ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ВТОРОГО РОДА

Жанболова А.К., магистр, преподаватель;
Каршыгина Г.Ж., магистрант; Омирбекова А.Е., магистрант
кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений
Карагандинский государственный университет им. академика Е.А.Букетова
г. Караганда, Республика Казахстан

В статье рассмотрено сингулярное интегральное уравнение Вольтерра второго рода, к которому редуцируется ряд краевых задач для нагруженных уравнений теплопроводности. Ввиду неограниченности промежутка интегрирования и особенности ядра к нему не применим метод последовательных приближений. Построено соответствующее характеристическое уравнение, решение которого найдено в явном виде. Для исходного уравнения применен метод равносильной регуляризации, найден его спектр.

Ключевые слова: сингулярное интегральное уравнение Вольтерра второго рода, норма оператора, метод регуляризации Карлемана-Векуа.

Ряд краевых задач для спектрально-нагруженных параболических уравнений, а также краевые задачи для уравнения теплопроводности в нецилиндрических областях сводятся к решению сингулярных интегральных уравнений типа Вольтерры вида [1]-[3]

$$\mathbf{K}_{2\lambda} v \equiv \left(I-\lambda \mathbf{K}_2\right) v \equiv v(t)-\lambda \int_t^{\infty} K_2(\tau,t) v(\tau)\, d\tau = g_1(t), \qquad t>0, \tag{1}$$

где

$$K_2(\tau,t)=\left(\frac{t}{\tau}\right)^{3/2-\omega} \cdot \frac{\tau^{\omega}}{2\sqrt{\pi}(\tau-t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\tau^{2\omega}}{4(\tau-t)}\right), \qquad \omega<\frac{1}{2}. \tag{2}$$

Особенность данного класса уравнений заключается в том, что к нему не применим метод последовательных приближений, так как ядро интегрального уравнения (1) – функция $K_2(\tau,t)$ обладает следующим свойством:

$$\lim_{t\to\infty} \int_t^{\infty} K_2(\tau,t)\, d\tau = 1. \tag{3}$$

Равенство (3) означает, что норма интегрального оператора, действующего в пространстве суммируемых функций и определяемого ядром $K_2(\tau,t)$, равна единице. Это существенно отличает уравнение (1) от классических уравнений Вольтерры второго рода, для которых решение существует и единственно.

Для исследования интегрального уравнения (1) рассмотрим соответствующее характеристическое уравнение, которое имеет вид:

$$\mathbf{K}_{\lambda} v \equiv \left(I-\lambda \mathbf{K}\right) v \equiv v(t)-\lambda \int_t^{\infty} K(\tau,t) v(\tau)\, d\tau = g_1(t), \quad t\in R_+, \tag{4}$$

где

$$K(\tau,t)=\left(\frac{t}{\tau}\right)^{1+\alpha/2} \cdot \frac{\alpha^{3/2}\tau^{\alpha-1}}{2\sqrt{\pi}\left(\tau^{\alpha}-t^{\alpha}\right)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\alpha}{4\left(\tau^{\alpha}-t^{\alpha}\right)}\right), \quad \alpha=1-2\omega>0. \tag{5}$$

Для ядра характеристического уравнения $K(\tau,t)$ также справедливо предельное соотношение:

$$\lim_{t\to\infty} \int_t^{\infty} K(\tau,t)\, d\tau = 1. \tag{6}$$

Для того, чтобы интегральное уравнение (4) было характеристическим для уравнения (1), должны выполняться следующие два условия:

1^0. оно должно сводиться к «эталонному» уравнению, решение которого найдено в [4];

2^0. разность ядер

$$K_2(\tau,t)-K(\tau,t)=\widetilde{K}(\tau,t)$$

должна обладать слабой особенностью (при $t\to\infty$).

Проверка выполнения условия 1^0 не вызывает затруднений.

