

Т.С.Григорьева, Т.В.Заикина

*Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: besti\_07@mail.ru)*

## Метод сквозных задач в обучении математике

В статье рассмотрены задачи школьного курса математики и их решение при помощи метода сквозных задач. В ней представлены задачи, позволяющие развивать интуицию учащихся, делать обоснованные выводы. В целях математического развития учащихся представлены одни и те же задачи в разных классах, что позволяет глубже осмыслить задачу, показать эффективность одного метода перед другим. Также может быть получено обобщенное решение задачи или такое, которое расширяет постановку вопроса, доказывает, что задача не может иметь других решений.

*Ключевые слова:* метод сквозных задач, математическая модель, преемственность, информация, треугольник, принцип систематичности.

Когда говорят о содержании школьного курса математики, то обычно имеют в виду усвоение школьниками определенной системы математических знаний, умений и навыков. Безусловно, это одна из наиболее важных задач, стоящих перед школой. Однако нельзя сводить всю проблему математического образования в школе к передаче учащимся определенной суммы знаний и навыков. Это неправомерно ограничивало бы роль математики в общем образовании. Поэтому перед современной школой стоит и другая, не менее важная, задача — задача математического развития учащихся. Метод сквозных задач ориентирован на решение этой задачи. Главная мысль метода сквозных задач заключается в том, что при изучении курса математики учащиеся рассматривают несколько основных математических моделей, помогающих им осознать смысл рассматриваемых понятий, их свойства, различные случаи практического применения усвоенных понятий, их взаимосвязи и другие вопросы курса [1–4].

Под методом сквозных задач понимается использование упорядоченных комплексов математических задач, связанных одной и той же математической моделью, посредством которых реализуются цели обучения, воспитания и развития учащихся на том или ином этапе обучения.

Укажем характерные черты метода сквозных задач.

1. Раскрытие происхождения, выявление подлинного существа понятия составляют основное назначение и основную особенность обучения математике методом сквозных задач. Этот подход к обучению основан не просто на данном построении разделов школьного курса математики, а на рассмотрении такого практического материала, который вскрывает генезис математических понятий, показывает их происхождение, мотивирует необходимость введения понятий, логику их развития.

2. При использовании метода сквозных задач источниками новой информации являются примеры, связанные с количественным изучением разных аспектов одной и той же математической модели. При этом предполагается, что в процессе такого обучения подача новой информации и переработка ее учащимися значительно больше сближаются между собой, чем при традиционном обучении.

3. При обучении методом сквозных задач создается возможность построения системы задач, при решении которых ученик использует различные аспекты математической деятельности (выявление проблемных ситуаций, математизация конкретных ситуаций, решение задач, мотивирующих необходимость расширения теории).

4. Использование метода сквозных задач во многом отвечает требованиям проблемного характера обучения в школе.

5. Процесс формирования основных понятий школьного курса математики в соответствии с методом сквозных задач состоит из системы теоретико-познавательных заданий, направленных на формирование у учащихся основных теоретических представлений, образующих данное основное понятие. Поэтому для формирования основных понятий строится, как правило, не одно теоретико-познавательное задание, а система заданий.

Заметим, что серия тематически связанных заданий для изучения одного и того же понятия помогает раскрыть содержание формируемого понятия в порядке закрепления усвоенных знаний, подготавливает учащихся к формированию нового понятия.

Исходя из вышеизложенного, разрабатывая метод сквозных задач, мы считали методически целесообразным, что процесс формирования понятий нужно не начинать с логического определения, а завершать этим определением уже сформированное понятие. При этом было бы весьма полезным, чтобы учащиеся сами пришли к правильному определению, выделяя основные свойства изучаемого понятия и сопоставляя эти свойства с существенными признаками определяемого математического понятия. В ходе исследования мы убедились, что учащиеся легче усваивают новые понятия, если им понятна цель их изучения, связь их с известным материалом, если новое свойство, новая закономерность подмечены самими учащимися.

Ясно, что такая система изложения, данная лишь в одном месте курса, не произведет должного эффекта. Поэтому речь может идти только о сквозной линии, обеспечивающей преемственность в изучении этих вопросов при переходе от одного этапа обучения к другому.

