О РАЗРЕШИМОСТИ НАГРУЖЕННОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С НАГРУЗКОЙ В ВИДЕ ДРОБНОГО ИНТЕГРАЛА

Космакова М.Т., Ижанова К.А., Газизова Д.К.
Карагандинский университет имени академика Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан
E-mail: svetlanamir578@gmail.com, kamila.izhanova@alumni.nu.edu.kz, gdk8@yandex.ru

Рассмотрена краевая задача для неоднородного уравнения теплопроводности с нагрузкой в виде дробного интеграла Римана-Лиувилля порядка β, где $\beta \in (0,1)$. Обращением дифференциальной части задача сведена к интегральному уравнению с ядром со специальной функцией. Специальная функция представлена в виде обобщенной гипергеометрической функции. Исследованы предельные случаи порядка β дробной производной. Произведена оценка ядра интегрального уравнения. Получены условия разрешимости интегрального уравнения.

I Необходимые сведения из теории дробного исчисления и специальных функций

Определение 1. Пусть $\varphi(x) \in \mathcal{L}_1[a;b]$. Тогда интеграл:

$$(I_{ax}^{\alpha}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt, x > a,$$

где $\alpha > 0$, называется дробным интегралом Римана-Лиувилля порядка α; $\alpha > 0$.
$(I_{ax}^{0}\varphi)(x) = \varphi(x)$. [1]

Замечание 1. Достаточным условием существования дробного интеграла является условие $\varphi(t) \in \mathcal{L}_1([a;b])$.

Замечание 2. Известно, что [2] для первой краевой задачи в области $0 \le x < \infty$ при условиях:

$$w = f(x) \text{ при } t = 0,$$
$$w = g(x) \text{ при } x = 0,$$

дифференциальное уравнение вида:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \Phi(x,t),$$

имеет решение:

$$u(x,t) = \int_0^\infty f(\xi)G(x,\xi,t)d\xi + \int_0^t g(\tau)H(x,t-\tau)d\tau + \int_0^t\int_0^\infty \Phi(\xi,\tau)\mathrm{G}(\mathrm{x},\xi,\mathrm{t}-\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau,$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right] - exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\right]\right\},$$

$$H(x,t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi a}t^{\frac{3}{2}}}\exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right).$$

Определение 2. Обобщённым гипергеометрическим рядом [3] называется ряд:

$${}_pF_q(\alpha_1,\alpha_2\dots,\alpha_p;\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_q;z) = {}_pF_q\left(\begin{matrix}\alpha_1,\alpha_2\dots,\alpha_p \\ \rho_1,\rho_2,\dots,\rho_q\end{matrix}\middle| z\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{\prod_{h=1}^{p}(\alpha_h)_k z^k}{\prod_{h=1}^{q}(\rho_h)_k k!}\right],$$

где $(\alpha)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(\alpha)}$ – символ Похгаммера.

Определение 3. Функция в виде ряда

$$e_{\alpha,\beta}^{\mu,\delta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\mu)\Gamma(\delta-\beta n)}, \alpha > \beta, \alpha > 0, z \in \mathbb{C},$$

при $\alpha = \mu = 1$ совпадает с функцией Райта:

$$e_{1,\beta}^{1,\delta}(z) = \phi(\beta,\delta,z),$$

II Постановка задачи.

В области $Q = \{x, t\}: x > 0, t > 0\}$ найти решения уравнения:

$$u_t - u_{xx} + \lambda I_{0x}^{\beta} u(x,t)|_{x=\gamma(t)} = f(x,t), \quad (1)$$

$$u|_{x=0} = 0;\ u|_{t=0} = 0. \quad (2)$$

III Сведение задачи (11)-(12) к интегральному уравнению: В силу замечания 2 задача (1) – (2) сводится к интегральному уравнению

$$\mu(t) + \lambda \int_0^t \mathrm{K}_{\beta}(t,\tau)\mu(\tau)d\tau = f_2(t), \quad (3)$$

где

$$\mathrm{K}_{\beta}(t,\tau) = \frac{(\gamma(t))^{\beta+1}}{\sqrt{\pi(t-\tau)}\Gamma(\beta+2)}\ {}_2F_2\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{\beta+2}{2}, \frac{\beta+3}{2}; -\frac{(\gamma(t))^2}{4(t-\tau)}\right) \quad (4)$$

$$f_2(t) = I_{0x}^{\beta} f_1(x,t)|_{x=\gamma(t)} \quad (5)$$

Здесь ${}_2F_2(a_1, a_2; b_1, b_2;\ z)$ – обобщенный гипергеометрический ряд, сходится для всех конечных z.

III Исследование предельных случаев

Показано, что для краевой задачи (1) - (2) имеет место непрерывность по порядку дробной производной в нагруженном слагаемом уравнения задачи.

IV Оценка ядра интегрального уравнения

Если $(\gamma(t)) \sim t^w$ при $t \to 0$, то для ядра (4) имеет место оценка

$$\left|\mathrm{K}_{\beta}(t,\tau)\right| \leq \frac{t^{w(\beta+1)}}{\Gamma(\beta+2)\sqrt{\pi(t-\tau)}} \quad (6)$$

Поскольку: $\omega(\beta+1) \geq 0, \forall\omega \geq 0$ и $\beta \in [0;1]$, то можно сделать вывод, что интегральное уравнение (3) однозначно разрешимо в классе непрерывных функций при любой непрерывной правой части (5).

Это исследование финансируется Комитетом науки и Министерства образования и науки Республики Казахстан (Грант AP09259780, 2021-2023.)

Список использованной литературы

1. Псху, А. (2005). Уравнения в частных проихводных дробного порядка. Москва: Наука.
2.Полянин, А. (2001). In*Справочник по линейным уравнениям математической физики* (p. 57). Москва: Физико-математическая литература .
3.Ю.Люк. (1975). In*Специальные математические функции и их аппроксимации* (p. 163). New York: Academic press.

ОБОДНОМ СПОСОБЕУПРАВЛЕНИЯ ПУЧКАМИ ТРАЕКТОРИЙ

Мамадалиев Н.А., АбдуалимоваА.М.
Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,
Андижанский госуниверситет имени З.М.Бабура,
E-mail: m_numana59@mail.ru; abduolimova81@inbox.ru

В данной работе изучены конфликтно-управляемый процесс, описываемой системой дифференциально - разностных уравнений нейтрального типа. Получено достаточное условие для разрешимости игровых задач управления пучками траекторий. Данная работа примыкает к исследованиям [2].

В пространстве R^n рассматривается линейная дифференциальная игра преследования, описываемая системой уравнений нейтрального типа [2]