$$

где

$$K_0(x,t-\tau)=\int\limits_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)d\xi=erf\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right). \tag{13}$$

Из соотношения (12) следует, что для нахождения решения задачи (1) достаточно определить нагруженное слагаемое $u_{xx}(x,t)_{|x=\alpha(t)}$. Для этого продифференцируем обе части соотношения (12) по переменной *x* дважды и, введя следующие обозначения:

$$\mu(t)=\left(\alpha(t)\right)^{\frac{\omega-3/2}{\omega}}u_{xx}(x,t)_{|x=\alpha(t)}, \tag{14}$$

$$K_2(t,\tau)=\left[\frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)}\right]^{\frac{\omega-3/2}{\omega}}\cdot\frac{\alpha(t)}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}\exp\left(-\frac{(\alpha(t))^2}{4(t-\tau)}\right); \tag{15}$$

$$f_1(t)=(\alpha(t))^{\frac{\omega-3/2}{\omega}}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_0^t\int\limits_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau\right)_{|x=\alpha(t)}, \tag{16}$$

получим интегральное уравнение

$$\mathrm{K}_{2\lambda}\mu\equiv(I-\lambda\mathrm{K}_2)\mu\equiv\mu(t)-\lambda\int\limits_0^t K_2(t,\tau)\mu(\tau)d\tau=f_1(t),\ t\in R_+. \tag{17}$$

Замечание 2. Заметим, что ограниченность функции $f_1(t)$ (16) на R_+ следует из условия (5) на f.

Ядро интегрального уравнения $K_2(t,\tau)$ обладает следующими свойствами:

– 1^0 ядро $K_2(t,\tau)$ непрерывно, $0<\tau<t<\infty$;

– 2^0 ядро $K_2(t,\tau)\ge 0$, $0<\tau<t<\infty$;

– 3^0 справедливо предельное соотношение

$$\lim_{t\to+0}\int\limits_0^t K_2(t,\tau)d\tau=0. \tag{18}$$

Доказательство свойства 3^0:

$$\lim_{t\to+0}\int\limits_0^t K_2(t,\tau)d\tau=\lim_{t\to+0}\int\limits_0^t\left[\frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)}\right]^{\frac{\omega-3/2}{\omega}}\frac{\alpha(t)}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}exp\left(-\frac{(\alpha(t))^2}{4(t-\tau)}\right)d\tau=$$

$$=\lim_{t\to+0}\int\limits_0^t\left[\frac{\alpha(\tau)}{\alpha(t)}\right]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\frac{4}{\sqrt{\pi}(\alpha(t))^2}\cdot\left(\frac{\alpha(t)}{2\sqrt{t-\tau}}\right)^3\exp\left(-\frac{(\alpha(t))^2}{4(t-\tau)}\right)d\tau\le$$

$$\le\lim_{t\to+0}\frac{4}{\sqrt{\pi}}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot e^{-\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{[t(1+\alpha_0(t))]^{2\omega}}\int\limits_0^t d\tau\le\lim_{t\to+0}\frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3}{2}}t^{1-2\omega}=0.$$

Здесь были использованы условия $0<\tau<t<\infty$, $\frac{3}{2}-\omega>1$ и неравенство

$$z^m\exp(-z^n)\le\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n}}\exp\left(-\frac{m}{n}\right)\text{ для любого z>0,}$$

а также, что $\alpha(t)=[t(1+\alpha_0(t))]^\omega$ и $1+\alpha_0(t)\le C$.

Замечание 3. Из соотношения (18) следует, что интегральное уравнение (17) относится к «вольтерровым», для которых решение существует и единственно.