Конкретизируем сказанное на примерах. В целях математического развития учащихся рассмотрение одной и той же задачи в разных классах представляет значительный интерес. По мере изучения математики к решению некоторых задач следует возвращаться несколько раз. Это делается для того, чтобы глубже осмыслить задачу, показать эффективность одного метода перед другим. Также можно получить обобщенное решение задачи или такое, которое расширяет постановку вопроса, доказывает, что задача не может иметь других решений.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Найти четыре последовательных числа, произведение которых равно 5040.

V класс. На данном этапе учащиеся изучают только натуральные числа, поэтому, естественно, что они ищут только натуральные решения.

Если  $x$  — наименьшее из данных чисел, то из условия задачи будем иметь  $x(x+1)(x+2)(x+3)=5040$ . Так как в левой части этого равенства записано произведение четырех последовательных чисел, то выясним: нельзя ли и число 5040 тоже представить в виде произведения четырех последовательных чисел:  $5040=504 \cdot 10=9 \cdot 56 \cdot 10=7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$ . Итак, получаем  $x(x+1)(x+2)(x+3)=7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$ , откуда следует, что числа 7, 8, 9, 10 — искомые.

VI класс. Теперь учащиеся знакомы и с отрицательными числами, поэтому из условия задачи будет следовать еще и такое равенство  $x(x+1)(x+2)(x+3)=(-7) \cdot (-8) \cdot (-9) \cdot (-10)$ . Следовательно, кроме уже найденных чисел, условию задачи будет удовлетворять и еще одна четверка чисел:  $-7, -8, -9, -10$ .

Таким образом, в результате решения задачи найдены две четверки искомых чисел, однако на данном этапе мы не можем утверждать, что других чисел, удовлетворяющих условию задачи, нет.

VIII класс. Здесь учащиеся знакомятся с решением квадратных уравнений, поэтому задачу можно сформулировать иначе:

Решить уравнение  $x(x+1)(x+2)(x+3)=5040$ .

В левой части уравнения удобно найти произведение множителей первого и четвертого, второго и третьего. В этом случае получим многочлены, у которых коэффициенты при  $x^2$  и  $x$  одинаковы, т.е. будем иметь  $(x^2+3x)(x^2+3x+2)=5040$ . Пусть  $x^2+3x=y$ , тогда  $y^2+2y-5040=0$ , где  $y=-72$  и  $y=70$ . Отсюда  $x^2+3x=-72$  или  $x^2+3x=70$ . В первом случае уравнение корней не имеет, во втором — корнями уравнения являются числа  $-10$  и  $7$ , а, следовательно, искомыми числами будут уже известные нам четверки чисел.

С учениками VIII класса следует не только вспомнить прежние решения этой задачи, но и показать преимущество последнего: мы нашли те же корни, что и в VI классе, но дополнительно показали еще и то, что других действительных чисел, удовлетворяющих условию задачи, нет.

2. Доказать, что

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = \frac{n-1}{n}.$$

V класс. Для учеников V класса формулировку задачи несколько изменим:

Вычислить сумму  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8}$ .

Прежде всего, учащимся следует предложить придумать пару дробей, произведение которых равно их же разности, а затем приступить к нахождению искомой суммы:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8} &= 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} + \\ &+ \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{8} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \\ &+ \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}. \end{aligned}$$

При решении этой же задачи в VIII–IX классах перед ее выполнением следует найти (не угадать, не привести пример, как в V классе) закономерность получения таких дробей, разность которых равна их произведению, т.е. выяснить при каком условии  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ . Отсюда будем иметь

$ac = ad - bc$ , или  $1 = \frac{d}{c} - \frac{b}{a}$ . Итак, получили, что разность дробей, обратных данным, должна равняться 1. Например,

1)  $4 - 3 = 1$ ,  $\frac{1}{4}$  и  $\frac{1}{3}$  — искомые дроби;

2)  $\frac{5}{3} - \frac{2}{3} = 1$ ,  $\frac{3}{5}$  и  $\frac{3}{2}$  — искомые дроби.

