

## Список литературы

1. Справочная книга по математической логике: Теория моделей / Под. ред. Дж. Барвайса. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. — Ч. 1. — С. 165.
2. Yeshkeyev A.R. On J-stability of Jonsson's theories ABSTRAKTS // The 9<sup>th</sup> Asian Logic Conference. — Novosibirsk, 2005. — P. 73–74.
3. Ешкеев А.Р. О J-форсинге совершенных йонсоновских теорий // Вестн. КарГУ. Сер. Математика. — 2006. — № 3(43). — С. 18–22.
4. Ешкеев А.Р., Оспанов Р.М. Йонсоновские теории и их компаньоны // Материалы 10-й Межвуз. конф. по математике и механике. — Алматы, 2005.
5. Мустафин Т.Г. Обобщенные условия Йонсона и описание обобщенно-йонсоновских теорий булевых алгебр // Матем. тр. — Новосибирск: Изд-во ИМ, 1998. — С. 135–197.
6. Ешкеев А.Р. О PJ-форкинге в классе  $\Delta$ -PJ-теорий // Вестн. КазНУ. Сер. матем., мех., информ. — 2007. — № 3(54).
7. Ешкеев А.Р. Счетная категоричность  $\Delta$ -PJ-теорий // Вестн. КазНУ. Сер. матем., мех., информ. — 2008. — № 3. — С. 64–69.
8. Mustafin Y. Quelques proprietes des theories de Jonsson // The Journal of Symbolic Logic. — 2002. — Vol. 67. — N 2. — P. 528–536.
9. Ешкеев А.Р., Оспанов Р.М. Связь йонсоновских теорий с теоремой Линдстрема // Тр. V Казахско-французского коллоквиума по теории моделей. — Караганда: Изд-во КарГУ, 2001.
10. Weispfenning V. The model-theoretic significance of complemented existential formulas // The Journal of Symbolic Logic. — 1981. — Vol. 46. — N 4. — С. 843–850.

УДК 510.67

А.Р.Ешкеев

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова

О ЦЕНТРАЛЬНЫХ ТИПАХ  $\Delta$ -PM-ТЕОРИЙ

*Мақалада  $\Delta$ -PM-теорияның кейбір қасиеттері қарастырылды. Біріншіден, теорияның форкинг қасиеті аксиоматикалық түрде енгізім зерттелді. Нәтижесінде классикалық форкингтің қасиеттеріне біз енгізген ұғым эквивалентті болды. Екіншіден, осы теорияның орталық типтерінің стабильдік қасиеттері талданды. Бұл жерде жаңадан енгізілген ұғым қасиеттерін бұрынғы классикалық ұғымдармен байланысы ізделді.*

*We are considering in this article some properties of  $\Delta$ -PM-theories which perfect,  $\alpha$ -Jonsson's and complete for  $\Sigma_{\alpha+1}$ -sentences. Under these conditions and  $\alpha \leq \omega$ ,  $\lambda \geq \omega$  we are investigating the property some kind of stability for central types and connection with stability in  $\Delta$ -PM meaning. Also we introduced the axiomatic kind of forking property of such theories.*

## Введение

В данной статье рассмотрены некоторые свойства центральных типов и свойство форкинга для  $\Delta$ -PM-теорий.

При изучении свойств форкинга для  $\Delta$ -PM-теории рассмотрен аксиоматический подход. Подобное было рассмотрено в [1, 2] соответственно для йонсоновских теорий и  $\Delta$ -PJ-теории. Основным результатом является следующая теорема.

**Теорема 1.2.** Пусть  $T$  —  $\Delta$ -PM-теория,  $\alpha$ -йонсоновская, совершенная, полная для  $\Sigma_{\alpha+1}$  предположений. Тогда следующие условия эквивалентны:

- отношение PJNF удовлетворяет аксиомам 1–7 относительно теории  $T$ ;
- $T^*$  стабильна и для любых  $p \in P, A \in A((p, A) \in PJNF \Leftrightarrow p$  не форкуется над  $A$  в смысле Шелаха).

Идея центрального типа появляется при рассмотрении обогащенной сигнатуры.