Справедливость условия 2^0 следует из утверждения следующей теоремы:

Теорема 1. *При выполнении условий* $\alpha>0$ *и* $0<t<\tau<\infty$ *имеет место оценка:*

$$\left|K_2(\tau,t)-K(\tau,t)\right|\le C(\alpha)\,\frac{t^{1-\frac{\alpha}{2}}}{\tau^{3/2}\sqrt{\tau-t}}\cdot\exp\left[-C(\alpha)\,\frac{\tau^{1-\alpha}}{\tau-t}\right] \qquad (7)$$

и выполняется предельное соотношение

$$\lim_{t\to\infty}\int_t^\infty\left|K_2(\tau,t)-K(\tau,t)\right|d\tau=0.$$

Используя решение эталонного уравнения [4] запишем решение характеристического интегрального уравнения (4) в следующем виде $(\alpha>0)$:

$$v(t)=\widetilde{\psi}\left(\left[\alpha^{-1}t^{\alpha}\right]\right)=g_1(t)+\lambda\int_t^{\infty}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{1+\frac{\alpha}{2}}\cdot\tau^{\alpha-1}\cdot\mathbf{r}_{\lambda-}\left(\left[\alpha^{-1}\tau^{\alpha}\right]\right)-$$

$$-\left[\alpha^{-1}\tau^{\alpha}\right]g_1(\tau)d\tau+\sum_{k=-N_1}^{N_2}c_k t^{1+\alpha/2}\cdot\exp\left(\frac{-iz_k}{\alpha}\cdot t^{\alpha}\right),\quad t\in\mathbf{R}_+\ (*),$$

где

$$p_k=-\left[\ln^2\left|\overline{\lambda}\right|-\left(\arg\overline{\lambda}+2k\pi\right)^2\right]-i\cdot 2\left(\arg\overline{\lambda}+2k\pi\right)\cdot\ln\left|\overline{\lambda}\right|,\ k\in Z$$

$$r_{\lambda-}(y)=\frac{1}{2\pi(-\theta)^{3/2}}\sum_{m=1}^{\infty}m\cdot\lambda^m\cdot\exp\left(\frac{m^2}{4y}\right),\ |\lambda|<1,\quad y\in R_-,$$

$$r_{\lambda-}(y)=2\sum_{k=-\infty}^{-(N_1+1)}\sqrt{-p_k}\cdot\exp\left(p_k\cdot y\right)+2\sum_{k=N_2+1}^{\infty}\sqrt{-p_k}\cdot\exp\left(p_k\cdot y\right)+$$

$$+\frac{1}{2\pi(-y)^{3/2}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{m}{\lambda^m}\cdot\exp\left(\frac{m^2}{4y}\right),\qquad \operatorname{Re}p_k>0,\ |\lambda|\ge 1,\quad y\in R_-$$

$$-N_1\le k\le N_2,\quad N_1=\left[\frac{\ln|\lambda|+\arg\lambda}{2\pi}\right],\qquad N_2=\left[\frac{\ln|\lambda|-\arg\lambda}{2\pi}\right].$$

Линии, описываемые уравнением $|\lambda|=\exp\left(\left|\arg\lambda+2k\pi\right|\right)$, делят комплексную плоскость параметра λ на непересекающиеся области D_m, $m=0,1,2,\ldots$, следующим образом:

$$D_{2n}=\left\{D_n^{(1)}\bigcap D_n^{(2)}\right\}\setminus\bigcup_{k=-1}^{2n-1}D_k,\quad D_{-1}=\varnothing,\ \ D_{2n+1}=\left\{D_n^{(1)}\bigcup D_n^{(2)}\right\}\setminus\bigcup_{k=0}^{2n}D_k, \qquad (8)$$

где

$$D_n^{(1)}=\left\{\lambda:|\lambda|<\exp\left[(2n+1)\pi-\arg\lambda\right]\right\},\qquad D_n^{(2)}=\left\{\lambda:|\lambda|<\exp\left[2n\pi+\arg\lambda\right]\right\},$$

$n=0,1,2,\ldots$ Внешние части границ ∂D_m, $m=0,1,2,\ldots$, областей D_m, $m=0,1,2,\ldots$, обозначим соответственно через Γ_m, $m=0,1,2,\ldots$.

