

Б.Х.Турметов, М.А.Муратбекова

*Международный казахско-турецкий университет им. Х.А.Ясави, Туркестан
(E-mail: turmetovbh@mail.ru)***Об операторном методе решения некоторых краевых задач в шаре**

В статье в классе гармонических и достаточно гладких функций изучены свойства некоторых интегро-дифференциальных операторов, обобщающих операторы Неймана. В качестве применения полученных свойств рассмотрены некоторые краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона в шаре. Порядок рассматриваемых граничных операторов превосходит порядок уравнения. Исследуемые задачи обобщают задачу Неймана для уравнения Лапласа и Пуассона на граничные операторы высокого порядка. Доказаны теоремы о существовании и единственности решения исследуемых задач.

Ключевые слова: интегро-дифференциальный оператор, операторы Неймана, гармоническая функция, Пуассон, задача Дирихле, функция Грина.

Введение

Пусть $\Omega = \{x \in R^n : |x| < 1\}$ — n -мерный единичный шар; $\partial\Omega = \{x \in R^n : |x| = 1\}$ — единичная сфера. Пусть далее $u(x)$ — гладкая функция в области Ω ; μ — неотрицательное число и $a = (a_1, \dots, a_n)$ — фиксированное по произволу точка из Ω .

Введем обозначения [1]:

$$\Gamma_{\mu, a} [u](x) = \mu \cdot u(x) + \sum_{k=1}^n (x_k - a_k) \frac{\partial u}{\partial x_k};$$

$$\Gamma_{\mu, a}^{-1} [u](x) = \int_0^1 t^{\mu-1} u(tx + (1-t)a) dt,$$

где $tx + (1-t)a = (tx_1 + (1-t)a_1, \dots, (1-t)a_n)$.

Далее для любого натурального числа ℓ обозначим

$$\Gamma_{\mu, a}^{(\ell)} [u] = \Gamma_{\mu, a_\ell} [\Gamma_{\mu, a_{\ell-1}} \dots [\Gamma_{\mu, a_1} [u]] \dots];$$

$$\Gamma_{\mu, a}^{(-\ell)} [u] = \Gamma_{\mu, a_\ell}^{(-1)} [\Gamma_{\mu, a_{\ell-1}}^{(-1)} \dots [\Gamma_{\mu, a_1}^{(-1)} [u]] \dots].$$

В специальном случае, когда $a = (0, 0, \dots, 0)$ будем использовать обозначения

$$\Gamma_{\mu, 0} [u] = \Gamma_{\mu} [u], \Gamma_{\mu, 0}^{(\ell)} [u] = \Gamma_{\mu}^{(\ell)} [u],$$

$$\Gamma_{\mu, 0}^{(-1)} [u] = \Gamma_{\mu}^{(-1)} [u], \Gamma_{\mu, 0}^{(-\ell)} [u] = \Gamma_{\mu}^{(-\ell)} [u]$$

и положим $\Gamma_{\mu, a}^0 [u] = u(x)$.

2. Свойства операторов $\Gamma_{\mu, a}^{(\ell)} [u]$ и $\Gamma_{\mu, a}^{(-\ell)} [u]$.

Отметим, что свойства и применения операторов $\Gamma_{\mu, a}^{(\ell)} [u]$ и $\Gamma_{\mu, a}^{(-\ell)} [u]$ в классе гармонических функций в области Ω в случае $\mu > 0$ изучены в работах [1, 2].

В настоящей работе мы будем исследовать свойства и применения этих операторов в случае $\mu = 0$.

Следующее утверждение доказано в работе [1].

Лемма 1. Пусть $\mu > 0$. Если $u(x)$ — гармоническая функция в области Ω , то для любого $x \in \Omega$ справедливы равенства

$$\Gamma_{\mu, \alpha}^{(-\ell)} [\Gamma_{\mu, \alpha}^{(\ell)} [u]] = \Gamma_{\mu, \alpha}^{(\ell)} [\Gamma_{\mu, \alpha}^{(-\ell)} [u]] = u(x). \quad (1)$$

Эти равенства показывают, что операторы $\Gamma_{\mu,\alpha}^{(\ell)}$ и $\Gamma_{\mu,\alpha}^{(-\ell)}$ являются взаимно обратными в классе гармонических функций в области Ω .