$\Delta$ -PM-теории были определены в [3]. Такие теории являются позитивным обобщением обобщенно-йонсоновских теорий, введенных в [4].

Пусть  $T$  — произвольная  $\Delta$ - $PM$ -теория в языке сигнатуры  $\sigma$ . Пусть  $C$  — семантическая модель теории  $T$ ,  $A \subseteq C$ . Пусть  $\sigma_r(A) = \sigma \cup \{c_a \mid a \in A\} \cup \Gamma$ , где  $\Gamma = \{P\} \cup \{c\}$ . Рассмотрим следующую теорию:  $T_r^{PM}(A) = Th_{\Pi_{\alpha+2}^+}(C, a)_{a \in A} \cup \{P(c)\} \cup \{P \subseteq\}$ , где  $\{P \subseteq\}$  — бесконечное множество предложений, которое говорит, что интерпретация символа  $P$  есть позитивно экзистенциально замкнутая подмодель в сигнатуре  $\sigma$ . Эта теория не обязательно полная. Через  $S_r^{PM}$  обозначим множество всех  $\Sigma_{\alpha+1}^+$  пополнений теории  $TJ P$  —  $\lambda$ -стабильной, если  $|S_r^{PM}| \leq \lambda$  для любого  $A$ , такого, что  $|A| \leq \lambda$ .

Рассмотрим все пополнения центра  $T^*$  теории  $T$  в новой сигнатуре  $\sigma_r$ , где  $\Gamma = \{c\}$ . В силу  $\Delta$ - $PM$ -ности теории  $T^*$  существует ее центр, который мы обозначим как  $T^c$ . При ограничении  $T^c$  до сигнатуры  $\sigma$  теория  $T^c$  становится полным типом. Этот тип мы назовем центральным типом теории  $T$ .

В рамках указанных выше определений получена следующая

**Теорема 2.1.** Пусть  $T$  —  $\Sigma_{\alpha+1}$ -полная, совершенная  $\Delta$ - $PM$ -теория. Тогда следующие условия эквивалентны:

- теория  $T^c P$  —  $\lambda$ -стабильна в смысле [5];
- теория  $T^* J - P$  —  $\lambda$ -стабильна.

### §1 О $PJ$ -форкинге в классе $\Delta$ - $PM$ теорий

Нашей задачей является определение аксиоматическим путем понятия форкинга для  $\Delta$ - $PM$ -теории, когда она совершенная  $\alpha$ -йонсоновская теория, методом обобщения результатов из [1, 2]. Дадим следующие определения:

**Определение 1.1.** Пусть  $M$  —  $\Sigma_{\alpha+1}^+$ -насыщенная,  $\Delta$ -позитивно  $\alpha+1$  экзистенциально замкнутая модель мощности (достаточно большой кардинал) к  $\Delta$ - $PM$ -теории  $T$  ( $\Sigma_{\alpha+1}^+$ -насыщенность означает насыщенность относительно  $\Sigma_{\alpha+1}^+$ -типов в своей мощности). Напомним, что модель  $M$  теории  $T$  называется  $\Delta$ -позитивно экзистенциально замкнутой, если для каждого  $\Delta$ -гомоморфизма  $f: M \xrightarrow{\Delta} N$  и для каждого  $\bar{a} \in M$  и  $\phi(\bar{x}, \bar{y}) \in \Delta: N \models \exists \bar{y} \phi(f(\bar{a}), \bar{y}) \Rightarrow M \models \exists \bar{y} \phi(\bar{a}, \bar{y})$ .

Пусть  $T$  —  $\Delta$ - $PM$ -теория,  $S^{PM}(X)$  — множество всех позитивных  $\Sigma_{\alpha+1}^+$  полных  $n$  типов над  $X$ , совместных с  $T$ , для каждого конечного  $n$ .