Теперь перейдем к рассмотрению сопряженной краевой задачи (2) и, обращая ее дифференциальную часть, получим:

$$v(x,t)=-\overline{\lambda}\int\limits_t^\infty\int\limits_0^\infty G(x,\xi,\tau-t)\delta''(\xi-\alpha(\tau))\otimes\int\limits_0^\infty v(\eta,\tau)d\eta d\xi d\tau+$$

$$+\int\limits_t^\infty\int\limits_0^\infty G(x,\xi,\tau-t)g(\xi,\tau)d\xi d\tau. \tag{19}$$

Интегрируя соотношение (19) по переменной x от 0 до ∞ и обозначая

$$v(t)=(\alpha(t))^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\int\limits_0^\infty \nu(\eta,t)d\eta, \tag{20}$$

получим интегральное уравнение

$$\mathrm{K}^*_{2\lambda}\nu\equiv(I-\overline{\lambda}\mathrm{K}^*_2)\nu\equiv\upsilon(t)-\overline{\lambda}\int\limits_t^\infty K_2(\tau,t)\upsilon(\tau)d\tau=g_1(t),\quad t\in R_+, \tag{21}$$

где были использованы следующие обозначения:

$$K_2(\tau,t)=\left(\frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)}\right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\frac{\alpha(\tau)}{2\sqrt{\pi}(\tau-t)^{3/2}}\exp\left(-\frac{\left(\alpha(\tau)\right)^2}{4(\tau-t)}\right); \tag{22}$$

$$g_1(t)=\left(\alpha(t)\right)^{\frac{3/2.-\omega}{\omega}}\int\limits_t^\infty\int\limits_0^\infty erf\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau-t}}\right)g(\xi,\tau)d\xi d\tau. \tag{23}$$

Замечание 4. Заметим, что интегрируемость функции $g_1(t)$ (23) на R_+ следует из условия (5) на g.

Отметим, что ядро сопряженного интегрального уравнения (21) обладает следующим свойством:

$$\lim_{t\to\infty}\int\limits_t^\infty K_2(\tau,t)d\tau=1. \tag{24}$$

Из предельного соотношения (24) следует, что норма интегрального оператора, действующего в пространстве ограниченных и непрерывных функций и определенного ядром $K_{2\lambda}^*$, равна единице (хотя ядро $K_{2\lambda}^*$ имеет интегрируемую особенность). Это принципиальным образом отличает уравнение (21) от уравнений Вольтерра второго рода.

Таким образом, решение сопряженных граничных задач (1), (2) сведено к исследованию пары союзных интегральных уравнений (17) и (21), которые в дальнейшем будем называть исходными.

3. Характеристические интегральные уравнения. Рассмотрим характеристические интегральные уравнения, соответствующие интегральным уравнениям (17) и (21):

$$\mathrm{K}_\lambda\mu\equiv\left(I-\lambda\mathrm{K}\right)\mu\equiv\mu(t)-\lambda\int\limits_0^t K(t,\tau)\mu(\tau)d\tau=f_1(t),\ t\in R_+; \tag{25}$$

$$\mathrm{K}_\lambda^*\nu\equiv\left(I-\bar{\lambda}\mathrm{K}^*\right)\nu\equiv\upsilon(t)-\bar{\lambda}\int\limits_t^\infty K(\tau,t)\upsilon(\tau)d\tau=g_1(t),\ t\in R_+, \tag{26}$$

где

$$K(\tau,t)=\left(\frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)}\right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\cdot\frac{(1-2\omega)^{3/2}\left[\alpha(\tau)\right]^{-2}\left(\left[\alpha(\tau)\right]^{\frac{1}{\omega}}\right)'}{2\sqrt{\pi}\left(\left[\alpha(\tau)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}-\left[\alpha(t)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}\right)^{3/2}}\times$$

$$\times exp\left(-\frac{1-2\omega}{4\left(\left[\alpha(t)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}-\left[\alpha(\tau)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}\right)}\right). \tag{27}$$

Ядро характеристического уравнения $K(\tau,t)$ обладает теми же свойствами, что и ядро $K_2(\tau,t)$, и для него справедливо следующее предельное соотношение:

$$\lim_{t\to\infty}\int\limits_t^\infty K(\tau,t)d\tau=1. \tag{28}$$

Покажем, что разность ядер $\tilde{K}(\tau,t)=K_2(\tau,t)-K(\tau,t)$ должна обладать слабой особенностью. Это следует из утверждения следующей теоремы.