Легко показать, что эти равенства остаются верными и в случае, когда функция $u(x)$ является достаточно гладкой (необязательно гармонической) в области Ω .

Действительно, докажем, например, первое равенство из (1) в случае $\ell = 1$. Если функция $u(x)$ имеет непрерывные в Ω частные производные первого порядка, то

$$\frac{d}{dt} \left[t^\mu \cdot u(tx + (1-t)a) \right] = \mu t^{\mu-1} u(tx + (1-t)a) + t^\mu \frac{du}{dt}(tx + (1-t)a) = t^{\mu-1} \Gamma_{\mu,a} [u],$$

т.е. верно равенство

$$\frac{d}{dt} \left[t^\mu \cdot u(tx + (1-t)a) \right] = t^{\mu-1} \Gamma_{\mu,a} [u], \mu > 0.$$

В дальнейшем всюду будем считать, что функция $u(x)$ является достаточно гладкой в Ω .

Лемма 2. Для любого $x \in \Omega$ справедливо равенство

$$u(x) = u(a) + \int_0^1 \Gamma_{0,a} [u](tx + (1-t)a) \frac{dt}{t}. \quad (2)$$

Доказательство. Так как

$$t \frac{du}{dt}(tx + (1-t)a) = \Gamma_{0,a} [u](tx + (1-t)a),$$

то

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Gamma_{0,a} [u](tx + (1-t)a) \frac{dt}{t} &= \int_0^1 \frac{du}{dt}(tx + (1-t)a) dt = \\ &= u(tx + (1-t)a) \Big|_{t=0}^{t=1} = u(x) - u(a). \end{aligned}$$

Отсюда получаем равенство (2). Лемма доказана.

Лемма 3. Для любого $x \in \Omega$ справедливо равенство

$$u(x) = u(a) + \frac{(-1)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} \int_0^1 \frac{(\ln t)^{\ell-1}}{t} \Gamma_{0,a}^{(\ell)} [u](tx + (1-t)a) dt. \quad (3)$$

Доказательство. Равенство (3) докажем методом математической индукции. При $\ell = 1$ равенство (3) совпадает с (2). Пусть для некоторого $\ell = k$ справедливо равенство (3). Докажем его для $\ell = k + 1$. Для $\ell = k + 1$ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{(\ln t)^k}{t} \Gamma_{0,a}^{(k+1)} [u](tx + (1-t)a) dt &= \int_0^1 \frac{(\ln t)^k}{t} t \frac{d}{dt} \Gamma_{0,a}^{(k)} [u](tx + (1-t)a) dt = \\ &= \int_0^1 (\ln t)^k \frac{d}{dt} \Gamma_{0,a}^{(k)} [u](tx + (1-t)a) dt = (\ln t)^k \Gamma_{0,a}^{(k)} [u](tx + (1-t)a) \Big|_{t=0}^{t=1} - \\ &\quad - k \int_0^1 \frac{(\ln t)^{k-1}}{t} \Gamma_{0,a}^{(k)} [u](tx + (1-t)a) dt. \end{aligned}$$

Так как $\Gamma_{0,a} [u] = t \frac{du}{dt}$, то первое слагаемое последней суммы обращается в нуль, а для второго слагаемого по предположению индукции получаем

$$-k \int_0^1 \frac{(\ln t)^{k-1}}{t} \Gamma_{0,a}^{(k)} [u](tx + (1-t)a) dt = -k \frac{(k-1)!}{(-1)^{k-1}} [u(x) - u(a)].$$

Значит, при $\ell = k + 1$ имеет место равенство

$$u(x) = u(a) + \frac{(-1)^k}{k!} \Gamma_{0,a}^{(k+1)} [u](tx + (1-t)a) dt.$$

Лемма доказана.