Пусть  $A$  — класс всех подмножеств  $M$ ,  $P$  — класс всех  $\Sigma_{\alpha+1}^+$ -типов (не обязательно полных);  $PJNF \subseteq P \times A$  — некоторое бинарное отношение. Мы накладываем на  $PJNF$  (позитивно йонсоновский нефоркинг) следующие аксиомы:

**Аксиома 1.** Если  $(p, A) \in PJNF$ ,  $f \in \text{Aut}(M)$ ,  $f(A) = B$ , то  $(f(p), B) \in PJNF$ .

**Аксиома 2.** Если  $(p, A) \in PJNF$ ,  $q \subseteq p$ , то  $(q, A) \in PJNF$ .

**Аксиома 3.** Если  $A \subseteq B \subseteq C$ ,  $p \in S^{PM}(C)$ , то  $(p, A) \in PJNF \Leftrightarrow (p, B) \in PJNF$  и  $(p|B, A) \in PJNF$ .

**Аксиома 4.** Если  $A \subseteq B$ ,  $\text{dom}(p) \subseteq B$ ,  $(p, A) \in PJNF$ , то  $\exists q \in S^{PM}(B)$  ( $p \in q$  и  $(q, A) \in PJNF$ ).

**Аксиома 5.** Существует кардинал  $\mu$  такой, что если  $A \subseteq B \subseteq C$ ,  $p \in S^{PM}(B)$ ,  $(p, A) \in PJNF$ , то  $|\{q \in S^{PM}(C) : p \subseteq q \text{ и } (q, A) \in PJNF\}| < \mu$ .

**Аксиома 6.** Существует кардинал  $\rho$  такой, что  $\forall p \in P, \forall A \in A$ , если  $(p, A) \in PJNF$ , то  $\exists A_1 \subseteq A, (|A_1| < \rho \text{ и } (p, A_1) \in PJNF)$ .

**Аксиома 7.** Если  $p \in S^{PM}(A)$ , то  $(p, A) \in PJNF$ .

Классическое понятие форкинга принадлежит Шелаху.

**Определение 1.2.** Множество формул  $\{\phi(\bar{x}, \bar{a}_i) : i < k\} = p$  называется  $k$ -несовместным для некоторого положительного целого  $k$ , если каждое конечное подмножество  $p$  мощности  $k$  несовместно, т.е.  $\models \neg \bar{x}(\phi(\bar{x}, \bar{a}_{i_1}) \wedge \dots \wedge \phi(\bar{x}, \bar{a}_{i_k}))$  для каждого  $i_1 < \dots < i_k < k$ .

Частичный тип делится над множеством относительно  $k \in \omega$ , если существует формула  $\phi(\bar{x}, \bar{a})$  и последовательность  $\langle \bar{a}_i : i \in \omega \rangle$  такая, что

- 1)  $p \not\vdash \phi(\bar{x}, \bar{a})$ ;
- 2)  $tp(\bar{a} / A) = tp(\bar{a}_i / A)$  для всех  $i$ ;
- 3)  $\{\phi(\bar{x}, \bar{a}_i) : i \in \omega\}$  —  $k$ -несовместно.

Также  $p$  делится над  $A$  относительно некоторого  $k$ . Кроме того,  $p$  форкуется над  $A$  в  $T$ , если существуют формулы  $\phi_0(\bar{x}, \bar{a}_0), \dots, \phi_n(\bar{x}, \bar{a}_n)$  такие, что:

- (i)  $p \models \bigcup_{0 \leq i \leq n} \phi_i(\bar{x}, \bar{a}_i)$ ,
- (ii)  $\phi_i(\bar{x}, \bar{a}_i)$  делится над  $A$  для каждого  $i$ .

