Омаров М.Т., Галинская И.В. Карагандинский государственный университет имени академика Е.А.Букетова, факультет математики и информационных технологий, студенты гр. М-204 и М-404
(Научный руководитель — PhD*, доцент Космакова М. Т.)*

ОБ ОДНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ СО СВЯЗАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Введение

Статья посвящена постановке граничных задач для уравнения теплопроводности в нецилиндрических областях с подвижной границей, движущейся с произвольной скоростью, и их редукции к псевдовольтерровому интегральному уравнению второго рода. Область вырождается в точку в начальный момент времени. Рассмотрены и исследованы свойства полученного интегрального уравнения.

Также в работе выведено уравнение связи граничных условий поставленной неоднородной краевой задачи, при котором редуцированное интегральное уравнение будет однородным.

1. Постановка краевой задачи

Рассмотрим краевую задачу теплопроводности в области, вырождающейся в начальный момент времени, граница которой движется с переменной скоростью (области с подвижной границей):

В области $G = \{(x; t): \quad t > 0, \quad 0 < x < \alpha(t)\}$ *(см Рисунок 1) найти решение уравнения теплопроводности*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (1)$$

удовлетворяющее граничным условиям:

$$u(x,t)\big|_{x=0} = \upsilon(t), \qquad (2)$$

$$u(x,t)\big|_{x=\alpha(t)} = \omega(t), \qquad (3)$$

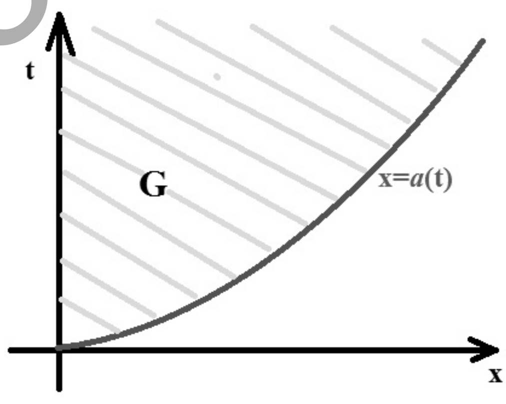

Рисунок 1. Область G

Подвижную границу $\alpha(t)$ будем считать функцией положительной, монотонно возрастающей, дифференцируемой при $t>0 \quad (0<t<T)$ и обращающейся в нуль только в точке $t = 0$. Функции $v(t)$ и $\omega(t)$ считаем непрерывным. Если потребуется, чтобы решение было непрерывным в окрестности $t = 0$, необходимо наложить дополнительно условие согласования $\upsilon(0) = \omega(0)$.

Замечание. Предполагаем, что $u(x; t) \in C^{(2)}(0 < x < +\infty) \times C^{(1)}(0 < t < +\infty)$.

2. Сведение задачи к псевдовольтерровому интегральному уравнению

Решение задачи ищем в виде суммы тепловых потенциалов двойного слоя

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{x}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left[-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right]\nu(\tau)d\tau+$$
$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{x-\alpha(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left[-\frac{(x-\alpha(\tau))^2}{4a^2(t-\tau)}\right]\varphi(\tau)d\tau \qquad (4)$$

Известно [1], что функция (4) удовлетворяет уравнению (1) при любых $\nu(t)$ и $\varphi(t)$. Используя условия (2), (3) и свойства тепловых потенциалов [1], имеем следующую систему интегральных уравнений относительно неизвестных плотностей $\nu(t)$, $\varphi(t)$.

$$\upsilon(t)=\frac{\nu(t)}{2a^2}-\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\alpha(\tau)}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}}\exp\left[-\frac{\alpha^2(\tau)}{4a^2(t-\tau)}\right]\varphi(\tau)d\tau$$
$$\omega(t)=-\frac{\varphi(t)}{2a^2}+\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\alpha(t)-\alpha(\tau)}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}}\exp\left[-\frac{[\alpha(t)-\alpha(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}\right]\varphi(\tau)+$$
$$+\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\alpha(t)}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}}\exp\left[-\frac{\alpha^2(t)}{4a^2(t-\tau)}\right]\nu(\tau)d\tau \qquad (5)$$