В результате приведенных рассуждений замечаем, что числители интересующих нас дробей равны, а знаменатель одной из них больше знаменателя другой на величину числителя, т.е.  $\frac{m}{n}$  и

$$\frac{m}{n+m}.$$

В X–XI классах данное упражнение можно выполнить, применяя метод математической индукции.

3. Доказать, что  $m^3 + 11m : 6$ , где  $m \in N$ .

VII класс. Преобразуем данный двучлен:

$$m^3 + 11m = m^3 - m + 12m = m(m^2 - 1) + 12m = m(m-1)(m+1) + 12m.$$

В этой сумме первое слагаемое, т.е.  $m(m-1)(m+1)$ , — произведение трех последовательных натуральных чисел, из которых одно делится на 3, и хотя бы одно делится на 2, следовательно,  $m(m-1)(m+1)$  делится на 6. Второе слагаемое  $12m$  при всех  $m \in N$  также делится на 6. Отсюда  $m^3 + 11m : 6$  при всех  $m \in N$ .

VIII класс. При делении числа  $m$  на 6 могут получиться остатки 0, 1, 2, 3, 4, 5, поэтому оно может быть представлено в виде  $6a$ ,  $6a \pm 1$ ,  $6a \pm 2$  или  $6a + 3$ . Проверим делимость на 6 данного выражения, т.е.  $m^3 + 11m = m(m^2 + 11)$ , во всех случаях.

Если  $m = 6a$ ,  $6a((6a)^2 + 11)$  делится на 6.

Если  $m = 6a \pm 1$ , то

$$(6a \pm 1)((6a \pm 1)^2 + 11) = (6a \pm 1)(36a^2 \pm 12a + 1 + 11) = 12(6a \pm 1)(3a^2 \pm a + 1)$$

делится на 6.

Если  $m = 6a \pm 2$ , то  $(6a \pm 2)((6a \pm 2)^2 + 11) = 6 \cdot (3a \pm 1)(12a^2 \pm 8a + 5)$  делится на 6.

Если  $m = 6a + 3$ , то  $(6a + 3)((6a + 3)^2 + 11) = 12(2a + 1)(9a^2 + 9a + 5)$  делится на 6.

Итак, при любом натуральном  $m$  выражение  $m^3 + 11m$  делится на 6.

IX класс. Так как  $6 = 2 \cdot 3$ , где 2 и 3 — взаимно простые числа, то вопрос о делимости выражения  $m^3 + 11m = m(m^2 + 11)$  на 6 сводится к вопросу о делимости его на 2 и 3.

Рассматриваемое произведение  $m(m^2 + 11)$  при любом  $m \in N$  делится на 2, так как при  $m = 2a$  первый множитель, а при  $m = 2a - 1$  второй делится на 2. Проверим делимость данного выражения на 3. Пусть  $m = 3b$ , тогда  $3b((3b)^2 + 11)$  делится на 3. Пусть  $m = 3b \pm 1$ , тогда  $(3b \pm 1)((3b \pm 1)^2 + 11) = (3b \pm 1)(9b^2 \pm 6b + 12) = 3(3b \pm 1)(3b^2 \pm 2b + 4)$  делится на 3.

Итак, выражение  $m^3 + 11m$  при любом  $m \in N$  делится и на 2, и на 3, следовательно, оно делится на 6.

В X–XI классах данное упражнение можно выполнить, применяя метод математической индукции.

4. Даны четыре точки  $A, B, C, D$ . Доказать, что если  $AD \perp BC$ ,  $BD \perp AC$ , то  $CD \perp AB$ .

VII класс. Трудность решения этой задачи — в построении чертежа. По условию задачи отрезки  $BD$  и  $AD$  соответственно перпендикулярны отрезкам  $AC$  и  $BC$ , которые можно принять за стороны треугольника  $ABC$ . Тогда по свойству высот треугольника луч  $CD$  перпендикулярен третьей стороне треугольника (рис. 1).