Теорема 1. Если функция $\alpha(t)=\left[t(1+\alpha_0(t))\right]^\omega$, где $\alpha_0(t)=t^\beta\sigma(t),\beta>0$, а функция $\sigma(t)$ дважды непрерывно дифференцируема при $0<t<\tau<\infty$ и $\left|\sigma(t)\right|\le C$, $\sigma(t)\ne 0$, тогда имеет место оценка

$$\left|K_2(\tau,t)-K(\tau,t)\right|\le C(\omega)\left[\frac{\alpha(\tau)}{\alpha(t)}\right]^{-\frac{\omega-3/2}{\omega}}\frac{t^{1/2+\omega}}{\tau^{3/2}\sqrt{\tau-t}}\times$$

$$\times\left[\exp\left((2\omega-1)\frac{\left[\alpha(t)\right]^{\frac{2\omega-1}{\omega}}\left[\alpha(\tau)\right]^{\frac{2\omega-1}{\omega}}}{8\left(\left[\alpha(t)\right]^{\frac{2\omega-1}{\omega}}-\left[\alpha(\tau)\right]^{\frac{2\omega-1}{\omega}}\right)}\right)+\exp\left(\frac{\left(\alpha(t)\right)^2}{8(t-\tau)}\right)\right]. \tag{29}$$

Для доказательства данной теоремы сведем интегральные уравнения (21) и (26) к уравнениям на конечном промежутке $(0,t)$. Для этого в данных уравнениях произведем замены переменных

$$\alpha(t)=\frac{1}{\alpha(t_1)},\ \alpha(\tau)=\frac{1}{\alpha(\tau_1)}.$$

Тогда интегральные уравнения (21) и (26) примут соответственно вид

$$\nu(t_1)-\bar{\lambda}\int_0^{t_1}\left[\frac{\alpha(\tau_1)}{\alpha(t_1)}\right]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\frac{\tau_1^{-1/2}t_1^{3/2}\left[\alpha(\tau_1)\right]^{-1}}{2\sqrt{\pi}(t_1-\tau_1)^{3/2}}\exp\left(-\frac{t_1\tau_1\left[\alpha(\tau_1)\right]^{-2}}{4(t_1-\tau_1)}\right)\nu(\tau_1)d\tau_1=g_1(t_1); \tag{30}$$

$$\nu(t_1)-\bar{\lambda}\int_0^{t_1}\left[\frac{\alpha(\tau_1)}{\alpha(t_1)}\right]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\frac{(1-2\omega)^{3/2}}{2\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\left[\alpha(t_1)\right]^{\frac{3/2(1-2\omega)}{\omega}}\left[\alpha(\tau_1)\right]^{-\frac{1+2\omega}{2\omega}}\left[\alpha(\tau_1)^{\frac{1}{\omega}}\right]'}{\left(\left[\alpha(t_1)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}-\left[\alpha(\tau_1)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}\right)^{3/2}}\times$$

$$\times exp\left(-\frac{(1-2\omega)\left[\alpha(t_1)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}\left[\alpha(\tau_1)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}}{4\left(\left[\alpha(t_1)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}-\left[\alpha(\tau_1)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}\right)}\right)\nu(\tau_1)d\tau_1=g_1(t_1). \tag{31}$$

Обозначим ядра уравнений (30) и (31) через $K_2'(t_1,\tau_1)$ и $K'(t_1,\tau_1)$ и запишем их в виде

$$K_2'(t_1,\tau_1)=P_2'(t_1,\tau_1)e^{-Q_2'(t_1,\tau_1)},\ \ K'(t_1,\tau_1)=P'(t_1,\tau_1)e^{-Q'(t_1,\tau_1)}, \tag{32}$$

