$$\left\| U(n,t) e^{-\varepsilon t} \right\|_{L_2(R_+)} \le C \left[\left| \Phi(n) \right| + \sum_{m=0}^{k} \left\| F^{(m)}(n,t) \right\|_{L_2(R_+)} \right], \tag{14}$$

где постоянная C не зависит от n, где $\varepsilon > 0$. Из оценки (14), используя равенство Парсеваля, получим:

$$\left\| u(x,t) e^{-\varepsilon t} \right\|_{L_2((0,1),R_+)} \le C \left[\left\| \phi(x) \right\|_{L_2(0,1)} + \left\| f(x,t) \right\|_{L_2((0,1),R)} + \left\| f^{(k)}(x,t) \right\|_{L_2((0,1),R)} \right]. \tag{15}$$

На основе оценки (15) устанавливаем справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. *Задача Коши-Неймана (2) при любых $\{f, \phi\}$, удовлетворяющих условиям (3), однозначно сильно разрешима в пространстве $L_{2,e^{-\varepsilon t}}$, определяемом условием (11), тогда и только тогда, когда выполнены условия (5).*

Замечание 1. Классом сильных решений задачи (2) является пространство с весом $L_{2,e^{-\varepsilon t}}$, которое определено условием (11).

Список литературы

1. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. — М.: Наука, 1980. — 383 с.
2. *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их приложения // Диф. ур-ния. — 1983. — Т. 19. — № 1. — С. 86–94.
3. *Шелухин В.В.* Задача со средними по времени данными для нелинейных параболических уравнений // Сиб. мат. журнал. — 1991. — Т. 32. — № 2. — С. 154–165.
4. *Ломов И.С.* Свойства базисности корневых векторов нагруженных дифференциальных операторов второго порядка на интервале // Диф. ур-ния. — 1991. — Т. 27. — № 1. — С. 80–93.
5. *Ломов И.С.* Теорема о безусловной базисности корневых векторов нагруженных дифференциальных операторов второго порядка // Диф. ур-ния. — 1991. — Т. 27. — № 9. — С. 1550–1563.
6. *Krall A.M.* The development of general differential and general differential boundary systems // Rocky Mountains I. Math. — 1975. — Vol. 5. — № 4. — P. 493–542.
7. *Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И.* О гранично-начальной задаче для «существенно» нагруженного параболического уравнения // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. — 2005. — № 5. — С. 36–43.
8. *Рамазанов М.И.* О точечном спектре полупериодической граничной задачи для «существенно» нагруженного параболического уравнения // Вестн. НАН РК. — Алматы, 2006. — № 6. — С. 19–21.

УДК 517.988.68+517.968.22

А.А.Ерденеева, Г.А.Тюлепбердинова

Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Алматы

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛОГ ОПТИМИЗАЦИОННОГО МЕТОДА ДЛЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ В КВАЗИСТАЦИОНАРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Мақалада Максвеллдің квазистационарлық жуықтау теңдеулер жүйесі үшін кері коэффициентті есеп қарастырылды. Оптимизациялық әдісті қолданып, оның дискретті аналогы құрылды. Функционалдық градиентін есептеуде соңғы-айырымды формула алынды.

V koeffitsentnaya we consider the inverse problem for Maxwell's equations in kvazistatsionar approximation. Based on the optimization method built its discrete analog. We obtain a finite-difference formula for vychesleniya inverse problem.

§1. Прямая и обратная задача в вертикальной неоднородный среде

Рассмотрим постановку прямой и обратной задачи для системы уравнений Максвелла в квазистационарном приближении [1]:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} H = \sigma E + j^{cm}, \ x_3 \neq 0, \ (x_1, x_2, x_3) \in R^3, \\ \mu \dfrac{\partial}{\partial t} H + \operatorname{rot} E = 0, \ t > 0, \end{cases} \tag{1}$$

здесь $E = (E_1, E_2, E_3)^T$, $H = (H_1, H_2, H_3)^T$ — векторы напряженности электрического и магнитного полей; μ — магнитная проницаемость среды; σ — проводимость среды; j^{cm} — плотность сторонних токов.