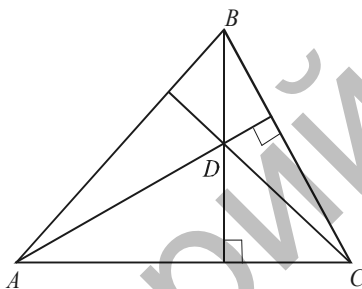


Рисунок 1

IX класс. Возвращаясь в IX классе к этой задаче, следует отметить, что решение, рассмотренное в VII классе, имеет существенный недостаток: мы ссылались на то, что в треугольнике три высоты пересекаются в одной точке, но это положение не было доказано. Предлагаемое здесь доказательство с помощью векторов корректнее, хотя и более громоздко:

$$\begin{aligned} \vec{CD} \cdot \vec{AB} &= (\vec{CA} + \vec{AD}) \cdot \vec{AB} = \vec{CA} \cdot \vec{AB} + \vec{AD} \cdot \vec{AB} = \vec{CA} \cdot (\vec{AD} + \vec{DB}) + \vec{AD} \cdot (\vec{AC} + \vec{CB}) = \\ &= \vec{CA} \cdot \vec{AD} + \vec{CA} \cdot \vec{DB} + \vec{AD} \cdot \vec{AC} + \vec{AD} \cdot \vec{CB} = \vec{CA} \cdot \vec{AD} + \vec{0} + \vec{AD} \cdot \vec{AC} + \vec{0} = \\ &= \vec{CA} \cdot \vec{AD} + \vec{AD} \cdot \vec{AC} = \vec{AD} \cdot (\vec{CA} + \vec{AC}) = \vec{AD} \cdot \vec{0} = 0. \end{aligned}$$

В результате преобразований получили, что  $\vec{CD} \cdot \vec{AB} = 0$ , значит  $CD \perp AB$ .

В X–XI классах следует рассмотреть случай, когда точки  $A, B, C, D$  не лежат в одной плоскости, т.е. могут быть вершинами тетраэдра. Доказательство в этом случае будет аналогично только что приведенному.

5. Найти наименьшее значение выражения  $\frac{(4+x)(1+x)}{x}$ , где  $x$  — положительное число.

VII — VIII классы. Можно предложить учащимся графический способ решения:

$$y = \frac{(4+x)(1+x)}{x} = \frac{4+5x+x^2}{x} = \frac{4}{x} + 5 + x. \text{ Пусть } y_1 = \frac{4}{x}, y_2 = x + 5.$$

Построим в одной и той же системе координат графики указанных функций и будем непосредственно складывать ординаты, соответствующие одним и тем же значениям абсцисс (рис. 2).

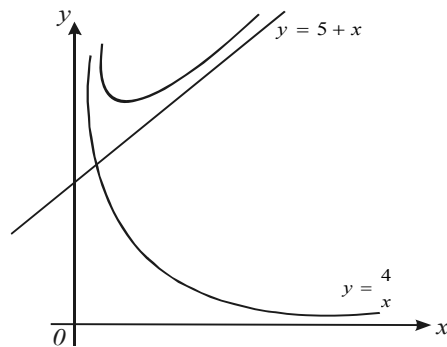


Рисунок 2

Так как по условию  $x > 0$ , то искомый график будет расположен в первой четверти, а «нижняя» его точка будет иметь абсциссу 2 и ординату 9.

Итак, число 9 — наименьшее значение данного выражения.

IX класс. В учебнике для IX класса доказано, что при  $c > 0$  истинно неравенство  $c + \frac{1}{c} \geq 2$ , т.е. 2 — наименьшее значение суммы двух взаимно-обратных чисел.

Поскольку  $y = \frac{(4+x)(1+x)}{x} = \frac{4}{x} + 5 + x = 2\left(\frac{2}{x} + \frac{x}{2}\right) + 5$ , а  $\frac{2}{x}$  и  $\frac{x}{2}$  — два взаимно-обратных числа,

то выражение  $2\left(\frac{2}{x} + \frac{x}{2}\right) + 5$  принимает наименьшее значение, равное  $2 \cdot 2 + 5 = 9$ .

X класс. Решим эту задачу с помощью производной.

Так как  $y = \frac{4}{x} + 5 + x$ , то  $y' = -\frac{4}{x^2} + 1$ . Тогда  $y' = 0$ , если  $x = \pm 2$ . Но по условию  $x > 0$ , следовательно,  $y' = 0$  при  $x = 2$ . Если  $0 < x < 2$ , то  $y' < 0$ . Если  $x > 2$ , то  $y' > 0$ , значит  $x = 2$  является точкой минимума и  $y(2) = 9$ .

