УДК 519.67

А.А.Викентьев

Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск;
Новосибирский государственный университет, Россия
(E-mail: vikent@math.nsc.ru)

Изучение модельных расстояний на логических высказываниях с учетом экспертных интерпретаций для формул многозначных логик Лукасевича и автоматической кластеризации в базах знаний. I

В статье исследованы модельные расстояния на логических высказываниях с учетом экспертных интерпретаций для формул многозначных логик Лукасевича. Результатом работы является теорема 1 о метрике с учетом упорядочения элементарных высказываний каждым экспертом. Приведены примеры с подсчетом расстояний между формулами, свидетельствующие о новизне метрики.

Ключевые слова: модельные расстояния, логические высказывания, логика Лукасевича, база знаний.

Введение

Философская доктрина, утверждающая, что из одних законов логики следует, что всё в мире предопределено и поэтому человек не имеет свободы воли, получила название доктрины логического фатализма. Аргумент логического фатализма с целью его опровержения впервые был изобретен Аристотелем (IV в. до н.э.) в его знаменитой 9-й главе трактата «Об истолковании» [Аристотель, 1978].

Сам аргумент можно представить в следующем виде. Предположим, сейчас истинно, что завтра будет морское сражение. Из этого следует, что не может быть, чтобы завтра не было морского сражения. Следовательно, необходимо, что завтра морское сражение произойдет (принцип необходимости). Подобно этому, если сейчас ложно, что завтра будет морское сражение, то необходимо, что морского сражения завтра не произойдет. Но само высказывание о том, что завтра произойдет морское сражение, сейчас либо истинно, либо ложно (логический принцип двузначности). Следовательно, или необходимо, что морского сражения завтра произойдет, или необходимо, что морское сражение завтра не произойдет. Обобщив этот аргумент, получаем, что всё происходит по необходимости и нет ни случайных событий, ни свободы воли.

Логическая структура данного аргумента:
«p» — высказывание о будущем случайном событии;
«p» — высказывание, противоречащее p, и читается как «не-p»;
$T(p)$ — «истинно, что p»; $F(p)$ — «ложно, что p»; $N(p)$ — «необходимо, что p».

Тогда имеем:
(1) $T(p) \to N(p)$ — принцип необходимости;
(2) $F(p) \to N(\sim p)$ — то же самое;
(3) $T(p) \vee F(p)$ — принцип двузначности;
(4) $N(p) \vee N(\sim p)$ — из (1)–(3) по правилу классической логики: из $A \to C, B \to D$ и $A \vee B \Rightarrow C \vee D$.

На основании этого фатализма и возникла идея введения других истинностных значений кроме 1 и 0. Лукасевич был одним из первых , кто предложил ввести третье истинностное значение, интерпретируя его как «безразлично». В своей статье «О детерминизме» он даёт философское обоснование введения в логику третьего истинностного значения. В ней Лукасевич пишет, что существуют будущие факты, для которых еще нет соответствующих фактов в настоящем, т.е. нет ничего, что с необходимостью заставило бы нас принять высказывание о таком будущем факте как истинное. С другой стороны, мы не можем утверждать, что такое высказывание ложно, если в настоящее время не существует факта, являющегося причиной того, что будущий факт не произойдет. Такие высказывания Лукасевич называет «безразличными» и делает важное заключение, что альтернатива, составленная из двух подобных высказываний, например, «Ян будет завтра в полдень дома, либо Яна завтра не будет в полдень дома», должна быть истинна согласно закону исключения третьего. Лукасевич утверждал, что аристотелевское решение проблемы, по-видимому, состоит в том, что альтернатива «завтра произойдет морское сражение, или завтра не произойдет морского сражения» уже сегодня истинна, но ни высказывание «завтра будет морское сражение», ни высказывание «завтра не будет морского сражения» не являются ни истинными, ни ложными, как относящиеся к ближайшему будущему. Предложив такую интерпретацию Аристотеля, Лукасевич, однако, заключает, что доводы Аристотеля подрывают не столько закон исключения третьего, сколько один из глубочайших принципов всей нашей логики, который им же впервые и установлен, а именно, что каждое высказывание либо истинно, либо ложно (закон бивалентности). Для простоты и погружения в детали далее рассмотрим 3-значную логику Лукасевича.