Легко показать, что в случае $\mu = 0$ для оператора $\Gamma_{0,a}^{(-\ell)}$ имеет место представление

$$\Gamma_{0,a}^{(-\ell)}[u](x) = \frac{(-1)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} \int_0^1 \frac{(\ln t)^{\ell-1}}{t} u(tx + (1-t)a) dt.$$

Тогда из леммы 3 вытекает следствие.

Следствие 1. Для любого $x \in \Omega$ справедливо равенство

$$\Gamma_{0,a}^{(-\ell)}[\Gamma_{0,a}^{(\ell)}[u]](x) = u(x) - u(a). \tag{4}$$

Обратный порядок действия операторов $\Gamma_{0,a}^{(-\ell)}$ и $\Gamma_{0,a}^{(\ell)}$ не всегда возможен, поскольку если $u(a) \neq 0$, то оператор $\Gamma_{0,a}^{(-\ell)}[u]$ не определен.

Лемма 4. Пусть $u(a) = 0$. Тогда для любого $x \in \Omega$ справедливо равенство

$$\Gamma_{0,a}^{(\ell)}[\Gamma_{0,a}^{(-\ell)}[u]](x) = u(x). \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $u(a) = 0$. Тогда оператор $\Gamma_{0,a}^{(-\ell)}$ для таких функций определен и

$$\begin{aligned} \Gamma_{0,a}^{(\ell)}[\Gamma_{0,a}^{(-\ell)}[u]](x) &= \Gamma_{0,a}^{(\ell)} \left[\frac{(-1)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} \int_0^1 \frac{(\ln t)^{\ell-1}}{t} u(tx + (1-t)a) dt \right] = \\ &= \frac{(-1)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} \int_0^1 \frac{(\ln t)^{\ell-1}}{t} \Gamma_{0,a}^{(\ell)}[u](tx + (1-t)a) dt. \end{aligned}$$

Последнее выражение в силу равенства (3) равно $u(x) - u(a)$. Так как $u(a) = 0$, то отсюда получаем (5). Лемма доказана.

Лемма 5. Для любого $x \in \Omega$ справедливы равенства

$$1) \Delta \Gamma_{0,a}^{(\ell)}[u](x) = \Gamma_{2,a}^{(\ell)}[\Delta u](x); \tag{6}$$

2) если $u(a) = 0$, то

$$\Delta \Gamma_{0,a}^{(-1)}[u](x) = \Gamma_{2,a}^{(-1)}[\Delta u](x). \tag{7}$$

Равенства (6) и (7) доказываются непосредственным подсчетом.

Следствие 2. Для любого $x \in \Omega$ справедливы равенства

$$1) \Delta \Gamma_{0,a}^{(\ell)}[u](x) = \Gamma_{2,a}^{(\ell)}[\Delta u];$$

2) если $u(a) = 0$, то

$$\Delta \Gamma_{0,a}^{(-\ell)}[u] = \Gamma_{2,a}^{(-\ell)}[\Delta u].$$

3. Постановка и решения краевых задач

Переходим к изучению краевых задач с граничным оператором $\Gamma_{0,a}^{(\ell)}$.

Рассмотрим в области Ω следующие задачи:

Задача 1. Найти гармоническую функцию $u(x) \in C^\ell(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, для которой функция $\Gamma_{0,a}^{(\ell)}[u]$ непрерывна в области $\bar{\Omega}$ и на сфере $\partial\Omega$ удовлетворяет условию

$$\Gamma_{0,a}^{(\ell)}[u](x) = f(x), x \in \partial\Omega. \tag{8}$$

Задача 2. Пусть $a = (0, 0, \dots, 0)$. Найти функцию $u(x) \in C^\ell(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую в области Ω уравнению Пуассона

$$-\Delta u(x) = g(x), x \in \Omega,$$

для которой функция $\Gamma_{0,a}^{(\ell)}[u](x)$ непрерывна в $\bar{\Omega}$ и удовлетворяет на сфере $\partial\Omega$ равенству:

$$\Gamma_{0,a}^{(\ell)}[u](x) = f(x), x \in \partial\Omega. \tag{9}$$

Заметим, что если $r = |x|$, то при $a = (0, \dots, 0)$ получаем

$$\Gamma_{0,a}[u] \equiv \Gamma_0[u] = \sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial u}{\partial x_k} = r \frac{\partial u}{\partial r}.$$

Так как $r \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{\partial\Omega}$, то задачи 1 и 2 при $\ell = 1$ представляют собой задачу Неймана.