Все физическое пространство R^3 переменных $x = (x_1, x_2, x_3)$ плоскостью $x_3 = 0$ разобьем на два полупространства: $R_-^3 = \left\{ x \in R^3 \mid x_3 < 0 \right\}$ (воздух), $R_+^3 = \left\{ x \in R^3 \mid x_3 > 0 \right\}$ (земля). В R_-^3 (воздух) параметры μ, δ — постоянные.

На границе $x_3 = 0$ коэффициенты μ, δ имеют конечный разрыв, поэтому потребуем выполнения условий

$$E_j \Big|_{x_3 = -0} = E_j \Big|_{x_3 = +0}, \ \ H_j \Big|_{x_3 = -0} = H_j \Big|_{x_3 = +0}, j = 1,2 \tag{2}$$

и считаем, что до момента времени $t = 0$ поле отсутствует, т.е.

$$\left(E, H \right)\Big|_{t<0} = 0, \ j^{cm}\Big|_{t<0} = 0. \tag{3}$$

<u>Прямая задача</u>: При заданных μ, δ и стороннем токе j^{cm} найти векторы E, H из соотношений (1)–(2).

Пусть относительно решения прямой задачи известна дополнительная информация вида

$$E_j \Big|_{x_3 = 0} = f_j(t), \ j = 1,2. \tag{4}$$

Обратная задача состоит в определении μ, δ по известным равенствам (4) из соотношений (1)–(3).

Далее рассмотрим дискретный аналог оптимизационного метода решения обратной задачи для системы (1)–(3), постановка которой на дифференциальном уровне изложена в монографии [2].

В предположении, что сторонний ток имеет вид $j^{cm} = (0,1,0)^T b(x_1)\delta(x_3)g(t)$, где $b(x_1)$, $g(t)$ — функции, описывающие распределение источника по переменным x_1, t, в системе (1) останутся ненулевыми только три компонента — E_2, H_1, H_3.

После исключения частных производных компонент H_1, H_3 получим задачу для определения E_2:

$$\sigma \frac{\partial}{\partial t} E_2 = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x_1} E_2 \right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x_3} E_2 \right),$$

$$E_2 \Big|_{t<0} = 0,$$

$$\left[E_2 \right]_{x_3 = 0} = 0, \ \left[\frac{\partial}{\partial x_3} E_2 \right]_{x_3 = 0} = \mu b(x_1) g'(t).$$

Полагая, что функция $\sigma(x)$ зависит от глубины x_3 и применяя преобразование Фурье $F_{x_1}\left[x \right]$, получим задачу:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \upsilon - \lambda^2 \upsilon = 0, \ x_3 \in R,$$

$$\left[\upsilon \right]_{x_3 = 0} = 0, \ \left[\frac{\partial}{\partial x_3} \upsilon \right]_{x_3 = 0} = \mu b_\lambda g'(t),$$

$$\upsilon \Big|_{t=0} = 0,$$

$$\sigma(x_3) \frac{\partial}{\partial t} \upsilon = \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \upsilon - \frac{1}{\mu} \lambda^2 \upsilon, \ x_3 \in R_+,$$

где $\upsilon = F_{x_1}\left[E_2(x_1, x_3, t) \right]$, $b_\lambda = F_{x_1}\left[b(x_1) \right]$ — образы преобразования Фурье функций E_2, $b(x_1)$.

Будем рассматривать прямую и обратную задачу только при $x_3 > 0$ с условием на границе $x_3 = 0$ вида

$$\left(\upsilon_{x_3} - |\lambda|\upsilon\right)_{x_3=0} = \mu b_\lambda g'(t).$$