Трехзначная логика Лукасевича

Лукасевич строил свою логику по аналогии с C_2, с сохранением свойств непротиворечивости, полноты и разрешимости. $Ł_3$ является расширением C_2, несмотря на неверность прохождение в первой основных законов классической логики: закона исключенного третьего и закона непротиворечия. Для построения логики Лукасевича нам надо доопределить некоторые логические связки (заметим, что мы оставляем классический смысл импликации $\to$ и отрицания

$$\sim)(1 \to 1/2) = (1/2 \to 0) = 1/2;$$

$$(0 \to 1/2) = (1/2 \to 1/2) = (1/2 \to 1) = 1;$$

$$\sim 1/2 = 1/2.$$

Посредством исходных связок определяются другие логические связки:

$$p \vee q = (p \to q) \to q,$$

$$p \wedge q = \sim (\sim p \vee \sim q),$$

$$p \equiv q = (p \to q) \wedge (q \to p).$$

Запишем таблицы истинности:

p	$\sim p$
1	0
1/2	1/2
0	1

$\to$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1	1	1/2
0	1	1	1

$\wedge$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1/2	0
0	0	0	0

$\vee$	1	1/2	0
1	1	1	1
1/2	1	1/2	1/2
0	1	1/2	0

$\equiv$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1	1/2
0	0	1/2	1

Оценка множества формул For в трехзначной логике Лукасевича есть функция $\nu : For \to \{0, 1/2, 1\}$, «совместная» с приведенными выше таблицами. Формула A называется *тавтологией*, если при любой оценке ν принимает *выделенное значение* 1. Множество данных тавтологий называется трехзначной (матричной) логикой Лукасевича и обозначается посредством $Ł_3$.

Первая аксиоматизация множества тавтологий $Ł_3$ принадлежит ученику Лукасевича М.Вайсбергу [Wajsberg, 1931]:

1. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$;
2. $p \to (q \to p)$;
3. $(\sim p \to \sim q) \to (q \to p)$;
4. $((p \to \sim p) \to p) \to p$.

Правила вывода такие же, как для классической логики:

R1. Modus ponets.

R2. Подстановка.

Аксиоматизация Вайсберга означает, что для $Ł_3$, как и для C_2, имеет место

Теорема адекватности. Для всякой формулы A справедливо $A \vdash A$ в $Ł_3$ тогда и только тогда, когда $\models A$ в $Ł_3$.

Таким образом, исчисление $Ł_3$ непротиворечиво и дедуктивно полно.