Пусть $v(x)$ — решение следующей задачи Дирихле:

$$\begin{cases} -\Delta v(x) = g_1(x), x \in \Omega; \\ v(x) = f(x), x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (10)$$

Известно, что для достаточно гладких функций $g_1(x)$ и $f(x)$ решение задачи (10) существует, единственно и представляется в виде:

$$v(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\Omega} G(x,y) g_1(y) dy - \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial\Omega} P(x,y) f(y) dS_y, \quad (11)$$

где $G(x,y)$ — функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа, а $P(x,y)$ — ядро Пуассона.

Причем

$$G(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{n-2} \left[|x-y|^{2-n} - \left| x|y| - \frac{y}{|y|} \right|^{2-n} \right], n \geq 3; \\ \ln|x-y| - \ln \left| x|y| - \frac{y}{|y|} \right|, n = 2; \end{cases}$$

$$P(x,y) = \frac{1-|x|^2}{|x-y|^n}.$$

Основными результатами настоящей работы являются следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $f(x) \in C(\partial\Omega)$. Тогда для разрешимости задачи 1 необходимо и достаточно выполнения условия

$$\int_{\partial\Omega} \frac{1-|a|^2}{|a-y|^n} f(y) dS_y = 0. \quad (12)$$

Если решение задачи 1 существует, то оно единственно с точностью до постоянного слагаемого и представляется в виде

$$u(x) = C + \Gamma_{0,a}^{(-\ell)}[v](x), \quad (13)$$

где $v(x)$ — решение задачи (10) при $g_1(x) = 0$, удовлетворяющее условию $v(a) = 0$.

Теорема 2. Пусть $\lambda > \ell, \ell = 1, 2, \dots$, λ — нецелое, $g(x) \in C^{\lambda+\ell}(\bar{\Omega})$ и $f(x) \in C^\lambda(\partial\Omega)$. Тогда для разрешимости задачи 2 необходимо и достаточно выполнения условия

$$\int_{\partial\Omega} f(x) dS_x = \int_{\Omega} \Gamma^{(\ell-1)}[g] dx. \quad (14)$$

Если решение задачи 2 существует, то оно единственно с точностью до постоянного слагаемого и представляется в виде

$$u(x) = C + \Gamma_0^{(-\ell)}[v](x), \quad (15)$$

где $v(x)$ — решение задачи (10) с функцией $g_1(x) = \Gamma_2^{(\ell)}[g](x)$, удовлетворяющей условию $v(0) = 0$.

Доказательство теоремы 1. Пусть $u(x)$ — решение задачи 1 существует. Применим к функции $u(x)$ оператор $\Gamma_{0,a}^{(\ell)}$ и обозначим $v(x) = \Gamma_{0,a}^{(\ell)}[u](x)$. Так как

$$v(x) = \sum_{k=1}^n (x_k - a_k) \frac{\partial}{\partial x_k} \Gamma_{0,a}^{(\ell-1)}[u](x),$$

то очевидно, что $v(a) = 0$. Применяя к функции $v(x) = \Gamma_{0,a}^{(\ell)}[u]$ оператор Δ с учетом равенства (6) и гармоничности функции $u(x)$, получаем $\Delta v(x) = 0, x \in \Omega$.

Далее из граничного условия (8) вытекает

$$v(x)|_{\partial\Omega} = \Gamma_{0,a}^{(\ell)}[u](x)|_{\partial\Omega} = f(x).$$

Таким образом, если $u(x)$ — решение задачи 1, то функция $v(x) = \Gamma_{0,a}^{(\ell)}[u]$ является решением задачи Дирихле (10) при $g_1(x) = 0$, удовлетворяющим дополнительное условие $v(a) = 0$.