Исключая из системы (5) $\nu(t)$, находим

$$\nu(t)=2a^2\upsilon(t)+\frac{2a^2}{4\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\alpha(\tau)}{\left[a^2(t-\tau)\right]^{3/2}}\exp\left[-\frac{\alpha^2(\tau)}{4a^2(t-\tau)}\right]\varphi(\tau)d\tau \qquad (6)$$

$$\omega(t)=-\frac{\varphi(t)}{2a^2}+\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\alpha(t)-\alpha(\tau)}{\left[a^2(t-\tau)\right]^{3/2}}\exp\left[-\frac{[\alpha(t)-\alpha(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}\right]\varphi(\tau)d\tau+$$
$$+\frac{2a^2}{4\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\alpha(\tau)}{\left[a^2(t-\tau)\right]^{3/2}}\exp\left[-\frac{\alpha^2(\tau)}{4a^2(t-\tau)}\right]\upsilon(\tau)d\tau+ \qquad (7)$$
$$+\frac{a^2}{8\pi}\int_0^t\frac{\alpha(\tau)}{\left[a^2(t-\tau)\right]^{3/2}}\exp\left[-\frac{\alpha^2(\tau)}{4a^2(t-\tau)}\right]\left(\int_0^\tau\frac{\alpha(\tau_1)}{\left[a^2(\tau-\tau_1)\right]^{3/2}}\exp\left[\frac{\alpha^2(\tau)}{4a^2(\tau-\tau_1)}\right]\varphi(\tau_1)d\tau_1\right)d\tau$$

Введем следующие обозначения:

$$q(t)=\omega(t)-\frac{2a^2}{4\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\alpha(\tau)}{\left[a^2(t-\tau)\right]^{3/2}}\exp\left[-\frac{\alpha^2(\tau)}{4a^2(t-\tau)}\right]\upsilon(\tau)d\tau,$$
$$J(t)=\frac{a^2}{8\pi}\int_0^t\frac{\alpha(\tau)}{\left[a^2(t-\tau)\right]^{3/2}}\exp\left[-\frac{\alpha^2(\tau)}{4a^2(t-\tau)}\right]\left(\int_0^\tau\frac{\alpha(\tau_1)}{\left[a^2(\tau-\tau_1)\right]^{3/2}}\exp\left[-\frac{\alpha^2(\tau_1)}{4a^2(\tau-\tau_1)}\right]\varphi(\tau_1)d\tau\right)d\tau \qquad (8)$$

Для $J(t)$ имеет место свойство перестаночности. Тогда

$$J(t)=\frac{a^2}{8\pi}\int_0^t\frac{\alpha(t)\alpha(\tau_1)}{\alpha^6}\varphi(\tau_1)\left(\int_{\tau_1}^t\frac{1}{[(t-\tau)(\tau-\tau_1)]^{3/2}}\exp\left\{-\left[\frac{\alpha^2(t)}{4\alpha^2(t-\tau)}+\frac{\alpha^2(\tau_1)}{4\alpha^2(\tau-\tau_1)}\right]\right\}d\tau\right)d\tau_1 \qquad (9)$$

Вычислим внутренний интеграл.

$$J(t,\tau_1)=\int_{\tau_1}^t\frac{1}{[(t-\tau)(\tau-\tau_1)]^{3/2}}\exp\left\{-\left[\frac{\alpha^2(t)}{4\alpha^2(t-\tau)}+\frac{\alpha^2(\tau_1)}{4\alpha^2(\tau-\tau_1)}\right]\right\}d\tau$$

Замена вида $z=\sqrt{\dfrac{t-\tau}{\tau-\tau_1}}$ приводит к интегралу

$$J(t,\tau_1)=\frac{2}{(t-\tau_1)^2}\exp\left[-\frac{\alpha^2(t)+\alpha^2(\tau_1)}{4\alpha^2(t-\tau_1)}\right]\left\{\int_0^\infty \exp\left[-\frac{\alpha^2(t)}{4\alpha^2(t-\tau_1)}\cdot\frac{1}{z^2}-\frac{\alpha^2(\tau_1)}{4\alpha^2(t-\tau_1)}z^2\right]dz+\right.$$

$$\left.+\int_0^\infty \exp\left[-\frac{\alpha^2(\tau_1)}{4\alpha^2(t-\tau_1)}\cdot\frac{1}{z^2}-\frac{\alpha^2(t)}{4\alpha^2(t-\tau_1)}z^2\right]dz\right\}.$$

Используя формулу (3.325) из [2, с. 321],

$$\int_0^\infty \exp\left(-\alpha x^2-\frac{b}{x^2}\right)dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\exp\left(-2\sqrt{ab}\right),$$

получаем, что

$$J(t,\tau_1)=\frac{2}{(t-\tau_1)^2}\exp\left[-\frac{\alpha^2(t)+\alpha^2(\tau_1)}{4\alpha^2(t-\tau_1)}\right]\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\alpha^2 x(t-\tau_1)}{\alpha^2(\tau_1)}}\exp\left[-2\sqrt{\frac{\alpha^2(t)\cdot\alpha^2(\tau_1)}{\left[v\alpha^2(t-\tau_1)\right]^2}}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\alpha^2\pi(t-\tau_1)}{\alpha^2(t)}}\exp\left[-2\sqrt{\frac{\alpha^2(t)\cdot\alpha^2(\tau_1)}{\left[v\alpha^2(t-\tau_1)\right]^2}}\right]\right\}= \qquad (10)$$

$$=\frac{2\alpha\sqrt{\pi}}{(t-\tau_1)^{3/2}}\cdot\frac{\alpha(t)+\alpha(\tau_1)}{\alpha(t)\cdot\alpha(\tau_1)}\exp\left\{-\frac{\left[\alpha(t)+\alpha(\tau_1)\right]^2}{4\alpha^2(t-\tau_1)}\right\}.$$