Следующая договоренность является важной. Фактически мы будем говорить о семантическом аспекте  $\Delta$ -PM теории. Если  $\Delta$ -PM-теория  $T$  является  $\alpha$ -йонсоновской, то с  $Mod T$  мы работаем как с классом моделей некоторой йонсоновской теории. Если же  $\Delta$ -PM-теория  $T$  не является  $\alpha$ -йонсоновской, то в качестве  $Mod T$  мы будем рассматривать класс ее позитивно экзистенциально замкнутых моделей  $\Sigma_{\alpha+1}^+ T$ . Такой подход для класса  $\Sigma_{\alpha+1}^+ T$  экзистенциально замкнутых моделей произвольной универсальной теории  $T$  был рассмотрен в [6]. Так как относительно йонсоновских теорий возможны два случая: совершенный и несовершенный, то мы будем придерживаться следующего. Хорошо известно [7], что если йонсоновская теория  $T$  совершенна, то класс ее экзистенциально замкнутых моделей элементарен и совпадает с  $Mod T^*$ , где  $T^*$  — ее центр. В противном случае, т.е. если теория  $T$  несовершенна, мы поступаем аналогично [6], только вместо  $Mod T$  работаем с классом  $\Sigma_{\alpha+1}^+ T$ , который рассматривается как расширение  $E_T$ -класса экзистенциально замкнутых моделей (оба класса всегда существуют), и в зависимости от совершенности и несовершенности теории  $T$  теоретико-модельные свойства класса  $\Sigma_{\alpha+1}^+ T$  представляют особый интерес. В данной статье при рассмотренном  $\Delta$  изучаемые  $\Delta$ -PM-теории являются  $\Delta$ -PM-совершенными, что является естественным обобщением совершенности в йонсоновском смысле.

**Определение 1.3.** Следуя [8], мы говорим, что модель  $A \in K$  является simple в классе  $K$ , если для любого  $B \in K$ , такого, что существует гомоморфизм  $h: A \rightarrow B$ , следует, что  $h$  является вложением. Мы говорим, что теория  $T$  удовлетворяет условию (S), если каждая модель  $A \in K$  является simple в классе  $K$ . В [8] замечено, что (S) эквивалентно следующему синтаксическому свойству: (S') каждая экзистенциальная формула в  $L$  эквивалентна в  $T$  некоторой позитивной экзистенциальной формуле.

Легко заметить, что нейонсоновская  $\Delta$ -PM-теория  $T$  в силу договоренности о  $Mod T$  удовлетворяет свойству (S').

Мы будем использовать в доказательстве теоремы 1.2. следующие результаты:

**Теорема 1.1.** (Ramsey F.P.) Пусть  $I$  — бесконечное множество;  $n < \omega$ ,  $|I|^n$  — семейство всех подмножеств множества  $I$ , которые состоят точно из  $n$  элементов. Если  $|I|^n = A_0 \cup \dots \cup A_{k-1}$ ,  $k < \omega$ ,  $A_i \cap A_j = \emptyset$  с  $i < j < k$ , то существует бесконечное  $J \subset I$  такое, что  $|J|^n \subset A_i$  для некоторого  $i < k$ .

**Лемма 1.1.** [10, лемма 14.9]. Пусть  $T$  — стабильная теория;  $M$  — насыщенная модель мощности  $\mu^+$ ; типы  $p_1, p_2 \in S(M)$  не форкуются над  $A$ . Тогда если  $p_1 \upharpoonright A = p_2 \upharpoonright A$ , то существует тождественный на  $A$  элементарный мономорфизм  $f$  такой, что  $f(d_1) \sim d_2$ , где  $d_1, d_2$  — схемы, определяющие  $p_1, p_2$  соответственно.

Класс всех  $\Delta$ -позитивно  $\alpha+1$  экзистенциально замкнутых моделей теории  $T$  обозначим через  $\Sigma_{\alpha+1}^+ T$ .

**Определение 1.4.** Мы говорим, что  $\Delta$  –  $PM$  – теория  $T$  –  $PM$  –  $\lambda$  – стабильна, если для любой модели  $A \in \Sigma_{\alpha+1}^+ T$ , для любого подмножества  $X$  множества  $A$   $|X| \leq \lambda \Rightarrow |S^{PM}(X)| \leq \lambda$ .  $\Delta$  –  $PM$  – теория  $T$  –  $PM$  – стабильна, если она  $PM$  –  $\lambda$  – стабильна для некоторого  $\lambda$ .