где

$$P_2'(t_1,\tau_1)=\left(\frac{\alpha(\tau_1)}{\alpha(t_1)}\right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\frac{\tau_1^{-1/2}t_1^{3/2}\left[\alpha(\tau_1)\right]^{-1}}{2\sqrt{\pi}(t_1-\tau_1)^{3/2}},\ Q_2'(t_1,\tau_1)=\frac{t_1\tau_1\left[\alpha(\tau_1)\right]^{-2}}{4(t_1-\tau_1)};$$

$$P'(t_1,\tau_1)=\left(\frac{\alpha(\tau_1)}{\alpha(t_1)}\right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\frac{(1-2\omega)^{3/2}}{2\sqrt{\pi}}\frac{\left[\alpha(t_1)\right]^{\frac{3/2(1-2\omega)}{\omega}}\left[\alpha(\tau_1)\right]^{-\frac{1+2\omega}{2\omega}}\left[\alpha(\tau_1)^{\frac{1}{\omega}}\right]'}{\left(\left[\alpha(t_1)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}-\left[\alpha(\tau_1)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}\right)^{3/2}};$$

$$Q'(t_1,\tau_1)=\frac{(1-2\omega)\left[\alpha(t_1)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}\left[\alpha(\tau_1)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}}{4\left(\left[\alpha(t_1)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}-\left[\alpha(\tau_1)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}\right)}.$$

Справедлива следующая

Теорема 2. Если функция $\alpha(t_1)=\left[t_1(1+\alpha_0(t_1))\right]^{\omega}$, где $\alpha_0(t)=t^{\beta}\sigma(t),\beta>0$, а функция $\sigma(t_1)$ дважды непрерывно дифференцируема при $0<\tau_1<t_1<\infty$, и $\left|\sigma(t_1)\right|\le C$, $\sigma(t_1)\ne 0$, тогда имеет место оценка

$$\left|K'(t_1,\tau_1)-K_2'(t_1,\tau_1)\right|\le C(\omega)\left[\frac{\alpha(\tau_1)}{\alpha(t_1)}\right]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\frac{t_1^{-\omega}}{\sqrt{t_1-\tau_1}}\times$$

$$\times\left[\exp\left\{-Q'(t_1,\tau_1)/2\right\}+\exp\left\{-Q_2'(t_1,\tau_1)/2\right\}\right]. \tag{33}$$

Предварительно докажем несколько лемм.

Лемма 1. Если функция $\alpha(t_1)=\left[t_1(1+\alpha_0(t_1))\right]^{\omega}$, где $\alpha_0(t)=t^{\beta}\sigma(t),\beta>0$ и $\alpha_0(t)$, монотонно возрастает при $0<\tau_1<t_1<\infty$, $\left|\sigma(t_1)\right|\le C$, тогда имеет место оценка

$$\left|P'(t_1,\tau_1)-P_2'(t_1,\tau_1)\right|\le\bar{M}\left[\frac{\alpha(\tau_1)}{\alpha(t_1)}\right]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\cdot\frac{t_1^{1-\omega+\beta}}{(t_1-\tau_1)^{3/2}}.$$

Доказательство леммы 1.

$$\left|P'(t_1,\tau_1)-P_2'(t_1,\tau_1)\right|=\left[\frac{\alpha(\tau_1)}{\alpha(t_1)}\right]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\left|\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\cdot\frac{(1-2\omega)^{3/2}\left[\alpha(t_1)\right]^{\frac{3}{2}\cdot\frac{1-2\omega}{\omega}}\left[\alpha(\tau_1)\right]^{\frac{-1-2\omega}{2\omega}}\left(\left[\alpha(\tau_1)\right]^{\frac{1}{\omega}}\right)'}{\left(\left[\alpha(t_1)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}-\left[\alpha(\tau_1)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}\right)^{3/2}}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\cdot\frac{t_1^{3/2}\tau_1^{-1/2}\left[\alpha(\tau_1)\right]^{-1}}{\left(t_1-\tau_1\right)^{3/2}}\right|=\left[\frac{\alpha(\tau_1)}{\alpha(t_1)}\right]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\cdot\left(\left[\alpha(t_1)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}-\left[\alpha(\tau_1)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}\right)^{-3/2}\times$$