Решение исходного интегрального уравнения найдем методом регуляризации Карлемана-Векуа. Введем обозначение

$$\widetilde{K}(\tau,t)=K_2(\tau,t)-K(\tau,t) \qquad (9)$$

и запишем исходное интегральное уравнение (1) в виде

$$\widetilde{\mathbf{K}}_{\lambda}\widetilde{v} \equiv v(t) - \lambda \int_{t}^{\infty} K(\tau,t)v(\tau)d\tau = \lambda \int_{t}^{\infty} \widetilde{K}(\tau,t)v(\tau)d\tau + g_1(t) \qquad (10)$$

Рассматривая уравнение (10) как характеристическое, то есть считая правую часть этого уравнения временно известной запишем его решение

$$v(t) \equiv g(t) - \lambda \int_{t}^{\infty} \widetilde{K}(t,\tau)v(\tau)d\tau + \lambda \int_{t}^{\infty} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1+\alpha/2} \tau^{\alpha-1} r_{\lambda-}\left(\frac{\tau^{\alpha}}{\alpha} - \frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right) \cdot$$

$$\left[g_1(\tau)d\tau + \lambda \int_{\tau}^{\infty} \widetilde{K}(\xi,\tau)\, v(\xi)d\xi \right] d\tau + \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k t^{1+\alpha/2} \exp\left(\frac{p_k}{\alpha} t^{\alpha}\right).$$

Преобразуем правую часть последнего равенства

$$v(t) \equiv g_1(t) + \lambda \int_{t}^{\infty} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1+\alpha/2} \tau^{\alpha-1} r_{\lambda-}\left(\frac{\tau^{\alpha}}{\alpha} - \frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right) \cdot g_1(\tau)d\tau +$$

$$+ \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k t^{1+\alpha/2} \exp\left(\frac{p_k}{\alpha} \cdot t^{\alpha}\right) + \lambda \int_{\tau}^{\infty} \widetilde{K}(\tau,t)\, v(\tau)d\tau +$$

$$+ \lambda \int_{t}^{\infty} v(\xi)\, d\xi \int_{t}^{\infty} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1+\alpha/2} \cdot \tau^{\alpha-1} \cdot r_{\lambda-}\left(\frac{\tau^{\alpha}}{\alpha} - \frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right) \cdot \widetilde{K}(\xi,\tau)d\tau \qquad (11)$$

Поменяв ролями переменными интегрирования ξ и τ в повторным интеграле последнего уравнения получим новое регуляризованное уравнение относительно искомой функции $v(t)$:

$$\widetilde{\mathbf{K}}^{*}_{\lambda} v \equiv \left(I - \lambda \widehat{\mathbf{K}}^{*}\right) v \equiv v(t) - \lambda \int_{t}^{\infty} \widehat{K}(\tau,t)v(\tau)d\tau = \widehat{g}(t) + \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k \cdot t^{1+\alpha/2} \cdot \exp\left(\frac{p_k}{\alpha} \cdot t^{\alpha}\right) \qquad (12)$$

где использовали обозначения:

$$\widehat{K}(t,\tau) = \widetilde{K}(t,\tau) + \lambda \int_{t}^{\infty} \left(\frac{t}{\xi}\right)^{1+\alpha/2} \xi^{\alpha-1} r_{\lambda-}\left(\frac{\tau^{\alpha}}{\alpha} - \frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right) \cdot \widetilde{K}(\tau,\xi)d\xi = \widetilde{K}(t,\tau) + \lambda \widetilde{\widetilde{K}}(t,\tau) \qquad (13)$$

$$\widehat{g}_1(t) = g_1(t) + \lambda \int_{t}^{\infty} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1+\alpha/2} \tau^{\alpha-1} r_{\lambda-}\left(\frac{\tau^{\alpha}}{\alpha} - \frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right) g_1(\tau)d\tau. \qquad (14)$$

Покажем, что интегральное уравнение (12) действительно регулярное (имеет единственное решение), для этого достаточно показать справедливость следующей оценки:

$$\left|\widehat{K}(\tau)\right| \le C(\alpha) \frac{t^{-\varepsilon}}{\tau^{1/2+\alpha/2-\varepsilon}(\tau - t)^{1/2}} \cdot \exp\left\{-C(\alpha) \cdot \frac{\tau^{1-\alpha}}{\tau - t}\right\}, \qquad (15)$$

$$0 < \varepsilon < \alpha/2, \quad \alpha > 0, \quad 0 < t < \tau < \infty.$$

Для регуляризации особых интегральных уравнений с бесконечным пределом интегрирования целесообразнее переходит к уравнениям на конечном интервале. Поэтому в начале преобразуем интегральное уравнение (11) к уравнению на конечном интервале. Для этого в нем произведем замены независимых переменных

$$t = t_1^{-1}, \qquad \tau = \tau_1^{-1}$$

и получим:

$$v(t_1) - \lambda \int_{0}^{t_1} K'(t_1,\tau_1)v(\tau_1)d\tau_1 = \lambda \int_{0}^{t_1} \widetilde{K}'(t_1,\tau_1)v(\tau_1)d\tau + g_1(t_1), \qquad (16)$$