**Теорема 1.2.** Пусть  $T$  —  $T$  –  $\Delta$  –  $PM$  – теория,  $\alpha$  – йонсоновская, совершенная, полная для  $\Sigma_{\alpha+1}$  – предложений. Тогда следующие условия эквивалентны:

- отношение  $PJNF$  удовлетворяет аксиомам 1–7 относительно теории  $T$ ;
- $T^*$  стабильна и для любых  $p \in P, A \in A((p, A) \in PJNF \Leftrightarrow p$  не форкуется над  $A$  в смысле Шелаха).

**Доказательство.**  $1 \Rightarrow 2$ . Пусть  $\lambda = 2^{\rho \uparrow \mu}$ , где  $\lambda, \rho, \mu$  — кардиналы, соответствующие аксиомам 1–7. Теперь покажем, что  $T$   $PM$  –  $\lambda$  – стабильна. Тогда по теореме 2.1. из [9] мы имеем, что  $T^*$   $\lambda$  – стабильна. Очевидно, что  $\lambda^{\rho} = \lambda$ . Пусть  $|A| = \lambda$ . Если  $p \in S^{PM}(A)$ , то по аксиоме 7  $(p, A) \in PJNF$  и по аксиоме 6 существует  $A_p \subseteq A$  такой, что  $|A_p| < \rho$  и  $(p, A_p) \in PJNF$ . Тогда по аксиоме 3  $(p \upharpoonright A_p, A) \in PJNF$ . Мы обозначаем  $p \upharpoonright A_p$  через  $g(p)$ . По аксиоме 5  $|\{q \in S^{PM}(A) : g(q) = g(p)\}| < \mu$ . Тогда  $|S^{PM}(A)| \leq |\{g(p) : p \in S^{PM}(A)\}| \cdot \mu \leq |A^{\rho}| \cdot 2^{\rho \uparrow \mu} \cdot \mu \leq \lambda^{\rho} \cdot \lambda \cdot \lambda = \lambda^{\rho} = \lambda$ . Следовательно,  $T$  —  $PM$  –  $\lambda$  – стабильна. И мы заключаем, что  $T^*$   $\lambda$  – стабильна по теореме 2.1 из [9].

Пусть теперь  $(p, A) \in PJNF$ . Покажем, что  $p$  не форкуется над  $A$ . Пусть  $B = \text{dom}(p)$ . Тогда по аксиоме 4 существует  $q \in S^{PM}(B)$  такой, что  $p \subseteq q$  и  $(q, A) \in PJNF$ . Докажем, что  $q$  не форкуется над  $A$  (тогда  $p$  не форкуется над  $A$  по аксиоме 2). Предположим обратное. Тогда в силу совершенности теории  $T$  и определения 1.2, а также  $(S')$  существует конечное множество позитивных экзистенциальных формул  $\Sigma_0^+$  такое, что  $q \upharpoonright \bigcup \{\phi : \phi \in \Sigma_0^+\}$  и каждая формула  $\phi \in \Sigma_0^+$  делится над  $A$ . Пусть  $C = B \cup D$ ,  $D$  — множество констант, входящих хотя бы в одну из формул из  $\Sigma_0^+$ . По аксиоме 4 существует  $q_0 \in S^{PM}(C)$  такой, что  $q \in q_0$  и  $(q_0, A) \in PJNF$ . Очевидно, что  $q_0 \upharpoonright \bigcup \{\phi : \phi \in \Sigma_0^+\}$ , следовательно, существует  $\phi(\bar{x}, \bar{a}) \in q_0 \cap \Sigma_0^+$ . Используя теорему 1.1, теорему компактности и делимость  $\phi(\bar{x}, \bar{a})$  над  $A$ , мы можем показать существование последовательности  $\langle \bar{a}_\alpha : \alpha < \mu^+ \rangle$  и элементарных мономорфизмов  $f_\alpha, \alpha < \mu^+$ , тождественных на  $A$  так, что  $\bar{a}_0 = \bar{a}, \bar{a}_\alpha = f_\alpha(\bar{a}), \alpha < \mu^+$  и  $\{\phi(\bar{x}, \bar{a}_\alpha) : \alpha < \mu^+\}$   $k$  – несовместно для некоторого  $k < \omega$ .