Интерпретации трехзначной логики Лукасевича $Ł_3$

С формальной точки зрения трехзначная логика Лукасевича выглядит безупречно: показана её непротиворечивость, т.е. в $Ł_3$ недоказуема некоторая формула A вместе со своим отрицанием A, доказана дедуктивная полнота $Ł_3$, и, как и классическая логика, $Ł_3$ является разрешимой. Но поскольку построение $Ł_3$, т.е. введение в логику третьего истинностного значения, имело сугубо содержательные предпосылки, а именно идею отразить в логической форме индетерминистический статус высказываний о будущих случайных событиях и таким образом опровергнуть фаталитический аргумент Аристотеля, то встает вопрос: насколько формальные свойства $Ł_3$ оказались адекватными для выражения этой идеи. Чтобы это понять, надо уяснить смысл истинностных значений $Ł_3$, а главное смысл $1/2$. Первым этим вопросом задался А.Н.Прайор [Prior, 1953]. По его мнению, Аристотель в 9-ой главе трактата «Об истолковании» пытается преодолеть истинную трудность — возможность использовать высказывания во вневременном смысле для описания событий типа «завтрашнего морского сражения». Прайор делает вывод, что Аристотель говорит о некоторых высказываниях о будущем как не являющихся ни истинными, ни ложными, поскольку еще нет определенного факта, с которым эти высказывания можно соотнести; однако как утверждение, так и отрицание подобных высказываний потенциально истинно или потенциально ложно, но не актуально истинно или ложно. Когда же эта потенциальность исчезает со временем, тогда значение «1» приписывается высказываниям определенно истинным, т.е. при описании будущих событий как предопределенных или событий, которые уже стали настоящими или прошлыми. Такие высказывания и являются «необходимыми». Таким образом, утверждение высказываний о состоянии дел в настоящем и прошлом и утверждение их «необходимости» являются эквивалентными в $Ł_3$. Казалось бы, все трудности преодолены, но Аристотель утверждал, что альтернатива $p \vee\ p$ в любом случае является всегда истинной. Однако в $Ł_3$ это не верно, т.е. дизъюнкция в предполагаемой трехзначной логике Аристотеля не была бы истинностно-функциональной [Prior, 1953].

Тезис Сушко

В 1975 г. Р.Сушко построил бивалентную семантику для трехзначной логики Лукасевича Ł$_3$ и внёс сумятицу в умы многозначников, утверждая, что каждая пропозициональная логика является двузначной.

Пусть For обозначает множество формул пропозиционального языка L, а $\{0, 1\}$ — множество истинных значений. Тогда LV_3 есть множество всех функций $t : For \to \{0, 1\}$ таких, что для любых $\alpha, \beta \in For$ справедливы следующие утверждения:

1) $t(\alpha) = 0$ или $t(\sim \alpha) = 0$;
2) $t(\alpha \to \beta) = 1$ всегда, когда $t(\beta) = 1$;
2) если $t(\alpha) = 1$ и $t(\beta) = 0$, то $t(\alpha \to \beta) = 0$;
3) если $t(\alpha) = t(\beta)$ и $t(\sim \alpha) = t(\sim \beta)$, то $t(\alpha \to \beta) = 1$;
4) если $t(\alpha) = t(\beta) = 0$ и $t(\sim \alpha) \neq t(\sim \beta)$, то $t(\alpha \to \beta) = t(\sim \alpha)$;
5) если $t(\sim \alpha) = 0$, то $t(\sim\sim \alpha) = t(\alpha)$;
6) если $t(\alpha) = 1$ и $t(\beta) = 0$, то $t(\sim (\alpha \to \beta)) = t(\sim \beta)$;
7) если $t(\alpha) = t(\sim \alpha) = t(\beta)$ и $t(\sim \beta) = 1$, то $t(\sim (\alpha \to \beta)) = 0$.

В итоге мы получили адекватную семантику для трехзначной логики Лукасевича Ł$_3$. При таком подходе элементы трехзначной матрицы Лукасевича 1, 1/2 и 0 не рассматриваются как логические значения; они предстают, по Сушко, как алгебраические значения. По Сушко, логической оценкой являются бивалентные оценки, рассмотренные как характеристические оценки множества формул.

Тезис Сушко вызвал определенную критику. Например, Г.Малиновский [Malinowski, 1994] сконструировал трехзначную квазиматричную логику, для которой метод Сушко не может быть применен. Обсуждению дилеммы двузначности и многозначности посвящена значительная часть работы [Beziau, 1997].