Поставляя в (9), имеем

$$J(t)=\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\alpha(\tau)+\alpha(\tau_1)}{\left[a^2(t-\tau_1)\right]^{3/2}}\exp\left[-\frac{\left[\alpha(t)+\alpha(\tau_1)\right]^2}{4a^2(t-\tau)}\right]\varphi(\tau_1)d\tau_1 \qquad (11)$$

Учитывая (8) и (11), перепишем (7) в виде,

$$-\frac{\varphi(t)}{2\alpha^2}+\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\alpha(t)-\alpha(\tau)}{\left[\alpha^2(t-\tau)\right]^{3/2}}\exp\left\{-\frac{\left[\alpha(t)-\alpha(\tau)\right]^2}{4\alpha^2(t-\tau)}\right\}\varphi(\tau)d\tau+$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\alpha(t)+\alpha(\tau)}{\left[\alpha^2(t-\tau)\right]^{3/2}}\exp\left\{-\frac{\left[\alpha(t)+\alpha(\tau)\right]^2}{4\alpha^2(t-\tau)}\right\}\varphi(\tau)d\tau=q(t)\Big|\cdot 2\alpha^2 \qquad (12)$$

Или вводя обозначения,

$$f(t)=-2\alpha^2 q(t)$$

$$K(t,\tau)=\frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi}}\left\{\frac{\alpha(t)-\alpha(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{\left[\alpha(t)-\alpha(\tau)\right]^2}{4\alpha^2(t-\tau)}\right\}+\frac{\alpha(t)+\alpha(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{\left[\alpha(t)+\alpha(\tau)\right]^2}{4\alpha^2(t-\tau)}\right\}\right\},$$

Получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\varphi(t)-\int_0^t K(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau=f(t). \qquad (13)$$

3. Свойства псевдовольтеррового интегрального уравнения

Рассмотрим интегральное уравнение (13) при $\alpha(t)=t$. Тогда

$$\varphi(t)-\int_0^t K(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau=f(t),\quad (t>0) \qquad (14)$$

где

$$K(t,\tau)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\left\{\frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}\exp\left(-\frac{t-\tau}{4a^2}\right)+\frac{t+\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left(-\frac{(t+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\right\}.$$

Ядро $\mathrm{K}(t,\tau)$ обладает свойствами:

1) непрерывно при $0 < \tau < t < \infty$;

2) $\lim\limits_{t \to t_0} \int\limits_{t_0}^{t} K(t,\tau)\, d\tau = 0$, $t_0 \geq \varepsilon > 0$;

3) $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ (t\to\infty)}} \left| \int\limits_{0}^{t} K(t,\tau)\, d\tau \right| = 1$, то есть

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ (t\to\infty)}} \int_0^t \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left(-\frac{t-\tau}{4a^2}\right) + \frac{t+\tau}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(t+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) \right\} d\tau = 1.$$

Свойства 1) и 2) очевидны. Докажем свойство 3).

В самом деле, произведем замену:

$$x = \sqrt{t-\tau}.$$

Тогда получим:

$$\int_0^t K(t,\tau)\, d\tau = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2}}\, dx + \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{2t}{a^2}} \int_0^{\sqrt{t}} \exp\left\{ -\left(\frac{t}{ax} + \frac{x}{2a} \right)^2 \right\} \left(\frac{t}{a x^2} - \frac{1}{2a} \right) dx =$$

$$= \left\| \xi = \frac{x}{2a}; \quad z = \frac{t}{ax} + \frac{x}{2a} \right\| = erf\left(\frac{\sqrt{t}}{2a} \right) + e^{\frac{2t}{a^2}}\, erfc\left(\frac{3\sqrt{t}}{2a} \right).$$

Такие уравнения (14) названы интегральными уравнениями Вольтерра с «несжимаемым» ядром. Особенность исследуемого уравнения заключается в свойстве 3) ядра $K(t,\tau)$ и выражается в том, что соответствующее неоднородное уравнение с параметром λ

$$\varphi(t) - \lambda \int_0^t K(t,\tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau = f(t), \quad (t > 0) \qquad (15)$$

где

$$K(t,\tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left(-\frac{t-\tau}{4a^2}\right) + \frac{t+\tau}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(t+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) \right\},$$

не может быть решено методом последовательных приближений при $|\lambda| \geq 1$. Очевидно, что если $|\lambda| < 1$ [3], то полученное интегральное уравнение имеет единственное решение, которое находится методом последовательных приближений. В работе [4] исследовано однородное уравнение, соответствующее уравнению (15), при $\lambda = 1$.