Пусть  $E = C \cup \{\bar{a}_\alpha : \alpha < \mu^+\}, q_\alpha = f_\alpha(q_0), 0 < \alpha < \mu^+$ . По аксиоме 1  $(q_0, A) \in PJNF$ ,  $\alpha < \mu^+$ , по аксиоме 4 существуют  $q'_\alpha \in S^{PM}(E)$  такие, что  $q_\alpha \subseteq q'_\alpha$  и  $(q'_\alpha, A) \in PJNF$ . Ясно, что  $\phi(\bar{x}, \bar{a}_\alpha) \in q'_\alpha$ ,  $q_\alpha \subseteq q'_\alpha$ ,  $\alpha < \mu^+$ . Мы имеем  $|\{q'_\alpha : \alpha < \mu^+\}| = \mu^+$ , так как  $\{\phi(\bar{x}, \bar{a}_\alpha) : \alpha < \mu^+\}$   $k$  – несовместно. Получили противоречие с аксиомой 5. Следовательно,  $q$  не форкуется над  $A$ . Таким образом, мы имеем, что если  $(p, A) \in PJNF$ , то  $p$  не форкуется над  $A$ .

Докажем в обратную сторону. Пусть  $p$  не форкуется над  $A$ . Так как теория  $T$  совершенна, то  $T^*$  модельно полна [7], и для нас достаточно работать только с экзистенциальными типами, более того, в силу  $(S')$  с позитивно экзистенциальными типами, и рассматривать  $\Sigma_{\alpha+1}^+$  – насыщенные позитивные  $\alpha + 1$  экзистенциально замкнутые модели теории  $T$ . Нам нужно доказать, что  $(p, A) \in PJNF$ . Пусть  $M \supseteq A, M \supseteq \text{dom}(p), |M| > 2^{\rho \uparrow \mu}$  и  $M$  —  $\Sigma_{\alpha+1}^+$  – насыщенная модель теории  $T^*$ ,  $t \in S^{PM}(M), p \subseteq t, t$  не форкуется над  $A$ . По аксиоме 7  $(t \upharpoonright A, A) \in PJNF$ , и по аксиоме 5 существует  $q \in S^{PJ}(M)$  такой, что  $q \supseteq t \upharpoonright A$  и  $(q, A) \in PJNF$ . Как показано выше,  $(q, A) \in PJNF$  влечет, что  $q$  не форкуется над  $A$ . По лемме 1 существует автоморфизм  $f$  модели  $M$ , тождественный на  $A$ , такой, что  $y = f(q)$ . Тогда по аксиоме 1  $(t, A) \in PJNF$  и по аксиоме 2  $(p, A) \in PJNF$ . Следовательно,  $1 \Rightarrow 2$  доказано.

$2 \Rightarrow 1$ . Так как центр теории  $T$ , а именно  $T^*$ , является полной теорией, то к нему можно применить свойства форкинга в смысле Шелаха. Например, как в доказательстве теоремы 19.1 ( $2 \Rightarrow 1$ ) из [10]. Полученные результаты (аналоги аксиом 1–7 для полных теорий) можно легко ограничить до обобщений соответствующих понятий в  $\alpha$ -йонсоновском смысле.

## §2 Стабильностные свойства центральных типов $\Delta$ – $PM$ -теории

В данном параграфе мы дадим доказательство того факта, что стабильностные свойства центральных типов, как и стабильность в обычном смысле для центров с выделенным предикатом, совпадают со стабильностью с выделенным предикатом в  $PM$  смысле.

Остановимся на том, что означает выделенный предикат. В свое время известный французский математик Б.Пуаза определил понятие элементарной пары моделей. По сути это модель, в которой в качестве элементарной подмодели рассматривается реализация одноместного предикатного символа. В дальнейшем Т.Г.Мустафиним было введено понятие  $T$ -стабильности, которое обобщает вышеуказанное понятие элементарной пары. Последним достижением в связи с этим вопросом является понятие  $E$ -стабильности, введенное и рассмотренное Е.А.Палютиным. Понятие  $E$ -стабильности отличается от понятия  $T$ -стабильности в том смысле, что оно устойчиво относительно определимости. Напомним, что в классическом случае, если теория стабильна, то любой тип определим.