Теперь конкретизируем постановку рассматриваемой задачи: требуется в области $Q = [0,l]\times[0,T]$ найти решение следующей задачи:

$$\sigma(x_3)\frac{\partial}{\partial t}\upsilon = \frac{1}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\upsilon - \frac{1}{\mu}\lambda^2\upsilon,\ (x_3,t)\in Q, \tag{5}$$

$$\upsilon(x_3,0) = 0,\ x_3 \in (0,l), \tag{6}$$

$$(\upsilon_{x_3} - |\lambda|\upsilon)_{x_3=0} = \mu b_\lambda g'(t), \tag{7}$$

$$\upsilon(l,t) = 0,\ t \in (0,T). \tag{8}$$

Пусть относительно решения прямой задачи (5)–(8) известна дополнительная информация

$$\upsilon(0,t;\tau) = f(t).$$

Приведем задачу (5)–(8) к удобному виду для численной реализация. Для этого введем новые переменные [3]:

$$z = \theta(x_3),\ \theta(x_3) = \int_0^{x_3}\frac{1}{c(\xi)}d\xi,\ c^2(x_3) = \frac{1}{\mu\delta(x_3)} \tag{9}$$

и новые функции

$$S(z) = \left[\frac{c(x_3)}{c(0)}\right]^{1/2},\ u(z,t) = \upsilon(x_3,t)S(z). \tag{10}$$

Тогда задача (5)–(8) запишется следующим образом:

$$u_t = u_{zz} - a(z)u,\ z\in(0,L), \tag{11}$$

$$\left[u_z - \frac{|\lambda|}{\sqrt{\mu\delta(+0)}}u\right]_{z=0} = \mu b_\lambda g'(t), \tag{12}$$

$$u(L,t) = 0,\ t\in(0,T), \tag{13}$$

$$u(z,0) = 0,\ t\in(0,L),\ L = \theta(l), \tag{14}$$

а дополнительная информация примет вид:

$$u(0,t;a) = f(t),\ t\in(0,T). \tag{15}$$

Обратную задачу об определении функции $a(z)$ по известному условию (15) будем решать оптимизационным методом.

Пусть $q(z)$ — приближенное решение обратной задачи. Рассмотрим функционал:

$$J(q) = \int_0^T\left[u(0,t;q) - f(t)\right]^2 dt. \tag{16}$$

Известно, что градиент функционала (16) имеет вид [2]:

$$\nabla J(q) = -\int_0^T u(z,t)\psi(z,t)dt, \tag{17}$$

где $\psi(z,t)$ — решение сопряженной задачи:

$$\psi_t = -\psi_{zz} + q(z)\psi,\ (z,t)\in Q,$$

$$\psi(z,T) = 0,\ z\in(0,L),$$

$$\left[\psi_z - \frac{|\lambda|}{\sqrt{\mu\delta(+0)}}\psi\right]_{z=0} = -2\left[u(0,t;q) - f(t)\right],\ t\in(0,T),$$

$$\psi(L,t) = 0,\ t\in(0,T).$$

§2. Дискретный аналог оптимизационного метода

Пусть $p(x_i)$ — приближенное решение обратной задачи. Аппроксимируем задачу (11)–(14) следующей разностной схемой:

$$y_t = y_{\bar{z}z}^{j+1} - ay^{j+1}, \ (z_i, t_j) \in \omega_{h\tau}, \tag{17}$$

$$y_i^0 = 0, \ 0 \le i \le N, \tag{18}$$

$$y_N^j = 0, \ 1 \le j \le M, \tag{19}$$

$$y_{z,0} - \nu_1 y_0 = \nu_2^j, \ 1 \le j \le M, \tag{20}$$

здесь $\overline{\omega_{h\tau}} = \overline{\omega_h} \times \overline{\omega_\tau}$ — сеточная аппроксимация области $Q = [0, L] \times [0, T]$

$$\overline{\omega} = \{z_i = ih, \, i = 0, \ N_z, \ h = L/N\},$$

$y(z_i, t_j)$ — сеточная аппроксимация функции $u(z,t), ay^{j+1} = y(z_i, t_{j+1})$.