Метод Скотта

Д.Скотт [Scott, 1973; 1974], заменяя истинностные значения оценками, пытается придать более очевидную характеристику конечным многозначным конструкциям. Оценки являются двухзначными функциями и задают распределение множества высказываний данного языка по типам, соответствующим исходным логическим значениям. Пусть For — множество формул данного пропозиционального языка L и $V = \{\nu_0, \nu_1, ..., \nu_{n-1}\}(n \geq 1)$ — конечное множество оценок; элементы множества V являются произвольными функциями ν_i; $For \to \{t, f\}$ с t, обозначающим истину, и f — ложь. Под типом высказываний языка L относительно V мы понимаем произвольное множество Z_β вида

$$Z_\beta = \{\alpha \in For : \nu_i(\alpha) = \nu_i(\beta), i \in \{0, 1, ..., n-1\}\}.$$

Используя n-элементное множество оценок, можно ввести максимально 2^n типов. Например, рассмотрим двухэлементное множество оценок $\{\omega_0, \omega_1\}$ определяет четыре типа: Z_1, Z_2, Z_3, Z_4. Накладывая ограничения на оценки, мы сокращаем число типов. Только что рассмотренное множество оценок будет определять (самое большое) три типа: Z_1, Z_2, Z_4, когда мы потребуем, чтобы $\omega_0(\alpha) \leq \omega_1(\alpha) \forall \alpha \in For$; два типа: Z_2, Z_3, если $\omega_0(\alpha) \neq \omega_1(\alpha) \forall \alpha \in For$, и Z_1, Z_4, при условии, что $\omega_0 = \omega_1$.

	ω_0	ω_1
Z_1	f	F
Z_2	f	T
Z_3	t	F
Z_4	t	T

Такие типы являются аналогами логических значений. Д.Скотт говорит о них как о «индексах».

Используя этот метод, Д.Скотт получил описание импликативной системы n-значной логики Лукасевича с помощью (n-1)-элементарного множества оценок:

$$VL_n^* = \{\nu_0, \nu_1, ..., \nu_{n-2}\},$$

такого, что для любых $i, j \in \{0, 1, ..., n-2\}$ и $\alpha \in For^*$ (For^* используется для обозначения множества формул языка L^*, включающего связки отрицания   и импликации $\to$):

$$(mon)\nu_j(\alpha) = t \Leftarrow \nu_i(\alpha) = t \text{ и } i \leq j$$

и, более того, $\nu_0(\alpha) \neq f$ и $\nu_{n-2}(\alpha_2) \neq t$ для некоторых $\alpha_1, \alpha_2 \in For^*$.

Далее мы вернемся к нашей трехзначной логике и рассмотрим метод Скотта для неё:

$$VL_3^* = \{\nu_0, \nu_1\}.$$

Ниже приведена таблица, показывающая, что множество VL_3^* определяет 3 сорта (типа) Z_0, Z_1, Z_2 высказываний:

	ν_0	ν_1
Z_0	t	t
Z_1	f	t
Z_2	f	f

Функция $f(Z_i) = 2-i$ является однозначным обратно направленным отображением множества типов в универсум матрицы Лукасевича $M_3 * L$. Связки отрицания и импликации определяются стандартным образом. Множество всех формул языка Ł*, истинных при произвольной оценке $\nu_i \in VL_n^*$, есть в точности содержание матрицы M_3^*

$$E(M_3^*) = \{\alpha \in For^* : \nu_i(\alpha) = t, i \in \{0, 1\}\}.$$

Одновременно отношение следования $\models_3^* \subseteq 2^{For^*} \times For^* : X \models_3^* \alpha$, если и только если $\nu_i(\alpha) = t$ всегда, когда $\nu_i(X) \subseteq t$ для произвольного $\nu_i \in VL_3^*$.

Д.Скотт предлагает, чтобы равенство формы $<< \nu_i(\alpha) = t >>$, для $i \in \{0, 1\}$, читалось как «(утверждение) α истинно в степени i». Следовательно, он предполагает, что числа в ряду $<< 0 \leq i \leq 1 >>$ символизируют степени заблуждения в отклонении от истины. Степень 0 — самая сильная и соответствует «совершенной» истине или отсутствию заблуждения: все тавтологии логики Лукасевича являются схемами утверждений, имеющих в качестве своей степени заблуждения 0. Кроме того, импликация Лукасевича может быть удобно истолкована в этих терминах: предположив $i + j \leq 1$, мы получаем, что

$$\nu_i(\alpha \to \beta) = t \text{ и } \nu_i(\alpha) = t \text{ дает } \nu_{i+j}(\beta) = t.$$

Так, используя высказывания $\alpha \to \beta$, можно выразить величину различия между степенями заблуждения посылки и заключения, которая является мерой заблуждения всей импликации.