При решении этой задачи следует подчеркнуть важность каждого из рассмотренных способов. Так, например, ценность графического решения (хоть оно и не всегда дает точные ответы) в его наглядности. Последний же способ весьма распространен при решении аналогичных задач.

Известно, что одна и та же математическая закономерность может послужить основой для довольно большого числа сквозных задач. Рассмотрим, например, следующие задачи.

6. Доказать, что сумма двух последовательных четных чисел не может быть точным квадратом.

6.1. Доказать, что квадрат целого числа, увеличенный на 1 или на 2, не делится на 4.

6.2. Доказать, что сумма квадратов двух или трех нечетных чисел не может быть точным квадратом.

6.3. Доказать, что уравнение  $x^2 + y^2 = 1234567$  не имеет решений в целых числах.

6.4. Доказать, что если в прямоугольном треугольнике длины всех сторон — целые числа, то его катеты не могут одновременно выражаться нечетными числами.

В основе всех пяти задач лежит общая математическая закономерность, заключающаяся в том, что квадрат любого целого числа либо делится на 4 без остатка, либо при делении на 4 дает в остатке 1. Решение подобных задач варьируется как по степени трудности, так и по мере изучения материала.

Наряду с использованием математической закономерности в различных ситуациях следует практиковать также рассмотрение ее частных случаев, обобщений и аналогий. Учащиеся учатся использовать имеющиеся у них знания как средство для получения новых знаний, что очень важно для развития познавательной самостоятельности и устойчивого интереса к предмету.

7. Доказать, что во всяком прямоугольном треугольнике высота, проведенная к гипотенузе, есть среднее геометрическое проекций катетов на гипотенузу.

VIII класс. Используется теорема Пифагора. Пусть в прямоугольном треугольнике  $ABC$  из вершины  $C$  прямого угла проведена высота  $CD$  (рис. 3 а).

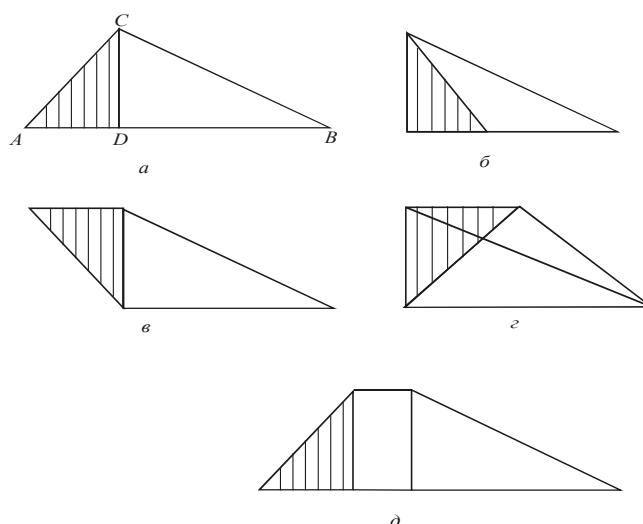


Рисунок 3

Тогда  $AC^2 = AD^2 + CD^2$ ,  $BC^2 = DB^2 + CD^2$ ,  $AB^2 = (AD + DB)^2$ . Приняв во внимание, что  $AC^2 + BC^2 = AB^2$ , получим  $AD^2 + CD^2 + DB^2 + CD^2 = (AD + DB)^2$ . Отсюда  $CD^2 = AD \cdot DB$ .

В IX классе эта задача решается из подобия прямоугольных треугольников, полученных при проведении высоты к гипотенузе.

Варьирование этой задачи позволяет получить эквивалентную ей задачу, а также серию сквозных задач.

7.1. Сумма углов при основании треугольника равна  $90^\circ$ . Доказать, что высота этого треугольника есть среднее геометрическое проекций боковых сторон на основание.

В результате перемещений треугольника ABC, показанных на рисунке 3, образуются различные новые фигуры, в приложении к которым рассматриваемая закономерность несколько видоизменяется.

