N.A.Bokayev, A.T.Syzdykova

An estimate of best approximation by angle of sum of double series with respect to multiplicative system with quasiconvex coefficients

In this work double series with respect to multiplicative systems in terms of quasiconvex coefficients are investigated. The convergence such series to integrable functions are proved and an estimate of best approximation by angle with respect to multiplicative system in $L^1[0,1)^2$ metric is obtained.

References

1 Yano S. *Tohoku Math. J.*, 1951, 3, 2, p. 223–242.
2 Golubov B.I., Yefimov A.V., Skvorcov V.A. *Walsh series and transforms: theory and application*, Moscow: Nauka, 1987.
3 Volosivets S.S., Fadeev R.N. *Analysis Mathematica*, 2011, 37, p. 215–238.
4 Agayev G.N., Vilenkin N.Ya., Dzhafarli G.M., Rubinshteiyn A.I. *Multiplicative systems of functions and harmonic analysis on zero-dimensional groups*, Baku: ELM, 1981.
5 Moricz F. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1990, 109, 2, p. 417–425.

УДК 519.683

М.М.Букенов, Г.Б.Бакаева

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова
(E-mail: kim.chandi@inbox.ru)

Схема расщепления для трехмерной задачи теплопроводности

В статье исследована схема расщепления для трехмерного уравнения теплопроводности, сводящаяся к трехточечным прогонкам. Проведена численная реализация схемы и показана практическая применимость. Численная реализация схемы, стабилизирующей поправки, и сравнение её со схемой расщепления показали практическую эффективность предложенного алгоритма. Результаты расчетов приведены в таблице и дан анализ.

Ключевые слова: теплопроводность, сетка, единичный оператор, аппроксимация, трехточечные прогонки.

Рассмотрим в области $D \in R^3$ с границей γ задачу — найти решение $u(x,t)$-уравнения теплопроводности

$$\frac{vu}{vt} = a^2 \sum\nolimits_i^3 = \frac{\partial^z u}{1\partial x_i^z} + f(x,t), x \in D, t \in [0,T], \frac{v^3 u}{v x_i^z}, \tag{1}$$

удовлетворяющего начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{2}$$

и граничному условию

$$u(x,t) = \varphi(x,t), x \in \varphi. \tag{3}$$

Для решения задачи (1)–(3) используем разностную аппроксимацию, следуя [1]. Введем равномерную сетку ω.

$$\left\{\omega = \left(x_{1,i}, x_{2,k}, x_{3,j}\right), x_{1,i} = ih_1, x_{2,k} = kh_2, x_{3,j} = jh_3, i = 0,...,N, k = 0,...,N, j = 0,...,N.h_m = L_m / N, m = 1,2,3\right\};$$

$$\omega_\tau = \left\{t_n = nr, n = 0,...,M, n = T / M\right\}.$$

Введем сеточную функцию $u_{ijk}^{n} = u(x_{1,i}, x_{2,k}, x_{3,j} t_n)$, построим неявную схему

$$\frac{u_{ijk}^{n} - u_{ijk}^{n}}{r} = \Delta_h u_{ijk}^{n+1} + f_{ijk}^{h}, \tag{4}$$

где

$$\Delta_h u_{ijk}^{n+1} = \Lambda_1 u_{ijk}^{n+1} + \Lambda_2 u_{ijk}^{n+1} + \Lambda_3 u_{ijk}^{n+1};$$

$$\Lambda_1 u_{ijk}^{n+1} = a^2 \left(\frac{u_{i+1\,jk}^{n+1} - 2u_{ijk}^{n+1} + u_{i-1\,jk}^{n+1}}{h_1^2} \right);$$

$$\Lambda_2 u_{ijk}^{n+1} = \left(a^2 \, \frac{u_{ij+1k}^{n+1} - 2u_{ijk}^{n+1} + u_{ij-1k}^{n+1}}{h_2^2} \right);$$

$$\Lambda_3 u_{ijk}^{n+1} = a^2 \left(\frac{u_{ijk+1}^{n+1} - 2u_{ijk}^{n+1} + u_{ijk-1}^{n+1}}{h_3^2} \right);$$

$$f_{ijk}^{n} = f(x_{1,i}, x_{2,k}, x_{3,j} t_n);$$

$$u_{ijk}^{o} = \varphi_{ijk,} \quad u_{0\,jk}^{n} = \psi_{ojk}^{n}, \psi_{Njk}^{n} = \psi_{ojk}^{n};$$

$$u_{iok}^{n} = \psi_{i0k}^{n}, u_{iNk}^{n} = \psi_{iNk}^{n}, u_{ijo}^{n} = \psi_{ij0}^{n}, u_{ijo}^{n} = \psi_{ijN}^{n}. \tag{5}$$