где

$$\widetilde{K}'(t_1,\tau_1) = K_2'(t_1,\tau_1) - K'(t_1,\tau_1), \qquad (17)$$

Соответственно равенства (12) - (14) примут вид:

$$\widehat{\mathbf{K}}_{\lambda}^{*'}\widetilde{v} \equiv \left(I-\lambda\widehat{\mathbf{K}}^{*'}\right)v \equiv v\left(t_1\right)-\lambda\int_0^{t_1}\widehat{K}'\left(t_1,\tau_1\right)v\left(\tau_1\right)d\tau_1 =$$

$$=\widehat{g}\left(t_1\right)+\sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k\cdot t_1^{-1-\alpha/2}\cdot\exp\left(\frac{p_k}{\alpha}\cdot t^{-\alpha}\right), \qquad (18)$$

здесь использованы обозначения:

$$\widehat{K}'\left(t_1,\tau_1\right)=\widetilde{K}'\left(t_1,\tau_1\right)+\lambda\int_{\tau_1}^{t_1}\left(\frac{\xi}{t_1}\right)^{1+\alpha/2}\cdot\xi^{-\alpha-1}\cdot r_{\lambda-}\left(\left[\alpha t_1^{\alpha}\right]^{-1}-\left[\alpha\xi^{\alpha}\right]^{-1}\right)\cdot\widetilde{K}'\left(\tau_1,\xi\right)d\xi=$$

$$=\widehat{K}'\left(t_1,\tau_1\right)+\lambda\cdot\widetilde{\widetilde{K}}'\left(t_1,\tau_1\right), \qquad (19)$$

$$\widehat{g}_1\left(t_1\right)=g_1\left(t_1\right)+\lambda\int_0^{t_1}\left(\frac{\tau_1}{t_1}\right)^{1+\alpha/2}\cdot\tau_1^{-\alpha-1}\cdot r_{\lambda-}\left(\left[\alpha\cdot t_1^{\alpha}\right]^{-1}-\left[\alpha\cdot\tau_1^{\alpha}\right]^{-1}\right)\cdot g_1\left(\tau_1\right)d\tau_1. \qquad (20)$$

Теперь покажем, что интегральное уравнение (18) действительно регулярное (вольтеррово), для этого достаточно доказать справедливость следующей леммы:

Лемма 1. *Ядро интегрального уравнения (18) имеет слабую особенность, т.е. справедлива оценка*

$$\left|\widehat{K}'\left(t_1,\tau_1\right)\right|\le C\frac{t_1^{1/2+\varepsilon}}{\tau_1^{1-\alpha/2+\varepsilon}\left(t_1-\tau_1\right)^{1/2}}\exp\left\{-c(\alpha)\cdot\frac{t_1\cdot\tau_1^{\alpha}}{t_1-\tau_1}\right\}, \qquad (21)$$

$$0<\varepsilon<\alpha/2,\quad \alpha>0,\ 0<\tau_1<t_1<\infty$$

Доказательство. Так как $\widehat{K}'(t,\tau)$ имеет представление $\widetilde{K}'(t,\tau)+\lambda\ \widetilde{\widetilde{K}}'(t,\tau)$, то оценка (21) следует нижеприведенных соотношений. Используя следующее двойное неравенство [5] [с.55]:

$C_1\ t^{\alpha-1}(t-\tau)\le t^{\alpha}-\tau^{\alpha}\le C_2\,t^{\alpha-1}(t-\tau),\quad C_1=\min\{1,\alpha\},\ C_2=\max\{1,\alpha\}$,