Введем следующие обозначения:

Пусть  $T$  — произвольная  $\Delta$  –  $PM$ -теория в языке сигнатуры  $\sigma$ . Пусть  $C$  — семантическая модель теории  $T$ ,  $A \subseteq C$ . Пусть  $\sigma_\Gamma(A) = \sigma \cup \{c_a \mid a \in A\} \cup \Gamma$ , где  $\Gamma = \{P\} \cup \{c\}$ . Рассмотрим следующую теорию  $T_\Gamma^{PM}(A) = Th_{\Pi_{\alpha+2}^+}(C, a)_{a \in A} \cup \{P(c)\} \cup \{P \subseteq\}$ , где  $\{P \subseteq\}$  есть бесконечное множество предложений, которое говорит, что интерпретация символа  $P$  есть позитивно экзистенциально замкнутая подмодель в сигнатуре  $\sigma$ . Эта теория не обязательно полная. Поэтому у неё могут быть конечные модели. Требование экзистенциальной замкнутости подмодели не случайно. Это связано с тем, что подмодель в наших рассуждениях обязана быть бесконечной. А любая экзистенциально замкнутая модель является бесконечной по определению.

Через  $S_\Gamma^{PM}$  обозначим множество всех  $\Sigma_{\alpha+1}^+$ -пополнений теории  $T$   $P$  –  $\lambda$ -стабильной, если  $|S_\Gamma^{PM}| \leq \lambda$  для любого  $A$ , такого, что  $|A| \leq \lambda$ .

Рассмотрим все пополнения центра  $T^*$  теории  $T$  в новой сигнатуре  $\sigma_\Gamma$ , где  $\Gamma = \{c\}$ . В силу того, что рассматриваемая теория  $T$  по условию  $\Delta$  –  $PM$ -теория, то в обогащенном языке ничего не изменится. Далее, в силу того, что по условию  $T$  совершенно как  $\alpha$ -йонсоновская теория, то  $T^*$  является  $\Delta$  –  $PM$ -теорией.

Тогда существует ее центр, и он является одним из пополнений теории  $T^*$  в обогащенном языке. Этот центр мы обозначим как  $T^c$ . При ограничении  $T^c$  до сигнатуры  $\sigma$  теория  $T^c$  становится полным типом. Этот тип мы назовем центральным типом теории  $T$ .

В рамках указанных выше определений получена следующая

**Теорема.** Пусть  $T$  —  $\Sigma_{\alpha+1}^+$ -полная, совершенная  $\Delta$  –  $PM$  теория. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) теория  $T^c$   $P$  –  $\lambda$ -стабильна в смысле [5];
- 2) теория  $T^*$   $PM$  –  $\lambda$ -стабильна.

**Доказательство.** Из 1) доказательство 2) тривиально, так как если пополнений не больше чем  $\lambda$ , то  $\Sigma_{\alpha+1}^+$ -пополнений, тем более, не больше, чем  $\lambda$ . Докажем 1) из 2). Пусть теория  $T^*$   $PM$  –  $\lambda$ -стабильна. Это равносильно тому, что  $T_\Gamma^{PM}(A)$  в сигнатуре  $\sigma_p(A) = \sigma_A \cup \{P\}$  равняется соответствующей оболочке Кайзера  $T^0$ . В силу совершенности теории  $T$  имеем, что  $T^0 = T^*$  и  $\Sigma_{\alpha+1}^+ T = Mod T^*$  (в силу совершенности) и  $T_\Gamma^{PM}(A) = T^0$  будет совершенной йонсоновской теорией. Пусть у теории  $T^0$  не более, чем  $\lambda$   $\Sigma_{\alpha+1}^+$ -пополнений. Центр теории  $T$  в новой сигнатуре  $\sigma_p(A) = \sigma_A \cup \{P\}$  будет равняться  $Th(C, a)_{a \in A} \cup \{P(c_a) \mid a \in A\} \cup \{P \subseteq\}$ . Нам надо показать, что у  $T^*$  всех пополнений не более  $\lambda$ . Тем самым  $T^*$  будет  $P$  –  $\lambda$ -стабильна (в смысле [5]). Пойдем за счет чего  $T^*$  не полна в новой сигнатуре. Добавление констант дает только несущественные расширения, что не изменит количества типов экзистенциально замкнутых подмоделей  $C$ . Существенную роль играют реализации предиката