Схему (4)–(5) реализуем с помощью схемы расщепления, следуя [2], опуская индексы внизу, имеем

$$\frac{u^{\frac{n+1}{3}} - u^{n}}{\tau} = \Lambda, u^{\frac{n+1}{3}} + \frac{1}{3} f^{n};$$

$$\frac{u^{\frac{n+2}{3}} - u^{\frac{n+1}{3}}}{\tau} = \Lambda_2, u^{\frac{n+2}{3}} + \frac{1}{3} f^{n}; \tag{6}$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{\frac{n+2}{3}}}{\tau} = \Lambda_3 u^{n+1} + \frac{1}{3} f^{n}.$$

Для исследования разностной схемы (6) положим $f^n = 0$. Учитывая наше допущение, перепишем (6) в виде

$$A_s u^{\frac{n+s}{3}} - B_s u^{n+\frac{s-1}{s}} = 0, A_s = E - \tau\Lambda_s, B_s = E^s = 1,2,3, \tag{7}$$

где E — единичный оператор. Исключая $u^{\frac{n+1}{3}}$ и $u^{\frac{n+2}{3}}$, приходим к эквивалентной схеме в целых шагах.

$$A_1 A_2 A_3 u^{n+1} - B_1 B_2 B_3 u^{n} = A_1 A_2 A_3 u^{n+1} - E u^{n} = 0. \tag{8}$$

Разлагая (8) по степеням τ, получаем

$$\frac{u^{n+1} - u^{n}}{\tau} \Lambda u^{n+1} - \tau(\Lambda_1\Lambda_2 + \Lambda_1\Lambda_3 + \Lambda_2\Lambda_3) u^{n+1} + \tau^2 \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 u^{n+1}. \tag{9}$$

Из (9) следует, что схема (6) имеет погрешность аппроксимации

$$0\left(\tau + h^2\right), h^2 = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2.$$

Положим, что

$$u_n = \lambda_n e^{i(k_1 + x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3)}; \; u^{\frac{n+1}{3}} = \lambda_n + \frac{1}{3} e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3)}. \tag{10}$$

Подставляя (10) в (6) при $f^n = 0$, получим

$$p_1 = \frac{\lambda_{n+\frac{1}{3}}}{\lambda_n} = \frac{1}{1+a_1}, p_2 = \frac{\lambda_{n+\frac{2}{3}}}{\lambda_{n+\frac{1}{3}}} = \frac{1}{1+a_2}, p_3 = \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+\frac{2}{3}}} = \frac{1}{1+a_3}, \tag{11}$$

где $p_{i,j} = 1,2,3$ — спектральные радиусы,

$$a_i = 4z_i \sin^2 \frac{k_i h_i}{2}, z_i = \frac{a^2\tau}{h_i^2}, i = 1,2,3.$$

Из (11) следует устойчивость схемы (6). Нетрудно установить, что схема (6) удовлетворяет свойству экстремума.

Теорема 1. Схема (6) при $f^n = 0$ удовлетворяет свойству экстремума.

Доказательство. Каждая из двухслойных схем (6) удовлетворяет свойству экстремума. Рассмотрим, например, первую схему в (6), записав её предварительно в индексном виде и отбросив для простоты индексы по x_2, x_3:

$$u_i^{n+\frac{1}{3}} = \frac{z}{1+2z} u_{i-1}^{n+\frac{1}{3}} + \frac{1}{1+2z} u_i^n + \frac{z}{1+2z} u_{i+1}^{n+\frac{1}{3}}.$$

Отсюда следует свойство экстремума

$$\min\{u_{i-1}^{n+\frac{1}{3}}, u_i^n, u_{i+1}^{n+\frac{1}{3}}\} \le u_i^{n+\frac{1}{3}} \le \max\{u_{i-1}^{n+\frac{1}{3}}, u_i^{n+\frac{1}{3}}, u_i^{n+\frac{1}{3}}\}.$$

Из него, в частности, следует сходимость с разностного решения к решению дифференциального уравнения (равномерная сходимость). Далее составлена программа, приведены численные расчеты на последовательности сеток $10\times10\times10, 100\times100\times100, 1000\times1000\times1000$ по пространственным переменным, кроме того, обнаружена неувязка между тестовым решением и приближенным решением схемы (6).