вначале получим $(\alpha=1-2\omega>0)$:

$$\widetilde{\widetilde{K}}'(t,\tau)\le M_1(\alpha)\int_{\tau}^{t}\eta^{-\alpha-1}\left(\frac{\eta}{\tau}\right)^{1-\alpha/2}\cdot\frac{\eta^{(\alpha-1)/2}}{\sqrt{\eta-\tau}}\cdot\frac{\sqrt{t}\eta^{\alpha/2}}{\sqrt{t-\eta}}\exp\left(-\frac{C_1(\alpha)(t-\eta)}{t\eta^{\alpha}}\right)d\eta+$$

$$+M_2(\alpha)\int_{\tau}^{t}\eta^{-\alpha-1}\left(\frac{\eta}{\tau}\right)^{1-\alpha/2}\cdot\frac{\eta^{(\alpha-1)/2}}{\sqrt{\eta-\tau}}\cdot\frac{t^{3/2}\eta^{3\alpha/2}}{(t-\eta)^{3/2}}\exp\left(-\frac{C_2(\alpha)\,t\eta^{\alpha}}{t-\eta}\right)d\eta=J_1(t,\tau)+J_2(t,\tau).$$

Здесь $C_j(\alpha),\ M_j(\alpha),\ j=1,2$ - постоянные, зависящие только от α, функции $J_1(t,\tau),\ J_2(t,\tau)$ соответственно равны:

$$J_1=M_1(\alpha)\frac{\sqrt{t}}{\tau^{1-\alpha/2}}\int_{\tau}^{t}\frac{1}{\eta^{(\alpha+1)/2}\sqrt{(\eta-\tau)(t-\eta)}}\exp\left(-\frac{C_1(\alpha)(t-\eta)}{t\eta^{\alpha}}\right)d\eta=M_1(\alpha)\frac{\sqrt{t}}{\tau^{1-\alpha/2}}I_1(t,\tau);$$

$$J_2=M_2(\alpha)\frac{\sqrt{t}}{\tau^{1-\alpha/2}}\int_{\tau}^{t}\frac{t\eta^{(\alpha+1)/2}}{(t-\eta)^{3/2}(\eta-\tau)^{1/2}}\exp\left(-\frac{C_2(\alpha)\,t\eta^{\alpha}}{t-\eta}\right)d\eta=M_2(\alpha)\frac{\sqrt{t}}{\tau^{1-\alpha/2}}I_2(t,\tau).$$

Далее, каждую из функций $I_1(t,\tau),\quad I_2(t,\tau)$ представим в виде суммы из двух слагаемых:

$$I_1(t,\tau)=I_{11}(t,\tau)+I_{12}(t,\tau);\quad I_2(t,\tau)=I_{21}(t,\tau)+I_{22}(t,\tau),$$

для каждого из которых последовательно будем иметь:

$$J_{11}(t,\tau)=\int_{\tau}^{\frac{t+\tau}{2}}\frac{1}{\eta^{(\alpha+1)/2}\sqrt{(\eta-\tau)(t-\eta)}}\exp\left(-\frac{C_1(\alpha)(t-\eta)}{t\eta^{\alpha}}\right)d\eta\le$$

$$\le C(\alpha)\sqrt{t}\int\limits_{\tau}^{\frac{t+\tau}{2}}\frac{\sqrt{t}\,d\eta}{(t-\eta)\sqrt{\eta(\eta-\tau)}}\le\left\|z^2=\frac{t-\tau}{t-\eta}-1\right\|\le$$

$$\le\frac{C(\alpha)}{\sqrt{t-\tau}}\int\limits_0^1\frac{dz}{\sqrt{z^2+\tau/t}}=\frac{C(\alpha)}{\sqrt{t-\tau}}\ln\left(\sqrt{t/\tau}+\sqrt{t/\tau+1}\right)=$$

$$=\frac{C(\alpha)}{\sqrt{t-\tau}}\ln\frac{1+\sqrt{1+\tau/t}}{\sqrt{\tau/t}}\le\frac{C(\alpha)}{\sqrt{t-\tau}}\ln\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{\tau/t}}\le$$

$$\le\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\left[C_1+C_2(\tau/t)^{\varepsilon}\left|\ln\frac{\tau}{t}\right|\cdot(t/\tau)^{\varepsilon}\right]=\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\left[C_1+C_3(t/\tau)^{\varepsilon}\right]$$