Представляя функцию $v(x)$ в виде интеграла Пуассона, получаем

$$0 = v(a) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial\Omega} \frac{1-|a|^2}{|a-y|^n} f(y) dS_y.$$

Следовательно, необходимость выполнения условия (12) доказана.

Далее, если $v(a) = 0$, то для функции $v(x)$ можно применить оператор $\Gamma_{0,a}^{(-\ell)}$ и тогда, используя равенство (4), получаем

$$\Gamma_{0,a}^{(-\ell)}[v] = \Gamma_{0,a}^{(-\ell)}[\Gamma_{0,a}^{(\ell)}[u]] = u(x) - u(a).$$

Обозначив $u(a) = C$, имеем

$$u(x) = C + \Gamma_0^{(-\ell)}[v](x),$$

т.е. для решения задачи 1 имеет место представление (13). Так как решение задачи Дирихле (10) единственно, то решение задачи 1 единственно с точностью до постоянного слагаемого.

Покажем, что условие (12) является и достаточным для существования решения задачи 1. Пусть $v(x)$ — решение задачи (10) при $g_1(x) = 0$.

Так как при выполнении условия (12) для решения задачи Дирихле (10) выполняется условие $v(a) = 0$, то в классе таких функций оператор $\Gamma_{0,a}^{(-\ell)}$ определен и, следовательно, можно рассмотреть функцию $u(x) = C + \Gamma_{0,a}^{(-\ell)}[v](x)$.

Покажем, что данная функция удовлетворяет всем условиям задачи 1.

Применяя к функции $u(x) = C + \Gamma_{0,a}^{(-\ell)}[v](x)$ оператор Δ , получаем

$$\Delta u(x) = \Delta(C) + \Delta\Gamma_{0,a}^{(-\ell)}[v] = \Gamma_{2,a}^{(-\ell)}[\Delta v] = 0.$$

Далее из равенства (5) следует

$$\Gamma_{0,a}^{(-\ell)}[u](x) = \Gamma_{0,a}^{(-\ell)}[C + \Gamma_{0,a}^{(-\ell)}[v]](x) = v(x)$$

и поэтому

$$\Gamma_{0,a}^{(-\ell)}[u](x)|_{\partial\Omega} = v(x)|_{\partial\Omega} = f(x).$$

Теорема доказана.

Замечание 1. В случае $a = (0, \dots, 0)$ из условия (12) следует

$$\int_{\partial\Omega} f(x) dS_x = 0,$$

т.е. мы получаем условие разрешимости задачи Неймана.

Для доказательства теоремы 2 необходимо изучить некоторые свойства решения задачи Дирихле (10).

Лемма 6. Пусть $v(x)$ — решение задачи (10). Тогда

1) если $v(0) = 0$, то

$$\int_{\partial\Omega} f(y) dS_y = \int_{\Omega} G(0, y) g_1(y) dy; \tag{16}$$

2) если выполняется условие (16), то $v(0) = 0$.

Доказательство. Пусть $v(x)$ — решение задачи (10) и $v(0) = 0$. Тогда, представляя функцию $v(x)$ в виде (11), имеем

$$0 = v(0) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\Omega} G(x, y) g_1(y) dy - \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial\Omega} P(0, y) f(y) dS_y.$$

Так как $P(0, y) = 1, y \in \partial\Omega$, то отсюда получаем (16).

Второе утверждение доказывается в обратном порядке. Лемма доказана.