Схема (6) реализовывалась с помощью трехточечных прогонок, в качестве тестового решения взята функция

$$u^t(x_1, x_2, x_3, t) = \sin\pi x_1 \sin\pi x_2 \sin\pi x_3 e^{-2t};$$

$$f(x_1, x_2, x_3, t) = (3\pi - 2)\sin\pi x_1 \sin\pi x_2 \sin\pi x_3 e^{-2t}.$$

В качестве области $3\pi^2 D$ брался единичный куб

$$\{0 \le x_i \le 1, i = 1,2,3\},$$

$t \in [0,05],$ норма неувязки определялась так:

$$\| u^\tau - u^{np} \| = \left[h^3 \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{N-1}\sum_{k=1}^{N-1} (u_{ijk}^t - u_{ijk}^{np})^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

u^{np} — приближенное решение схемы (6), численные результаты приведены в таблице.

Т а б л и ц а

Сетка	h	$\gamma\tau$	$\| u^\tau - u^{np} \|$
$10\times10\times10$	0,1	0,05	0,04628
$10\times10\times10$	0,1	0,025	0,03874
$10\times10\times10$	0,1	0,001	0,02892
$100\times100\times100$	0,01	0,05	0,018543
$100\times100\times100$	0,01	0,025	0,01175
$100\times100\times100$	0,01	0,001	0,01008
$1000\times1000\times1000$	0,001	0,05	0,007891
$1000\times1000\times1000$	0,001	0.025	0,004512
$1000\times1000\times1000$	0,001	0,001	0,002345

Анализ счета показал, что с измельчением сетки точность увеличивается, результаты выдавались на фиксированный момент времени, которые выявили практическую эффективность предложенного алгоритма.

Список литературы

1 *Самарский А.А.* Теория разностных схем. — М.: Наука, 1977. — 654 с.

2 *Яненко Н.Н.* Об одном разностном методе счета многомерного уравнения теплопроводности // Докл. АН СССР. — 1959. — Вып. 125. — № 6.

М.М.Букенов, Г.Б.Бақаева

Үш өлшемді жылуөткізгіштік есепті шешу үшін бөліктеу схемасы

Үш нүктелі тізбектен өтетін үш өлшемді жылуөткізгішті теңдеулер үшін бөліктеу схемасы зерттелген. Схеманы сандық ұйымдастырудың жүргізілуі мен практикалық қолданысы көрсетілген. Сандық ұйымдастырудың тұрақтандыру түзетулері мен оны бөліктеу схемасы салыстырылып, алгоритмның практикалық тиімділігі дәлелдеген. Есептеудің нәтижесі кесте түрінде беріліп, талдауы келтірілген.

M.M.Bukenov, G.B.Bakayeva

Chart of breaking up for three-dimensional task to heat conductivity

Investigated the splitting scheme for three-dimensional heat equation reducible to the three-point progacam. Conducting numerical implementation of the scheme and the practical applicability. Numerical realisasi scheme stabilizing moravci and its comparison with the splitting scheme showed the practical effectiveness of the proposed algorithm. The results of the calculations are shown in the table and give analysis.

References

1 Samarsky A.A. *Theory of difference schemes*, Moscow: Nauka, 1977, 654 p.

2 Yanenko N.N. *One difference method account the multidimensional equation thermal conductivity* // Report AN USSR, 1959, 125, 6.

УДК 94 (574):371.213.42

Д.Г.Валиева, А.Г.Животов

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова
(E-mail: Dinara.vg@mail.ru)

Применение теории принятия решений при оценке уровня промышленной безопасности производства

Для эффективного управления промышленной безопасностью необходимо осуществление постоянного мониторинга уровня промышленной безопасности в целях быстрого реагирования на изменение факторов, влияющих на состояние защищенности производства. Для этого необходимо иметь метод, позволяющий всесторонне оценить уровень безопасности конкретным количественным значением. В статье дается методическая альтернатива оценки безопасности, которая основана на теории принятия решений.

Ключевые слова: безопасность, теория принятия решения, эффективность.

Оценка уровня промышленной безопасности на производствах является актуальной задачей, обусловленной возрастающими объемами производства. В свою очередь, это требует от руководителей организаций навыков управлять безопасностью производства.

Для эффективного управления необходимо осуществление постоянного мониторинга уровня промышленной безопасности в целях быстрого реагирования на изменение факторов, влияющих на состояние защищенности, и проведение необходимых мероприятий, направленных на предупреждение аварии.

Рассмотрим несколько производств. Проблема заключается в сравнении трех имеющихся альтернатив по уровню безопасности. Применяя теорию принятия решений, на первом шаге необходимо структурировать проблему в виде иерархии (см. рис.).