Пусть относительно разности прямой задачи (17)–(20) известна дополнительная информация

$$y_0^j = f(t_j), \ 1 \le j \le M.$$

Рассмотрим разностный аналог функционала (16) вида

$$J[p] = \tau \sum_{j=1}^{M} \left[y_0^j \{p_i\} - f^j \right]^2. \tag{21}$$

Зададим приращение $p_i + \delta p_i$ и $\sigma y_i^j = y_i^j \{p_i + \delta p_i\} - y_i \{p_i\}$. Относительно приращения δy_i^j нетрудно получить следующую разностную задачу:

$$\delta y_t = \delta y_{\bar{z}z}^{j+1} - y^{j+1} \delta p - p \delta y^{j+1}, \ (z_i, t_j) \in \omega_{h\tau}, \tag{22}$$

$$\delta y_i^0 = 0, \ 0 \le i \le N, \tag{23}$$

$$\delta y_N^j = 0, \ 1 \le j \le M, \tag{24}$$

$$\delta y_{z,0} - \nu_1 \delta y_0 = \nu_2^j, \ 1 \le j \le M. \tag{25}$$

Перейдем к выводу разностного аналога градиента функционала. Умножим обе части разностного соотношения (22) на сеточную функцию φ_i^j и просуммируем по j от 1 до $\mu - 1$ и по индексу i — от 1 до $M - 1$. Тогда получим:

$$\tau \sum_{j=1}^{M-1} h \sum_{i=1}^{N-1} (\delta y_t)_i^j \varphi_i^j = \tau \sum_{j=1}^{M-1} h \sum_{i=1}^{N-1} \delta y_{\bar{z}z}^{j+1} \varphi_i^j - \tau \sum_{j=1}^{M-1} h \sum_{i=1}^{N-1} \left[p_i \delta y_i^{j+1} + y_i^{j+1} \delta p_i \right] \varphi_i^j.$$

Применяя разностный аналог интегрирования по частям:

$$(y, \Delta \upsilon) = -(\upsilon, \nabla y) + y_N \upsilon_N - y_0 \upsilon_1$$

из последнего соотношения получим цепочку равенств:

$$S_1 = h \sum_{i=1}^{N-1} \left[-(\delta y_i^j, \nabla \varphi_i^j) + \varphi_i^M \delta y_i^M - \varphi_i^0 \delta y_i^1 \right],$$

$$S_2 = -\tau \sum_{j=1}^{M-1} \sum_{i=1}^{N-1} \left[p_i \, \delta y_i^{j+1} + y_i^{j+1} \delta p_i \right] \varphi_i^j,$$

$$S_3 = -\tau \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{i=1}^{N-1} (\Delta \delta y_i^{j+1} \varphi_i^j - \nabla \delta y_i^{j+1} \varphi_i^j) =$$

$$= \tau \sum_{j=1}^{M-1} (-(\delta y_i^j, \nabla \varphi_i^j \ ] + \varphi_N \delta y_N - \varphi_0 \delta y_1 + \left[\delta y_i^j, \Delta \varphi_i^j \right) - \delta y_{N-1} \varphi_N + \varphi_0 \delta y_0).$$

Раскроем суммы в скалярных произведениях, тогда

$$S_3 = \tau \sum_{j=1}^{M-1} \left[-\sum_{i=1}^{N} \delta y_i^{j+1} \nabla \varphi_i^j + \sum_{i=0}^{N-1} \delta y_i^{j+1} \Delta \varphi_i + \varphi_N \delta y_N - \varphi_0 \delta y_1 - \delta y_{N-1} \varphi_N + \varphi_0 \delta y_0 \right] =$$

$$= \tau \sum_{j=1}^{M-1} \left[-\sum_{i=1}^{N-1} \delta y_i^{j+1} (\Delta \varphi_i^j - \nabla \varphi_i^j) + \varphi_N^j \delta y_N^{j+1} - \varphi_0^j \delta y_1^{j+1} - \delta y_{N-1}^{j+1} \varphi_N^j + \varphi_0^j \delta y_0^{j+1} - \delta y_N^{j+1} (\varphi_N^j - \varphi_{N-1}^j) + \right.$$

$$\left. + \delta y_0^{j+1} (\varphi_1^j - \varphi_0^j) \right] =$$

$$= \tau \sum_{j=1}^{M-1} \left[-\sum_{i=1}^{N-1} \delta y_i^{j+1} (\Delta \varphi_i^j - \nabla \varphi_i^j) + \varphi_N^j \delta y_N^j - \varphi_0^j \delta y_1^{j+1} - \delta y_{N-1}^{j+1} \varphi_N^j + \varphi_0^j \delta y_0^{j+1} - \varphi_N^j \delta y_N^{j+1} + \varphi_{N-1}^j \delta y_N^{j+1} + \right.$$