$$\times\left|(1-2\omega)^{3/2}\left[\alpha(t_1)\right]^{\frac{3}{2}\cdot\frac{1-2\omega}{\omega}}\left[\alpha(\tau_1)\right]^{\frac{-1-2\omega}{2\omega}}\left(\left[\alpha(\tau_1)\right]^{\frac{1}{\omega}}\right)'-t_1^{3/2}\tau_1^{-1/2}\left[\alpha(\tau_1)\right]^{-1}\cdot\left(\frac{\left[\alpha(t_1)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}-\left[\alpha(\tau_1)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}}{t_1-\tau_1}\right)^{3/2}\right|=$$

$$=\left[\frac{\alpha(\tau_1)}{\alpha(t_1)}\right]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\left(\left[\alpha(t_1)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}-\left[\alpha(\tau_1)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}\right)^{3/2}}\left|(1-2\omega)^{3/2}\left[t_1(1+\alpha_0(t_1))\right]^{\frac{3-6\omega}{2}}\left[\tau_1(1+\alpha_0(\tau_1))\right]^{\frac{-1-2\omega}{2}}\times\right.$$

$$\left.\times\left(1+\alpha_0(\tau_1)+\tau_1\alpha_0'(\tau_1)\right)-t_1^{3/2}\tau_1^{-1/2}\left[\tau_1(1+\alpha_0(\tau_1))\right]^{-\omega}\left\{\left(\left[\alpha(\tau_1)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}\right)'_{|\tau_1=t_1}-\frac{1}{2}\left(\left[\alpha(\tau_1)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}\right)''_{|\tau_1=t_2}(t_1-\tau_1)\right\}^{3/2}\right|,$$

$$t_2=\tau_1+\theta_2(t_1-\tau_1),\ 0<\theta_2<1.$$

Так как $\alpha(t_1)=\left[t_1(1+\alpha_0(t_1))\right]^{\omega}$, то получим

$$\left|P_2(t,\tau)-P(t,\tau)\right|\le\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[\frac{\alpha(\tau_1)}{\alpha(t_1)}\right]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\frac{(1-2\omega)^{3/2}\left[t_1(1+\alpha_0(t_1))\right]^{\frac{3}{2}-3\omega}\left[\tau_1(1+\alpha_0(\tau_1))\right]^{\frac{-1-2\omega}{2}}}{\delta^{3/2}(\omega)\left[t_1(1+\alpha_0(t_1))\right]^{-3\omega}\left(1+\alpha_0(t_1)+t_1\alpha_0'(t_1)\right)^{3/2}(t_1-\tau_1)^{3/2}}\times$$

$$\times\left|\left(1+\alpha_0(\tau_1)+\tau_1\alpha_0'(\tau_1)\right)-\left(1+\alpha_0(t_1)+t_1\alpha_0'(t_1)\right)^{3/2}\left\{1+\omega\left[t_1(1+\alpha_0(t_1))\right]^{-1}\left(1+\alpha_0(t_1)+t_1\alpha_0'(t_1)\right)(t_1-\tau_1)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2}\left(1+\alpha_0(t_1)+t_1\alpha_0'(t_1)\right)^{-1}\left(2\alpha_0'(t_2)+t_2\alpha_0''(t_2)\right)(t_1-\tau_1)\right\}^{3/2}\right|.$$

Итак, окончательно получим

$$\left|P'(t_1,\tau_1)-P_2'(t_1,\tau_1)\right|\le\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[\frac{\alpha(\tau_1)}{\alpha(t_1)}\right]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\frac{(1-2\omega)^{3/2}}{\delta^{3/2}(\omega)}\cdot\frac{2^{\omega}t_1^{1-\omega}\alpha_0(t_1)}{(t_1-\tau_1)^{3/2}}\le\bar{M}\left[\frac{\alpha(\tau_1)}{\alpha(t_1)}\right]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\frac{t_1^{1-\omega+\beta}}{(t_1-\tau_1)^{3/2}}.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. При выполнении условий леммы 1 имеем

$$\left|Q'(t_1,\tau_1)-Q_2'(t_1,\tau_1)\right|\le M_1\frac{t_1^{2\omega+\beta}}{t_1-\tau_1}+M_2t_1^{2\omega-1}.$$

Доказательство леммы 2.