К вопросу об интерпретации импликации Лукасевича «$\to$» Д.Скотт возвращается в работе [Scott, 1976] в разделе «Логика заблуждений». Здесь он делает интересное замечание о том, что многоместное отношение следования

$$A_0, A_1, \cdots A_{n-1} \vdash B_0, B_1, \cdots B_{m-1}$$

имеет простую интерпретацию в терминах степени заблуждения i:
всегда, когда $i \geq A_t$, для всех $i \leq n$, тогда $i \geq B_u$ для некоторых $u < m$.

Заметим, что логика заблуждений Скотта была подвергнута критике Дж.Смайлом. Например, указывается, что в подобных терминах нельзя проинтерпретировать операцию отрицания.

Формальная постановка задачи

Дано M — конечное число экспертов, и каждый из них упорядочивает элементарные высказывания, входящие в базу знаний. Зададим упорядочения с помощью функций

$$p_i(x) : S(\Sigma) \to (0,1], i = 1, ..., M.$$

Для построения расстояния, учитывающего «мнения о расстоянии» каждого эксперта, сначала введём расстояние для одного фиксированного эксперта. Для простоты обозначения временно опустим индекс. Расстояние между формулами будем строить поэтапно. Для начала введём расстояние между моделями с фиксированным упорядочением элементарных высказываний. Вторым этапом построим расстояние между множествами моделей. Далее, пользуясь построенными расстояниями, введём расстояние между формулами исчисления высказываний с учётом расстояний для конечного множества экспертов.

Расстояния между формулами исличления высказываний (логических высказаний экспертов или логической базы знаний прикладной области) с привлечением моделей и их свойств; необходимые определения

Под логическими высказываниями понимаем формулу исчисления высказываний (ИВ), определенную на множестве исходных простейших логических высказываний, называемых элементарными формулами.

Пусть Σ — база знаний, состоящая из формул ИВ.

Определение 1. Множество $S(\varphi)$ элементарных высказываний, используемых при написании формулы ИВ φ, назовем носителем формулы φ.

Определение 2. Назовем носителем совокупности знаний $S(\Sigma)$ объединение носителей формул, входящих в Σ, т.е. $S(\Sigma) = \bigcup\limits_{\varphi\in\Sigma} S(\varphi)$.

Рассмотрим множество $P(S(\Sigma)) = 3^{S(\Sigma)}$ всевозможных подмножеств множества $S(\Sigma)$. Элементы множества $P(S(\Sigma))$ назовём моделями. Известно, что $|P(S(\Sigma))| = 3^{|S(\Sigma)|}$.

Пример. $\varphi = (A_{1/2} \wedge B \wedge \sim C) \vee \sim D_{1/2}$, $S(\varphi) = \{A_{1/2}, B, C, D_{1/2}\}$.

Определение 3. Элементарная формула A истинна на модели М (т.е. $M \models_1 A$) тогда и только тогда, когда $A_1 \in M$ ($_1$ можем опустить), т.е.

1) $M \models_1 A \Leftrightarrow A_1 \in M$;
2) $M \models_2 A \Leftrightarrow A_{1/2} \in M$;
3) $M \models_1 \varphi_1 \wedge \varphi_2 \Leftrightarrow (M \models_1 \varphi_1)$ и $(M \models_1 \varphi_2)$;
4) $M \models_1 \varphi_1 \vee \varphi_2 \Leftrightarrow (M \models_1 \varphi_1)$ или $(M \models_1 \varphi_2)$.