7.2. Разность углов при основании треугольника равна  $90^\circ$ . Доказать, что высота этого треугольника есть среднее геометрическое проекций боковых сторон на основание (рис. 3 б).

7.3. Разность углов при одном из оснований трапеции равна  $90^\circ$ , и одна из ее диагоналей перпендикулярна основаниям. Доказать, что квадрат высоты трапеции равен произведению оснований (рис. 3 в).

7.4. Диагонали прямоугольной трапеции взаимно перпендикулярны. Доказать, что ее высота есть среднее геометрическое оснований (рис. 3 г).

7.5. Сумма углов при одном из оснований трапеции равна  $90^\circ$ . Доказать, что высота трапеции есть среднее геометрическое проекций ее боковых сторон на основание (рис. 3 д).

По мере изучения геометрии представляется возможность неоднократно возвращаться к интересующей нас закономерности и дальнейшего решения сквозных задач, основанных на ней.

7.6. Доказать, что если диагональ равнобокой трапеции перпендикулярна боковой стороне, то разность квадратов оснований трапеции равна учетверенному квадрату ее высоты.

7.7. В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу AB в точке D. Доказать, что  $CD^2 = AD \cdot BD$ .

7.8. Доказать, что для всех ромбов, описанных около данной окружности, произведение отрезков стороны ромба, образованных точкой касания, есть величина постоянная.

7.9. Внутри прямого угла из его вершины как из центра проведена дуга окружности, а затем через точку M этой дуги проведена касательная до пересечения со сторонами угла в точках A и B. Доказать, что произведение  $AM \cdot MB$  не зависит от положения точки M на дуге.

7.10. Доказать, что произведение оснований всякой равнобокой трапеции, описанной около данной окружности, есть величина постоянная.

7.11. Доказать, что стороны любой описанной около данной окружности трапеции делятся точками касания на такие восемь отрезков, произведение которых постоянно.

7.12. Доказать, что площадь описанной равнобокой трапеции равна произведению среднего арифметического и среднего геометрического оснований.

Имея дело с какой-либо математической закономерностью, часто бывает полезно получить отдельные ее частные случаи и обобщения. Если эта закономерность представлена в виде теоремы или задачи на доказательство, то целесообразно исследовать и обратное утверждение. Так, в рассматриваемом нами случае имеет место следующая задача.

7.13. Доказать, что если в треугольнике высота, проведенная к большей стороне, есть среднее геометрическое проекций на эту сторону двух других сторон, то этот треугольник — прямоугольный.

Слова «проведенная к большей стороне» здесь обязательны, иначе, как это следует из задачи 7.2, треугольник может оказаться тупоугольным.

Рассмотрим теперь несколько примеров обобщений, допускаемых интересующей нас сквозной задачей.

7.14. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  из точки  $E$ , взятой на катете  $AC$ , опущен перпендикуляр  $ED$  на гипотенузу. Доказать, что  $ED^2 = AD \cdot DB - AE \cdot EC$  (рис. 4 а).

В частном случае, когда точка  $E$  совпадает с точкой  $C$ , получим соотношение, доказанное в задаче 7.

7.15. В треугольнике  $ABC$ , углы  $A$  и  $B$  которого острые, проведена высота  $CD$ . Доказать, что  $CD^2 = AD \cdot DB + AC \cdot BC \cdot \cos C$  (рис. 4 б).

Очевидно, что, когда угол  $C$  прямой, последние две задачи приводят к соотношению, доказанному в задаче 7.

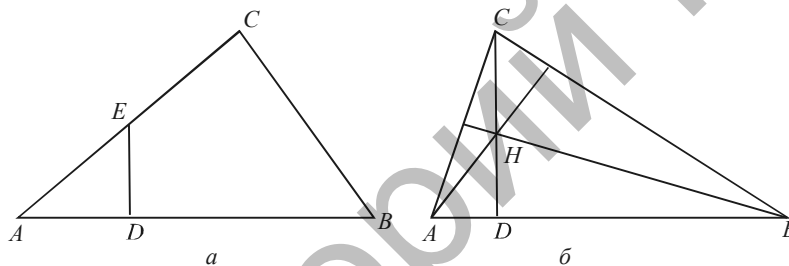


Рисунок 4

По аналогии с рассмотренной серией задач может быть получена новая путем использования другой математической закономерности: в прямоугольном треугольнике каждый катет есть среднее геометрическое между гипотенузой и своей проекцией на гипотенузу.