Имеем

$$\left|Q'(t_1,\tau_1)-Q_2'(t_1,\tau_1)\right|=\left|\frac{t_1\tau_1\left[\alpha(\tau_1)\right]^{-2}}{4(t_1-\tau_1)}-(1-2\omega)\frac{\left[\alpha(t_1)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}\left[\alpha(\tau_1)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}}{4\left(\left[\alpha(t_1)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}-\left[\alpha(\tau_1)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}\right)}\right|=$$

$$=\frac{1-2\omega}{4}\frac{\left[\alpha(t_1)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}\left[\alpha(\tau_1)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}}{\left[\alpha(t_1)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}-\left[\alpha(\tau_1)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}}\left|\frac{t_1\tau_1\left[\alpha(\tau_1)\right]^{-2}\left(\left[\alpha(t_1)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}-\left[\alpha(\tau_1)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}\right)}{(1-2\omega)(t_1-\tau_1)\left[\alpha(t_1)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}\left[\alpha(\tau_1)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}}-1\right|\le$$

$$\le \frac{1-2\omega}{4}\frac{\left[t_1(1+\alpha_0(t_1))\right]^{1-2\omega}\left[\tau_1(1+\alpha_0(\tau_1))\right]^{1-2\omega}}{\left[t_1(1+\alpha_0(t_1))\right]^{1-2\omega}-\left[\tau_1(1+\alpha_0(\tau_1))\right]^{1-2\omega}}\times$$

$$\times\left|t_1\tau_1\left[t_1(1+\alpha_0(t_1))\right]^{2\omega-1}\left[\tau_1(1+\alpha_0(\tau_1))\right]^{-1}\frac{\left\{\left(\left[\alpha(\tau_1)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}\right)'_{|\tau_1=t_1}-\frac{1}{2}\left(\left[\alpha(\tau_1)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}\right)''_{|\tau_1=t_2}(t_1-\tau_1)\right\}}{(1-2\omega)}-1\right|\le$$

$$\le\frac{(1-2\omega)2^{2-2\omega}}{4\delta(\omega)}\frac{t_1^{2\omega}}{(t_1-\tau_1)}(\alpha_0(t_1)+t_1\alpha_0'(t_1))+\frac{(1-2\omega)\omega}{4\delta(\omega)}2^{2\omega-1}t_1^{2\omega-1}-\frac{(1-2\omega)}{4\delta(\omega)}2^{2\omega}t_1^{2\omega}\le$$

$$\le M_1\frac{t_1^{2\omega+\beta}}{t_1-\tau_1}+M_2t_1^{2\omega-1}.$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 2.

Предварительно установим следующее неравенство:

$$P_2'(t_1,\tau_1)=\left[\frac{\alpha(\tau_1)}{\alpha(t_1)}\right]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\cdot\frac{\tau_1^{-1/2}t_1^{3/2}\left[\tau_1(1+\alpha_0(\tau_1))\right]^{-\omega}}{(t_1-\tau_1)^{3/2}}\le M_3(\omega)\left[\frac{\alpha(\tau_1)}{\alpha(t_1)}\right]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\cdot\frac{t_1^{1-\omega}}{(t_1-\tau_1)^{3/2}}. \qquad (34)$$