$$+\delta y_0^{j+1}\varphi_i^j-\varphi_0^j\delta y_0^{j+1}\ \Big].$$

Собирая полученные соотношения, имеем:

$$h\sum_{i=1}^{N-1}\Big[-\left(\delta y_i^j,\nabla\varphi_i^j\right]+\varphi_i^M\delta y_i^M-\varphi_i^0\delta y_i^1\Big]=$$

$$=\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left[-\sum_{i=1}^{N-1}\delta y_i^{j+1}\left(\Delta\varphi_i^j-\nabla\varphi_i^j\right)+\varphi_{N-1}^j\delta y_N^{j+1}+\delta y_0^{j+1}\varphi_1^j-\delta y_{N-1}^{j+1}\varphi_N^j-\varphi_0^j\delta y_1^{j+1}\right]+S_2+S_3\,. \qquad (26)$$

Из левой части соотношения находим

$$S_1=h\sum_{i=1}^{N-1}\left[-\sum_{j=2}^{M}\ \delta y_i^j\nabla\varphi_i^j-\delta y_i^1\varphi_i^1+\varphi_i^M\delta y_i^M\right].$$

Из исходного уравнения (22) очевидно, что $\delta y_i^1=-\tau\delta p_i y_i^0$, тогда

$$S_1=h\sum_{i=1}^{N-1}\left[-\sum_{j=2}^{M}\ \delta y_i^j\nabla\varphi_i^j+\varphi_i^M\delta y_i^M+\delta p\tau y_i^0\delta y_i^1\right].$$

Введя замену $j'=j+1$, правую часть уравнения (26) запишем иначе:

$$S_2=\tau\sum_{j'=2}^{M}\Big[\ \sum_{i=1}^{N-1}\delta y_i^{j'}(\varphi^{j+1}-\nabla\varphi^{j\ +1})+$$

$$+\varphi_{N-1}^{j'-1}\delta y_N^{j'}+\delta y^{j'}\varphi_L^{j'-1}-\delta y_{N-1}^{j'-1}-\delta y_{N-1}^{j'}\varphi_N^{j'-1}-\varphi_0^{j'-1}\upsilon y_L'-h\sum_{i=1}^{N-1}p_i\delta y_i^{j'}\varphi_i^{j'-1}-h\sum_{i=1}^{N-1}\delta p_i y_i^{j'}\varphi_i^{j'-1}\ \Big].$$

Введем сопряженную задачу:

$$\varphi_{\bar t}=-\varphi_{\bar z z}^{j-1}+p_i\varphi^{j-1},\ j=M,M-1,...,2\,, \qquad (27)$$

$$\varphi_i^M=0,\ i=\overline{0,N}\,, \qquad (28)$$

$$\varphi_N^{j-1}=0,\ j=M,M-1,...,1\,, \qquad (29)$$

$$\varphi_{z,0}^{j-1}-\nu_L\varphi_0^{j-1}=2\left[y_0^j\{p_i\}-f^j\right],\ j=M,M-1,...,2\,. \qquad (30)$$

Далее, учитывая условие (23)–(25), а также (27)–(30), соотношение (26) примет вид:

$$h\sum_{i=1}^{N-1}\delta p_i\tau y_i\varphi_i^1=\tau\sum_{j=2}^{M}2\left[y_0^j-f^j\right]\delta y_0^j-\tau\sum_{j=2}^{M}h\sum_{i=1}^{N-1}\delta p_i y_i^j\varphi_i^{j-1}\,.$$

Отсюда приращение функционала определяется из формулы:

$$\Delta J(p)=h\sum_{i=1}^{N-1}\delta p_i\tau\sum_{j=2}^{M}y_i^j\varphi_i^{j-1}+\tau h\sum_{i=1}^{N-1}y_i^0\varphi_i^1\delta p_i\,,$$

а градиенты функционала (21) вычисляются по формуле:

$$\nabla J(j)=\tau\sum_{j=2}^{M}y_i\,\varphi_i^{j-1}+\tau y_i^0\varphi_i^1\,. \qquad (31)$$

Таким образом, получена обратная схема вычисления:

1. Задаем начальное приближение $\tau^{(0)}(x_3)$ по формуле (10), вычисляем $a^{(0)}(z)$, затем решаем прямую задачу (17)–(20) и находим $y^{(0)}\left\{z_i,t_j;a^{(0)}(z_i)\right\}$.