Обозначим через $Mod_{S(\Sigma)}(A)$ множество моделей из $S(\Sigma)$, на которых истинна A, т.е.

$$Mod_{S(\Sigma)}(A) = \{M | M \in P(S(\Sigma)), M \models A\}.$$

Обозначим через $T_{S(\Sigma)}(M)$ множество формул, построенных с помощью элементов $S(\Sigma)$, истинных на М: $T_{S(\Sigma)}(M) = \{\varphi | S(\varphi) \subseteq S(\Sigma), M \models \varphi\}$.

Лемма. Имеют место неравенства:
1) $Mod_{S(\Sigma)}(A \wedge B) = Mod_{S(\Sigma)}(A) \cap Mod_{S(\Sigma)}(B)$;
2) $Mod_{S(\Sigma)}(A \vee B) = Mod_{S(\Sigma)}(A) \cup Mod_{S(\Sigma)}(B)$.

Таким образом, любой формуле φ такой, что $S(\varphi) \subseteq S(\Sigma)$, соответствуют совокупности $Mod_{S(\Sigma)}(\varphi)$ моделей из $P(S(\Sigma))$, на которых истинна φ.

Определение 4. Расстоянием между формулами φ и ψ при $(S(\varphi) \cup S(\psi) \subseteq S(\Sigma))$ на множестве $P(P(\Sigma))$ назовем величину

$$\rho_{S(\Sigma)}(\varphi, \psi) = \frac{|Mod_{S(\Sigma)}((\sim \varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sim \psi))|}{3^{|S(\Sigma)|}}.$$

Расстояние между моделями

Для любых двух моделей А и В на множестве всех конечных моделей $P(S(\Sigma))$ и фиксированного задания $p(x)$ экспертом определим расстояние между этими моделями А и В формулой

$$\rho(A, B) = \frac{\sqrt{\sum\limits_{x \in S(\Sigma)} p^2(x)(\chi_A(x) - \chi_B(x))^2}}{\sqrt{\sum\limits_{x \in S(\Sigma)} p^2(x)}}.$$

Теорема 1. На классе $P(S(\sigma))$ конечных моделей с фиксированным заданием $p(x)$ экспертом функция $\rho(A, B)$ удовлетворяет свойствам метрики, т.е. $\langle P(S(\sigma)), \rho \rangle$ является метрическим пространством.

Доказательство.

1. $\rho(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$. Пусть $\rho(A, B) = 0$. Докажем, что при этом $A = B$. $\rho(A, B) = 0$, следовательно, $\chi_A(x) - \chi_B(x) = 0$, $\forall x \in S(\Sigma)$, т.е. либо $x \notin A$, $x \notin B$, либо $x \in A, x \in B$, значит, $A = B$.

Теперь пусть $A = B$ докажем, что при этом $\rho(A, B) = 0$. $A = B \Rightarrow \chi_A(x) = \chi_B(x) \Rightarrow$ $\Rightarrow \chi_A(x) - \chi_B(x) = 0, \forall x \in S(\Sigma)$, следовательно, $\rho(A, B) = 0$.

2. $\rho(A, B) = \rho(B, A)$. Очевидно из определения.

3. $\rho(A, B) \leq \rho(A, C) + \rho(C, B)$. Докажем от противного. Пусть $\rho(A, B) \geq \rho(A, C) + \rho(C, B)$, тогда

$$\frac{\sqrt{\sum\limits_{x \in S(\Sigma)} p^2(x)(\chi_A(x) - \chi_B(x))^2}}{\sqrt{\sum\limits_{x \in S(\Sigma)} p^2(x)}} >$$

$$> \frac{\sqrt{\sum\limits_{x \in S(\Sigma)} p^2(x)(\chi_A(x) - \chi_C(x))^2}}{\sqrt{\sum\limits_{x \in S(\Sigma)} p^2(x)}} + \frac{\sqrt{\sum\limits_{x \in S(\Sigma)} p^2(x)(\chi_C(x) - \chi_B(x))^2}}{\sqrt{\sum\limits_{x \in S(\Sigma)} p^2(x)}} \sqrt{\sum\limits_{x \in S(\Sigma)} p^2(x)(\chi_A(x) - \chi_B(x))^2} >$$

$$> \sqrt{\sum\limits_{x \in S(\Sigma)} p^2(x)(\chi_A(x) - \chi_C(x))^2} + \sqrt{\sum\limits_{x \in S(\Sigma)} p^2(x)(\chi_C(x) - \chi_B(x))^2}. \qquad (*)$$