Наряду с такими закономерностями следует рассматривать различные сквозные задачи как интересные частные случаи. Рассмотрим пример.

8. Доказать, что для любых четырех точек  $A, B, C, D$  в пространстве справедливо равенство

$$AC^2 + DB^2 = AB^2 + DC^2 + 2 \vec{AD} \cdot \vec{BC}.$$

Х класс. Имеем  $\vec{AC} + \vec{DB} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{DB} = \vec{AB} + \vec{DC}$ . Отсюда

$AC^2 + DB^2 = AB^2 + DC^2 + 2 \cdot (\vec{AB} \cdot \vec{DC} - \vec{AC} \cdot \vec{DB})$ . Преобразовав выражение, стоящее в скобках, получим

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{DC} - \vec{AC} \cdot \vec{DB} &= (\vec{AD} + \vec{DB}) \cdot \vec{DC} - (\vec{AD} + \vec{DC}) \cdot \vec{DB} = \vec{AD} \cdot \vec{DC} - \vec{AD} \cdot \vec{DB} = \\ &= \vec{AD} \cdot (\vec{DC} - \vec{DB}) = \vec{AD} \cdot \vec{BC}. \end{aligned}$$

Учитывая полученные результаты, получаем требуемое равенство.

Рассмотрим некоторые частные случаи задачи 8.

8.1. Доказать, при произвольном параллельном переносе двух противоположных сторон четырехугольника разность между суммой квадратов диагоналей и суммой квадратов двух других сторон остается постоянной.

8.2. Доказать, что у всех четырехугольников с соответственно равными диагоналями, образующими между собой равные углы, абсолютная величина разности между суммами квадратов противо-

положных сторон постоянна. Если пары точек  $A$  и  $B$ ,  $C$  и  $D$  лежат на взаимно перпендикулярных прямых, то  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$  и  $AC^2 + DB^2 = AB^2 + DC^2$ .

Из этого соотношения вытекают задачи.

8.3. Два противоположных ребра тетраэдра взаимно перпендикулярны. Доказать, что сумма квадратов двух других пар противоположных ребер равна между собой (рис. 5 а).

8.4. Продолжения двух противоположных сторон четырехугольника пересекаются под прямым углом. Доказать, что сумма квадратов двух других сторон этого четырехугольника равна сумме квадратов диагоналей (рис. 5 б).

Эта задача в свою очередь допускает следующий частный случай.

8.5. Сумма углов при одном из оснований трапеции равна  $90^\circ$ . Доказать, что сумма квадратов диагоналей этой трапеции равна сумме квадратов оснований.

8.6. На высоте треугольника взята произвольная точка  $D$ . Доказать, что суммы квадрата боковой стороны этого треугольника и квадрата расстояния от точки  $D$  до вершины, противоположной взятой боковой стороне, равны между собой (рис. 5 в).

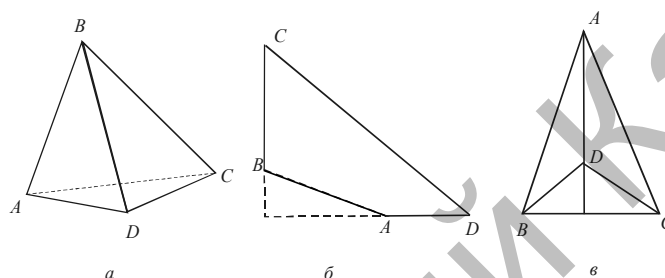


Рисунок 5

Отметим одно интересное следствие, вытекающее из задачи 8.6.

8.7. Доказать, что для данного треугольника сумма квадрата любой стороны и квадрата расстояния от противоположной ей вершины до ортоцентра есть величина постоянная.

В процессе изучения математики учащимся приходится овладевать новыми для них методами решения задач. Рассмотренные примеры показывают, что основной процедурой метода сквозных задач является выделение из всего целостно отобранного содержания самого главного, основного, наиболее существенного, что позволяет сконцентрировать на нем внимание при объяснении материала, во время выполнения упражнений, а также в ходе последующего опроса.