2. Вычисляем краевое условие (30) при $p_i^{(0)}=a_i^{(0)}$ и, решая сопряженную задачу (27)–(30), находим $\varphi_i^{(0)}\left\{z_i,t_j;p_i^{(0)}\right\}$.

3. Вычисляем градиенты функционала по формуле (31).

4. По методу спуска находим очередное приближение $p^{(t)}(x_i)$.

5. Вычисляем значение функционала (21). Если он достиг минимума, то полагаем, что $p(x_i)=p^{(1)}(x_i)$, если нет, то $p^{(0)}(x_i)=p^{(1)}(x_i)$ и возврат к пункту 2.

Список литературы

1. *Романов В.Г., Кабанихин С.И.* Обратные задачи геоэлектрики. — М.: Наука, 1991. — 334 с.
2. *Кабанихин С.И., Искаков К.Т.* Оптимизационные методы решения коэффициентных обратных задач. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 2001. — 316 с.
3. *Алексеев А.С.* Обратные динамические задачи сейсмики // Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных. — М.: Наука, 1967. — С. 9–84.

УДК 517.925.5

Б.Х.Жанбусинова

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Мақалада аргументтің ауытқуынан тұратын толқындық теңдеудің периодтық шешімдерінің бар болу сұрағы зерттелген. Автономдық жүйенің периодтық шешімін тұрғызу алгоритмі берілген. Бұл шешімнің тұрғызылуы үшін теңдеудің шешімі стандартты түрге келтіріліп орталандыру әдісі қолданылған. Аз параметрлі теңдеу үшін периодтық шешімнің бар болу теоремасы келтірілген.

The question of existence of periodic decisions of the wave equation containing a deviation of argument is investigated. The algorithm of construction of the periodic decision of the independent equation is given. For construction of this decision the equation is led. To standard kind the averaging method also is applied. The theorem of existence of the periodic decision for the equation with small parameter is resulted.

Широко известны колебательные системы, в которых возникновение автоколебательного режима, по существу, связано с наличием запаздывания. К их числу относится, например, электромагнитный прерыватель. Автоколебаниям, возникающим в системах, соответствуют устойчивые предельные циклы. Предельный цикл — это изолированная замкнутая траектория. Поэтому предельные циклы возможны лишь для уравнений, имеющих изолированные периодические решения.

Исследуем вопрос существования периодических решений у автономных уравнений. Этот вопрос представляет большой интерес, так как автономные уравнения имеют существенные особенности.

Во-первых, для неавтономных уравнений любое периодическое решение имеет вполне определенный, наперед заданный период, равный или кратный периоду правых частей. Автономные уравнения, в силу того, что не содержат явно времени, могут иметь периодические решения с некоторым периодом, который заранее неизвестен.

Во-вторых, если $x(t)$ — периодическое решение автономного уравнения, то $x(t+h)$, где h — постоянная величина, также является периодическим решением автономного уравнения.

Рассмотрим дифференциально-разностное автономное уравнение второго порядка вида

$$\frac{d^2x}{dt} + \omega^2 x(t) = f\left(x(t), \frac{dx(t-\Delta)}{dt}\right), \qquad (1)$$

где $f(x,y)$ — непрерывная по совокупности переменных x, y функция, которая определена в области $\Omega = \{-\infty < t < \infty, (x,y) \in D \times D\}$; Δ — постоянная, характеризующая запаздывание, причем $0 \le \Delta \le T$.

Предположим, что в области Ω функция $f(x,y)$ удовлетворяет условию ограниченности и условию Липшица

$$|f(x,y)| \le M\ ,\ |f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| \le K_1|x_1 - x_2| + K_2|y_1 - y_2|,$$

где M, K_1, K_2 — положительные постоянные.