Для тех значений параметра ω и $0<\tau<t<\infty$, при которых $Q'(t_1,\tau_1)\ge Q_2'(t_1,\tau_1)$, требуемая оценка следует из следующих неравенств:

$$\left|K'(t_1,\tau_1)-K_2'(t_1,\tau_1)\right|\le\left|\left(P'(t_1,\tau_1)-P_2'(t_1,\tau_1)\right)\exp\left\{-Q'(t_1,\tau_1)\right\}\right|+$$

$$+\left|P_2'(t_1,\tau_1)\exp\left\{-Q'(t_1,\tau_1)\right\}\left(1-\exp\left\{-Q_2'(t_1,\tau_1)+Q'(t_1,\tau_1)\right\}\right)\right|\le$$

$$\le\left|P'(t_1,\tau_1)-P_2'(t_1,\tau_1)\right|\exp\left\{-Q'(t_1,\tau_1)\right\}+\left|P_2'(t_1,\tau_1)\left(Q_2'(t_1,\tau_1)-Q'(t_1,\tau_1)\right|\exp\left\{-Q'(t_1,\tau_1)\right\}\right..$$

Таким образом, учитывая леммы 1–2, имеем

$$\left|K'-K_2'\right|\le\left[\frac{\alpha(\tau_1)}{\alpha(t_1)}\right]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\left\{\bar{M}\frac{t_1^{1-\omega+\beta}}{(t_1-\tau_1)^{3/2}}+M_3\frac{t_1^{1-\omega+\beta}}{(t_1-\tau_1)^{3/2}}\left(M_1\frac{t_1^{2\omega+\beta}}{t_1-\tau_1}+M_2t_1^{2\omega-1}\right)\right\}exp\left(-Q\right)\le$$

$$\le\left[\frac{\alpha(\tau_1)}{\alpha(t_1)}\right]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\frac{t_1^{3/2-2\omega}}{\tau_1^{3/2-\omega}(t_1-\tau_1)^{1/2}}\left(\bar{M}\frac{t_1^{\omega+\beta-1/2}}{t_1-\tau_1}+\bar{M}_1\frac{\tau_1^{3/2-\omega}t_1^{3\omega+\beta-1/2}}{(t_1-\tau_1)^2}+\bar{M}_2\frac{\tau_1^{3/2-\omega}t_1^{3\omega-3/2}}{t_1-\tau_1}\right)\exp(-Q)\le$$

$$\le\left[\frac{\alpha(\tau_1)}{\alpha(t_1)}\right]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\frac{t_1^{3/2-2\omega}}{\tau_1^{3/2-\omega}(t_1-\tau_1)^{1/2}}\left(\frac{t_1}{t_1-\tau_1}exp\left(-Q/2\right)\cdot\bar{M}t_1^{\omega+\beta-3/2}\tau_1^{3/2-\omega}+\right.$$

$$\left.+\frac{t_1^2}{(t_1-\tau_1)^2}exp\left(-Q/2\right)\cdot\bar{M}_1\tau_1^{3/2-\omega}t_1^{3\omega+\beta-5/2}+\frac{t_1}{t_1-\tau_1}exp\left(-Q/2\right)\cdot\bar{M}_2\tau_1^{3/2-\omega}t_1^{3\omega-5/2}\right)\exp\left(-Q/2\right)\le$$

$$\le C(\omega)\left[\frac{\alpha(\tau_1)}{\alpha(t_1)}\right]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\frac{t_1^{-\omega}}{\sqrt{t_1-\tau_1}}\exp\left\{-Q/2\right\}.$$

Справедливость неравенства (33) означает, что ядро $K_2'(t_1,\tau_1)-K'(t_1,\tau_1)$ имеет слабую особенность и имеет место следующее предельное соотношение:

$$\lim_{t_1\to0}\int_0^{t_1}\left[\frac{\alpha(\tau_1)}{\alpha(t_1)}\right]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\cdot\frac{t_1^{3/2-2\omega}}{\tau_1^{3/2-\omega}(t_1-\tau_1)^{1/2}}\left[\exp\left\{-Q'(t_1,\tau_1)/2\right\}+\exp\left\{-Q_2'(t_1,\tau_1)/2\right\}\right]d\tau_1\le$$

$$\le\lim_{t_1\to0}\int_0^{t_1}\frac{t_1^{-\omega}}{(t_1-\tau_1)^{1/2}}d\tau_1=0.$$

Это означает, что уравнение (26) действительно является характеристическим для уравнения (21). Таким образом, теорема 2, а тем самым и теорема 1, доказана.