где значение параметра ε выбирается из условия $0<\varepsilon<\alpha/2$;

$$I_{12}(t,\tau)=\int\limits_{(t+\tau)/2}^{t}\frac{1}{\eta^{(\alpha+1)/2}\sqrt{(\eta-\tau)(t-\eta)}}\exp\left(-\frac{C_1(\alpha)(t-\eta)}{t\eta^{\alpha}}\right)d\eta\le$$

$$\le\left(\frac{2}{(t-\tau)}\right)^{(\alpha+1)/2}\frac{C(\alpha)}{\sqrt{t-\tau}}\int\limits_{(t+\tau)/2}^{t}\frac{1}{\sqrt{(t-\eta)}}\exp\left(-\frac{C_1(\alpha)(t-\eta)}{t^{\alpha+1}}\right)d\eta\le$$

$$\le C(\alpha)\left(\frac{t}{(t+\tau)}\right)^{(\alpha+1)/2}\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\cdot\int\limits_{(t+\tau)/2}^{t}\exp\left(-\frac{C_1(\alpha)(t-\eta)}{t^{\alpha+1}}\right)d\left(\frac{\sqrt{C_1(\alpha)(t-\eta)}}{t^{(\alpha+1)/2}}\right)\le$$

$$\le\left\|z=\frac{\sqrt{C_1(\alpha)(t-\eta)}}{t^{(\alpha+1)/2}}\right\|\le\frac{C(\alpha)}{\sqrt{t-\tau}}\int\limits_0^{\infty}\exp\left\{-z^2\right\}dz\le\frac{C(\alpha)}{\sqrt{t-\tau}};$$

$$I_{21}(t,\tau)=\int\limits_{\tau}^{(t+\tau)/2}\frac{\sqrt{t}\eta^{(\alpha-1)/2}}{(t-\eta)^{3/2}(\eta-\tau)^{1/2}}\exp\left(-\frac{C_2(\alpha)\,t\eta^{\alpha}}{t-\eta}\right)d\eta\le C(\alpha)\int\limits_{\tau}^{\frac{t+\tau}{2}}\frac{\sqrt{t}d\eta}{(t-\eta)\sqrt{\eta(\eta-\tau)}}\le$$

$$\le\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\left[C_1+C_2(\tau/t)^{\varepsilon}\left|\ln\frac{\tau}{t}\right|\cdot(t/\tau)^{\varepsilon}\right]=\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\left[C_1+C_3(t/\tau)^{\varepsilon}\right],$$

где последнее неравенство получается также как при оценке функции $I_{11}(t,\tau)$, и значение параметра ε выбирается также из условия $0<\varepsilon<\alpha/2$;

$$I_{22}(t,\tau)=\int\limits_{(t+\tau)/2}^{t}\frac{t\eta^{(\alpha-1)/2}}{(t-\eta)^{3/2}(\eta-\tau)^{1/2}}\exp\left(-\frac{C_2(\alpha)\,t\eta^{\alpha}}{t-\eta}\right)d\eta\le$$

$$\le\frac{C(\alpha)}{\sqrt{t-\tau}}\int\limits_{(t+\tau)/2}^{t}\frac{t\eta^{(\alpha-1)/2}}{(t-\eta)^{3/2}}\exp\left(-\frac{C_3(\alpha)\,t(t+\tau)^{\alpha}}{t-\eta}\right)d\eta=$$

$$=\frac{C(\alpha)}{\sqrt{t-\tau}}\int\limits_{(t+\tau)/2}^{t}\frac{t\eta^{(\alpha-1)/2}}{(t-\eta)^{3/2}}\exp\left(-\frac{C_3(\alpha)\,t^{\alpha+1}}{t-\eta}\left\{1+\frac{\tau}{t}\right\}^{\alpha}\right)d\eta\le$$

$$\le\frac{C(\alpha)}{\sqrt{t-\tau}}\int\limits_0^{t}\frac{t^{(\alpha+1)/2}}{(t-\eta)^{3/2}}\exp\left(-\frac{C_4(\alpha)\,t^{\alpha+1}}{t-\eta}\right)d\eta=\left\|\begin{matrix}z=\dfrac{t^{(\alpha+1)/2}}{2\sqrt{t-\eta}}\\ dz=\dfrac{t^{(\alpha+1)/2}d\eta}{4(t-\eta)^{3/2}}\end{matrix}\right\|=$$

$$=\frac{C(\alpha)}{\sqrt{t-\tau}}\int\limits_{t^{\alpha/2}/2}^{\infty}\exp\left\{-z^2\right\}dz\le\frac{C(\alpha)}{\sqrt{t-\tau}}\;.$$

В этих неравенствах постоянные $C(\alpha)$, $C_j(\alpha)$, $j=1,2,3,4$, разные и зависят только от α. Из полученных неравенств следует искомая оценка (21). Лемма доказана.