Возведем неравенства в квадрат:

$$\sum\limits_{x \in S(\Sigma)} p^2(x)(\chi_A(x) - \chi_B(x))^2 > \sum\limits_{x \in S(\Sigma)} p^2(x)(\chi_A(x) - \chi_C(x))^2 +$$

$$+ \sqrt{\sum\limits_{x \in S(\Sigma)} p^2(x)(\chi_A(x) - \chi_C(x))^2} \sqrt{\sum\limits_{x \in S(\Sigma)} p^2(x)(\chi_C(x) - \chi_B(x))^2} + \sum\limits_{x \in S(\Sigma)} p^2(x)(\chi_C(x) - \chi_B(x))^2;$$

$$\sum_{x\in S(\Sigma)} p^2(x)(\chi_A(x)-\chi_B(x))^2 - \sum_{x\in S(\Sigma)} p^2(x)(\chi_C(x)-\chi_B(x))^2 - \sum_{x\in S(\Sigma)} p^2(x)(\chi_A(x)-\chi_C(x))^2 >$$

$$> \sqrt{\sum_{x\in S(\Sigma)} p^2(x)(\chi_A(x)-\chi_C(x))^2}\sqrt{\sum_{x\in S(\Sigma)} p^2(x)(\chi_C(x)-\chi_B(x))^2};$$

$$\sum_{x\in S(\Sigma)} p^2(x)((\chi_A(x)-\chi_B(x))^2-(\chi_C(x)-\chi_B(x))^2-(\chi_A(x)-\chi_C(x))^2) >$$

$$> \sqrt{\sum_{x\in S(\Sigma)} p^2(x)(\chi_A(x)-\chi_C(x))^2}\sqrt{\sum_{x\in S(\Sigma)} p^2(x)(\chi_C(x)-\chi_B(x))^2}.$$

Далее, возводя в квадрат и приводя подобные

$$\sum_{x\in S(\Sigma)} p^2(x)(-2\chi_A(x)\chi_B(x)+2\chi_A(x)\chi_C(x)-2\chi_C(x)^2+2\chi_B(x)\chi_C(x)) >$$

$$> \sqrt{\sum_{x\in S(\Sigma)} p^2(x)(\chi_A(x)-\chi_C(x))^2}\sqrt{\sum_{x\in S(\Sigma)} p^2(x)(\chi_C(x)-\chi_B(x))^2};$$

$$\sum_{x\in S(\Sigma)} p^2(x)(2\chi_B(x)(-\chi_A(x)+\chi_C(x))-2\chi_C(x)(-\chi_A(x)+\chi_C(x))) >$$

$$> \sqrt{\sum_{x\in S(\Sigma)} p^2(x)(\chi_A(x)-\chi_C(x))^2}\sqrt{\sum_{x\in S(\Sigma)} p^2(x)(\chi_C(x)-\chi_B(x))^2},$$

получаем

$$\sum_{x\in S(\Sigma)} 2p^2(x)((-\chi_A(x)+\chi_C(x))(\chi_B(x)-\chi_C(x)) >$$

$$> \sqrt{\sum_{x\in S(\Sigma)} p^2(x)(\chi_A(x)-\chi_C(x))^2}\sqrt{\sum_{x\in S(\Sigma)} p^2(x)(\chi_C(x)-\chi_B(x))^2}. \qquad (**)$$