Педагогической основой метода сквозных задач является принцип систематичности, требующий, чтобы учащиеся овладевали научными знаниями, умениями и навыками в строго определенном порядке, чтобы система проявилась не только внешне, в соответствующем расположении изучаемого материала, а создавалась в сознании учеников.

## References

- 1 Gleyzer G.D. Improving of the teaching of mathematics in school. — М.: Enlightenment, 1989. — 238 p.
- 2 Guba S.G. Development of students' interest in the searching and studying of mathematical regularities // Mathematics in school. — 1972. — №3. — P. 19–22.
- 3 Zubelevitch G.I. The solution of the same task in different classes // Mathematics in school. — 1980. — № 5. — P. 60–62.
- 4 Petrov V.A. The Intensification of students' studying // Mathematics in school. — 1981. — № 6. — P. 25–27.

Т.С.Григорьева, Т.В.Заикина

**Математиканы оқытуда алмаспайтын есептер әдісін қолдану**

Мақалада мектептегі математика және олардың шешімдері курсындағы есептер алмаспайтын есептер әдісімен қарастырылады. Бұнда оқушылардың сезгіштігін дамытуға, негізделген қорытындыларын жасауға мүмкіндік беретін есептер ұсынылған. Оқушыларды математикалық жағынан дамыту мақсатымен әр түрлі сыныптарда бір есеп қарастырылған. Бұл маңызды қызығушылықты туындатады, себебі есепті тезірек түсіндіруге, бір әдісті басқамен салыстырғанда тиімділігін көрсетуге болады. Сонымен қатар есепті толық шешуге немесе сұрақтың қойылымын тереңдету мүмкіндігін, есептің басқа шешімдері жоқ екенін көрсетеді.

T.S.Grigorieva, T.V.Zaikina

**The cross-cutting objectives method in mathematic studying**

The article is devoted to the tasks in school mathematics and also to the solution by the cross-cutting objectives method. There are the tasks that let develop intuition and make the outputs reasonable. To make mathematical development better there are the same tasks in different courses are described in this article. It's very interesting because it let us understand the task deeper and shows greater effect of the one method over the others. It also let us get the generalized solution of the task or the solution that makes that formulation of the task wider. And it also shows that the task hasn't any other solutions.

УДК 510.67

А.Р.Ешкеев<sup>1</sup>, Д.Е.Пальчунов<sup>2</sup><sup>1</sup>Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова;<sup>2</sup>Новосибирский государственный университет, Россия (E-mail: modth1705@mail.ru)**Формализации некоторых синтаксических и семантических свойств аналитических йонсоновских теорий предметных областей**

В данной статье представлен обзор результатов обоих авторов, связанный с вопросом построения и исследования теоретико-модельных свойств некоторых неполных аналитических теорий предметных областей. Основная цель данной заметки заключена в дальнейшей разработке логической формализации онтологий предметных областей, начатой в [1–3].

*Ключевые слова:* модель, онтология, предметная область, язык формализации, исчисление предикатов, решетка, йонсоновская теория.

*Введение.* В данной статье представлены результаты, связанные с дальнейшей разработкой логической формализации онтологий предметных областей, начатой в [1], и данная работа предполагает, что это может оказаться интересным для построения аппарата изучения, вообще говоря, неполных аналитических теорий, что, в свою очередь, тесно связано с построением теорий предметных областей. Все определения теоретико-модельных понятий, связанных с онтологией предметных областей, считаются известными, определенными как в [1]. В случае, если в [1] они неопределены, то будем считать, что мы это можем сделать на базе [1], так как основные синтаксические и семантические определения там определены.

Выделим два направления в развитии классической теории моделей. В известной книге [2] их называют западной и восточной теориями моделей, так как один из основоположников теории моделей А.Тарский жил на западном побережье США с 1940 г., а другой основоположник А.Робинсон — на восточном. Западная теория моделей развивается в традициях Скулема и Тарского. Она в большей степени мотивировалась проблемами в теории чисел, анализе и теории множества, и в ней используются все формулы логики первого порядка. Восточная теория моделей развивается в традициях