4. Основной результат

Теорема. *Краевая задача (1) – (3) при движении границы области по линейному закону $\alpha(t) = t$ сводится к сингулярному интегральному уравнению Вольтерра второго рода (14), для которого норма интегрального оператора, действующего в классах непрерывных функций, равна 1.*

Так как $f(t) = -2\alpha^2 q(t)$ и в силу (8)

$$q(t) = \omega(t) - \frac{2a^2}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\alpha(\tau)}{\left[a^2(t-\tau)\right]^{3/2}} \exp\left[-\frac{\alpha^2(\tau)}{4a^2(t-\tau)} \right] \upsilon(\tau)\, d\tau,$$

то при

$$\omega(t) = \frac{2a^2}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\alpha(\tau)}{\left[a^2(t-\tau)\right]^{3/2}} \exp\left[-\frac{\alpha^2(\tau)}{4a^2(t-\tau)} \right] \upsilon(\tau)\, d\tau, \qquad (16)$$

уравнение (13) станет однородным, хотя исходная граничная задача (1) - (3) была неоднородной.

***Лемма**. Неоднородная граничная задача (1) – (2), у которой краевые условия связаны уравнением (16), сводится к однородному интегральному уравнению Вольтерра второго рода, соответствующему уравнению (13).*

Замечание. Постановка краевой задачи теплопроводности с другими граничными условиями и ее исследование проведено в работе [5].

Список использованной литературы

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – Изд. 4-е. – М.: Наука, 1966. – 724 с.
2. Градштейн И.С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М: Физматгиз, 1963, 982с.
3. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. – М.: Наука. – 1975. – 304 с.
4. Kosmakova M.T. On an integral equation of the Dirichlet problem for the heat equation in the degenerating domain // Bulletin of the Karaganda University-Mathematics, 2016, No.1 (81), P. 62-67.
5. Барташевич А., Галинская И. Сингулярные интегральные уравнения однородных краевых задач теплопроводности // Студент года 2018: Сборник статей VI Международного научно-исследовательского конкурса. - МЦНС «Наука и Просвещение». – Пенза, 2018. – с. 12-18.

Оспанова Ш.С., Кокшетауский государственный университет имени Ш.Уалиханова, факультет естественных наук, гр. Б300А83п, магистрант
(Научный руководитель — к.б.н., доцент Жумабаева С.Е.)

IMPLEMENTING THE PRINCIPLES OF CONTENT AND LANGUAGE INTEGRATED LEARNING (CLIL) TECHNOLOGY IN THE EDUCATIONAL PROCESS

The rapidly developing modern world presents each person with difficult requirements: to adapt to numerous changes in the external environment, to realize their place in the world and cultural community, to realize the acquired knowledge and skills in everyday life. One of the most important roles in this process is assigned to the educational system. The main task of school is to form a complete system of knowledge and skills that will lead to students' independent activities and their personal responsibility. At the same time, the knowledge of a foreign language becomes one of the powerful tools for expanding knowledge and professional growth.

Any language is one of the most important means of communication, the key to the existence and progress of human society. The changes taking place in the modern world require improvement of communicative competences and careful language training of students. Only in this case they will be able to exchange thoughts in different life situations when communicating with other people, using the system of language norms and adequate communicative behavior. In other words, the main purpose of a foreign language is the formation of communicative competence, that is, the ability and willingness to carry out personal and cultural communication with others. Communicative competence is not an innate quality or personality trait. It is formed in a long process of communication. And the primary task of the teacher is to create a model of real communication, so that it causes children's natural desire and the need to interact with other participants in the situation and give confidence in themselves when communicating. Based on the personality-oriented approach of teaching and education of the younger generation, the teacher should strive to create a diverse educational environment that will allow children to fully demonstrate their abilities and skills.

Modern educational technologies used for the formation of foreign language communicative competence are very effective in terms of creating an educational environment that ensures the interaction of all participants in the educational process. When teaching a foreign language, the teacher has the right to use or independently adjust any modern technology in accordance with the functions, content of educational material, goals and objectives of training in a particular group of students. One of these technologies that I use in my lessons is subject-language integrated learning - CLIL (Content and Language Integrated Learning). The term CLIL was first coined by David Marsh in 1994. At first, this term referred to the process in which subjects or parts of them were taught in a foreign language. To achieve the ultimate goals of the educational process was set a two-pronged goal: the study of the subject and the simultaneous study of a foreign language. Marsh has been conducting his research for several years and by 2001 had developed a methodology for language integration and described it as follows: CLIL considers learning a foreign