Итак, в силу оценки (21) для заданной правой части уравнение (18), а вместе с ним и уравнение (12) имеет только единственное решение, существование которого можно показать методом последовательных приближений.

Из соотношений (10) и (12) следует, что однородное уравнение

$$\mathbf{K}^*_{2\lambda}v \equiv (I-\lambda\mathbf{K}_2)v \equiv v(t)-\lambda\int_t^\infty K_2(\tau,t)v(\tau)d\tau = 0, \ t\in R_+, \qquad (22)$$

равносильно неоднородному уравнению:

$$\widehat{\mathbf{K}}^*_\lambda v \equiv v(t)-\lambda\int_t^\infty \widehat{K}(\tau,t)\mu(\tau)d\tau = \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k\cdot t^{1+\alpha/2}\cdot\exp\left(\frac{p_k}{\alpha}\cdot t^\alpha\right), \qquad t\in R_+, \qquad (23)$$

Рассмотрим вместо (23) семейство интегральных уравнений:

$$\widehat{\mathbf{K}}^*_\lambda \mu \equiv v(t)-\lambda\int_t^\infty \widehat{K}(t,\tau)v(\tau)d\tau = t^{1+\alpha/2}\cdot\exp\left(\frac{p_k}{\alpha}\cdot t^\alpha\right), \qquad (24)$$

$$k=-N_1, ..., 0, N_2, \quad t\in R_+$$

Далее, в силу того, что каждое из уравнений (24) имеет единственное нетривиальное решение $v_{\lambda k}(t)$, $k=-N_1,...,0,...,N_2$ (соответствующее правой части уравнения (24) $t^{1+\alpha/2}\cdot\exp\left(\frac{p_k}{\alpha}\cdot t^\alpha\right)$, то для каждого значения параметра $\lambda\in C\setminus D_0$ эти функции $v_{\lambda k}(t)$, $k=-N_1,...,0,...,N_2$, будут соответствующими собственными функциями однородного уравнения (22) (а значит, и однородного для (1) уравнения).

Теорема 2. *Значения $\lambda\in D_0$ из (8) является регулярными числами оператора $\mathbf{K}^*_{2\lambda}$ (1).*

Теорема 3. *Множество $C\setminus D_0$ составляет характеристические числа оператора $\mathbf{K}^*_{2\lambda}$ (2). Причем, если $\lambda\in D_m\bigcup\Gamma_{m-1}\setminus\left\{(-1)^m e^{m\pi}\right\}$, $m=1,2,...$, то $\dim Ker\left(\mathbf{K}^*_{2\lambda}\right)=m$; и соответствующими собственными функциями будут решения уравнений (22):*

$$v_{\lambda k}(t)=\left[\widehat{\mathbf{K}}^*_\lambda\right]^{-1}\left[t^{1+\alpha/2}\cdot\exp\left(\frac{p_k}{\alpha}\cdot t^\alpha\right)\right], \qquad k=1,....,\quad m=N_1+N_2+1.$$

Общим решением неоднородного интегрального уравнения (12), равно как и уравнения (1), будет функция:

$$v_\lambda(t)=\left[\widehat{\mathbf{K}}^*_\lambda\right]^{-1}\hat{g}(t)+\sum_{k=1}^{m=N_1+N_2+1} c_k\cdot v_{\lambda k}(t), \qquad t\in R_+,$$

где c_k - произвольные постоянные, $k=1,...,m$.

Литература:

1. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. - М.: Высшая школа, 1995. – 205 с.
2. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. – М.: Наука, 2012. – 232с.
3. Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И. Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. – Алматы: ҒЫЛЫМ, 2010. –334 с.
4. Akhmanova D.M., Dzhenaliev M.T., Ramazanov M.I. On a particular Volterra integral equation of second kind with a spectral parameter.// Siberian Mathematical Journal, 2011.-Vol. 52. - №1. – P.1-12.
5. Харди Г.Г., Литтльвуд Дж.Е., Полиа Г. Неравенства, М.: Иностранная литература, 1948, 456с.