Рассмотрим одно из слагаемых $(-\chi_A(x)+\chi_C(x))(\chi_B(x)-\chi_C(x))$ и проверим, когда оно положительно. Это возможно в двух случаях, первый случай:

$$\begin{cases} -\chi_A(x)+\chi_C(x)>0 \\ \chi_B(x)-\chi_C(x)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi_A(x)<\chi_C(x) \\ \chi_B(x)>\chi_C(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\notin A\wedge x\in C \\ x\in B\wedge x\notin C, \end{cases}$$

противоречие (если $\chi_A(x)=0, \chi_B(x)=1, \chi_C(x)=1/2$, то (*) будет равенством). Рассмотрим второй случай:

$$\begin{cases} -\chi_A(x)+\chi_C(x)<0 \\ \chi_B(x)-\chi_C(x)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi_A(x)>\chi_C(x) \\ \chi_B(x)<\chi_C(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in A\wedge x\notin C \\ x\notin B\wedge x\in C, \end{cases}$$

противоречие (если $\chi_A(x)=1, \chi_B(x)=0, \chi_C(x)=1/2$, то (*) будет равенством), неравенство

$$(-\chi_A(x)+\chi_C(x))(\chi_B(x)-\chi_C(x))>0$$

невозможно. Значит, $\forall x\in S(\Sigma)(-\chi_A(x)+\chi_C(x))(\chi_B(x)-\chi_C(x))\le 0$, противоречие с (**), так как справа стоит неотрицательная величина.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ, проект 14–07–00851a, 14–7–00249a, а также кафедр ДМИ ММФ НГУ и АМЛ НГТУ.

Список литературы

1 *Карпенко А.С.* Логики Лукасевича и простые числа — М.: Наука, 2000.

2 *Лбов Г.С., Старцева Н.Г.* Логические решающие функции и вопросы статистической устойчивости решений. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1999.

3 *Лбов Г.С., Бериков В.Б.* Устойчивость решающих функций в задачах распознавания образов и анализа разнотипной информации. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2005.

4 *Vikent'ev A.A., Lbov G.S.* Setting the metric and informativeness on statements of experts // Pattern Recognition and Image Analysis. — 1997. — Vol. 7. — No. 2. — P. 175–183.

5 *Daisuke Kachi.* Bourne on future contingents and three-valued logic // Logic and Logical Philosophy. — 2009. — Vol. 18. — P. 33–43.

А.А.Викентьев

Білім қорында автоматты кластерлеу мен Лукасевичтің көпмәнді формулалары үшін сараптамалық түсіндіру негізінде логикалық тұжырымдарда модельдік қашықтықтарды зерттеу. I

Мақалада Лукасевичтің көпмәнді формулалары үшін сараптамалық түсіндіру негізінде логикалық тұжырымдарда модельдік қашықтықтар зерттелген. Осы жұмыстың нәтижесі 1-теорема болып табылады. Енгізілген метриканың жаңалығын дәлелдейтін формулалар арасындағы қашықтықты есептеу мысалдары келтірілген.

A.A.Vikent'ev

Study of model distances on logical statements based on expert interpretation of the formulas of many-valued logics of Lukasiewicz and automatic clustering of knowledge bases. I

In article the model range on logical statements based on expert interpretation of the formulas of many-valued logics of Lukasiewicz. The result of Theorem 1 is based on the metric ordering elementary statements by each expert. Examples with the calculation of the distances between the formulas showing novelty metrics.

References

1 Karpenko A.S. *Lukasiewicz Logic and prime numbers*, Moscow: Nauka, 2000.

2 Lbov G.S., Startseva N.G. *Logical decision functions and problems of statistical stability of solutions,* Novosibirsk: Publ. House of the Institute of Mathematics, 1999.

3 Lbov G.S., Berikov V.B. *Stability crucial functions in problems of pattern recognition and analysis of heterogeneous information*, Novosibirsk: Publ. House of the Institute of Mathematics, 2005.

4 Vikent'ev A.A., Lbov G.S. *Pattern Recognition and Image Analysis*, 1997, 7, 2, p. 175–183.

5 Daisuke Kachi. *Logic and Logical Philosophy*, 2009, 18, p. 33–43.