$P$ . В данном случае реализацией предиката  $P$  будет некоторая элементарная подмодель  $M$  модели  $C$ . Так как семантическая модель  $C$   $\alpha$ -йонсоновской теории  $T$  является экзистенциально замкнутой [4], то в силу предиката  $P$  в  $C$  ( $M \leq C$ ) следует, что  $M \in \Sigma_{\alpha+1}^+ T$ . Рассмотрим произвольные пополнения  $T'$  теории  $T^*$  в новой сигнатуре. В силу определения  $T^*$  найдется такая модель  $M$  из  $\Sigma_{\alpha+1}^+ T$ , что  $T' = Th(C, M, a)_{a \in A}$ , где  $M$  — интерпретация предиката  $P$  в семантической модели  $C$ . Мы имеем, что  $T' = Th(C, M, a)_{a \in A}$ -йонсоновская. В этом случае в силу модельной полноты  $T'$  любая формула в  $T'$  эквивалентна некоторой экзистенциальной формуле в  $T'$ . Тогда в силу  $\Sigma_{\alpha+1}$ -полноты теории  $T$  таких пополнений по условию 2) не более чем  $\lambda$ . Тем самым утверждение доказано.

#### Заключение

Заметим, что так как теория, полная для экзистенциальных предложений, удовлетворяет свойству совместного вложения ( $JEP$ ), то обратное неверное условие  $\Sigma_{\alpha+1}$ -полноты в теореме снять нельзя. В связи с тем, что существует континуум не элементарно эквивалентных между собой экзистенциально замкнутых групп, а теория групп является йонсоновской, то можно сделать вывод, что в условии теоремы нельзя убрать требование совершенности.

#### Список литературы

1. Ешкеев А.Р. О J-форкинге совершенных йонсоновских теорий // Вестн. КарГУ. Сер. Матем. — 2006. — № 3(43). — С. 18–22.
2. Ешкеев А.Р. О PJ-форкинге в классе  $\Delta$ -PM-теорий // Вестн. КазНУ. Сер. матем., мех., информ. — 2007. — № 3(54). — С. 10–16.
3. Ешкеев А.Р. Счетная категоричность  $\Delta$ -PM-теорий // Вестн. КазНУ. Сер. матем., мех., информ. — 2008. — № 3. — С. 64–69.
4. Мустафин Т.Г. Обобщенные условия Йонсона и описание обобщенно-йонсоновских теорий булевых алгебр // Матем. тр. — Новосибирск: Изд. ИМ, 1998. — С. 135–197.
5. Мустафин Т.Г., Нурмагамбетов Т.А. О  $P$ -стабильности полных теорий // Структурные свойства алгебраических систем: Сб. науч. тр. — Караганда: Изд-во КарГУ, 1990. — С. 88–100.
6. Pillay A. Forking in the category of existentially closed structures // Connection between Model Theory and Algebraic and Analytic Geometry (A. Macintyr, ed). Quaderni di Matematica. — Vol. 6. — University of Naples.
7. Ешкеев А.Р., Оспанов Р.М. Связь йонсоновских теорий с теоремой Линдстрема // Труды V Казахско-французского коллоквиума по теории моделей. — Караганда: Изд-во КарГУ, 2001. — С. 65–75.
8. Weispfenning V. The model-theoretic significance of complemented existential formulas // The Journal of Symbolic Logic. — 1981. — Vol. 46. — № 4. — P. 528–536.
9. Ешкеев А.Р., Бегтаева Г.С. Стабильность  $\Delta$ -PM-теории и её центра // Вестн. КарГУ. Сер. Матем. — 2009. — № 4(56). — С. 29.
10. Мустафин Т.Г. Стабильные теории: Учеб. пособие. — Караганда, 1981.