References

1. *Dzhenaliev M.T., Ramazanov M.I.* On the boundary value problem for the spectrally-loaded heat conduction operator // Siberian Mathematical Journal. — 2006. — Vol. 47. — № 3. — P. 527–547.
2. *Dzhenaliev M.T., Ramazanov M.I.* On a boundary value problem for a spectrally-loaded heat operator: I // Siberian Mathematical Journal. — 2007. — Vol. 43. — № 4. — P. 498–508.
3. *Amangalieva M.M., Ahmanova D.M., Dzhenaliev M.T., Ramazanov M.I.* The boundary value problems for the spectrally-loaded heat conduction operator with approaching loaded line in zero or infinity // Different. equations. — 2011. — Vol. 47. — № 2. — P. 231–243.
4. *Dzhenaliev M.T., Shaldykova B.A., Kusainova B.S.* Sliding boundary problem for spectrally-loaded heat conduction operator: I // Messenger of Karagandy University. Mathematics series. — 2010. — № 1 (57). — P. 12–19.
5. *Shaldykova B.A.* Sliding boundary problem for spectrally-loaded heat conduction operator: II // Messenger of Karagandy University. Mathematics series. — 2010. — № 2 (58). — P. 75–82.

УДК 377.01

Методика проведения уроков по информатике и информационным дисциплинам

The methods of giving lessons of informatics and informative disciplines

Шаяхметова Б.К.

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова(E-mail: orumbayevan@mail.ru)

Мақалада информатика және ақпараттық жүйе пәндерінен лекция және практикалық, лабораториялық сабақтар қарастырылады. Мысал ретінде нақты 1-және 2-курс сабақтары алынып, білім деңгейі, сонымен қатар жұмыс барысында белгілі бекітілген әдістемелер зерттеліп, электронды есептеуіш машиналардың көптеген классификациядан біреуі ұсынылған. Мысал ретінде сабақтардың келесі тақырыптары алынған: «Алгоритм және олардың қасиеттері»; «Есептер шешу алгоритмдері және де оның қасиеттері», сондай-ақ бұл қатарда анкета туралы есеп көрсетілген. Сабақты жүргізу методикасы ретінде дамыта оқыту теориясы алынған, ол арқылы студенттердің ой толғану қабілеттілігі қалыптасады деген ойдамыз.

In the article the methods of giving lessons of informatics and informative discipline institute of higher educations are considered. And term «a lesson» is understood as lecture, practical or laboratory lessons. In the work examples of concrete lessons on the first and second course are adduced. In addition certain recommendations for methods of lessons are offered. In the article one's possible classification computers is offered. Lessons on the subjects: Concept algorithm and his properties, Algorithm solution tasks and his properties, also task on the form are adduced as examples. Theory of develop teach, which foresee in quality one's his function develop skill, directing on form ability reason, is offered as methods of giving lessons.

Актуальность приведенного ниже исследования определяется необходимостью активизации педагогического процесса в условиях внедрения непрерывного образования и структурализации педагогической категории «урок» (занятие), под которым мы будем понимать одну из следующих форм организации учебной работы в высшем учебном заведении: либо это лекция, либо это практическое или лабораторное занятие в процессе преподавания информационных дисциплин.

Структурализация одной из основных педагогических категорий, которой является (урок), основывается на применении естественных квалификационных схем и разнообразных методик обучения. Предметом исследования являются методики преподавания информационных потребностей как общества, так и личности, а также возможность исследования структуры обучающей системы.

Нельзя рассматривать урок как занятие в течение одного положенного расписанием часа, не связанное с предшествующим и последующим изучением материала целой темы по информатике, с отдельными вопросами рабочего плана на всю тему. Однако это не исключает необходимости придать каждому уроку законченный характер, т.е. точно определить содержание его, объем работы, приемы изучения материала, степень активного участия студентов, вспомогательные средства, которые будут