Лемма 7. Если в задаче (10) функция $g_1(x)$ имеет вид $g_1(x) = \Gamma_2[g](x)$, то условие (16) можно переписать в виде:

$$\int_{\partial\Omega} f(y) dS_y = \int_{\Omega} g(y) dy. \quad (17)$$

Доказательство. Пусть $g_1(x)$ имеет вид:

$$g_1(x) = \Gamma_2[g](x) \equiv \left(r \frac{\partial}{\partial r} + 2 \right) g(x).$$

Используя представление функции $G(x, y)$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} G(0, y) g_1(y) dy &= \frac{1}{n-2} \int_0^1 \rho^{n-1} \int_{|\xi|=1} (\rho^{\alpha-n} - 1) g_1(\rho\xi) d\xi d\rho = \\ &= \frac{1}{n-2} \int_0^1 \int_{|\xi|=1} (\rho - \rho^{n-1}) \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + 2 \right) g(\rho\xi) d\rho d\xi = \\ &= \frac{1}{n-2} \left[\int_0^1 \int_{|\xi|=1} (\rho^2 - \rho^n) \frac{\partial}{\partial \rho} g(\rho\xi) d\rho d\xi + 2 \int_0^1 \int_{|\xi|=1} (\rho - \rho^{n-1}) g(\rho\xi) d\rho d\xi \right] = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Изучим I_1 . Для этого интегрируем по частям внутренний интеграл

$$\int_0^1 (\rho^2 - \rho^n) \frac{\partial}{\partial \rho} g(\rho\xi) d\rho = (\rho^2 - \rho^n) g(\rho\xi) \Big|_{\rho=0}^{\rho=1} - \int_0^1 (2\rho - n\rho^{n-1}) g(\rho\xi) d\rho.$$

Значит,

$$I_1 + I_2 = \frac{n-2}{n-2} \left[\int_0^1 \int_{|\xi|=1} \rho^{n-2} g(\rho\xi) d\rho d\xi \right] = \int_{\Omega} g(y) dy.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\omega_n} \int_{\Omega} G(0, y) g_1(y) dy = \frac{1}{\omega_n} \int_{\Omega} g(y) dy.$$

Отсюда получаем равенство (17). Лемма доказана.

Следствие 3. Если в задаче (10) функция $g_1(x)$ имеет вид $g_1(x) = \Gamma_2^{(\ell)}[g](x)$, то условие (16) можно переписать в виде (14), т.е.

$$\int_{\partial\Omega} f(y) dS_y = \int_{\Omega} \Gamma_2^{(\ell-1)}[g](y) dy.$$

Лемма 8. Если в задаче (10) $g_1(x)$ имеет вид $g_1(x) = \Gamma_2^{(\ell)}[g](x)$ и $g(x) \in C_0^{(\ell-1)}(\Omega)$, то условие (16) можно переписать в виде

$$\int_{\partial\Omega} f(y) dS_y = (2-n)^{\ell-1} \int_{\Omega} g(y) dy. \quad (18)$$

Доказательство. Пусть $g_1(x)$ представляется в виде $g_1(x) = \Gamma_2^{(\ell)}[g](x)$. Используя представление оператора $\Gamma_2^{(\ell)}$, имеем

$$\int_{\Omega} \Gamma_2^{(\ell-1)}[g_2] dy = \int_0^1 \int_{|\xi|=1} \rho^{n-1} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + 2 \right) \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + 2 \right)^{\ell-2} g d\rho d\xi =$$

$$= \int_{|\xi|=1} \int_0^1 \rho^n \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + 2 \right)^{\ell-2} g(\rho, \xi) d\rho d\xi + 2 \int_{|\xi|=1} \int_0^1 \rho^{n-1} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + 2 \right)^{\ell-2} g(\rho, \xi) d\rho d\xi \equiv J_1 + J_2.$$

Рассмотрим интеграл

$$J = \int_0^1 \rho^n \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + 2 \right)^{\ell-2} g(\rho, \xi) d\rho.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} J &= \rho^n \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + 2 \right)^{\ell-2} g(\rho, \xi) \Big|_{\rho=0}^{\rho=1} - n \int_0^1 \rho^{n-1} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + 2 \right)^{\ell-2} g(\rho, \xi) d\rho = \\ &= \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + 2 \right)^{\ell-2} g(\xi) \Big|_{\rho=0}^{\rho=1} - n \int_0^1 \rho^{n-1} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + 2 \right)^{\ell-2} g(\rho) d\rho. \end{aligned}$$

Так как $g(y) \in C_0^{\ell-1}(\Omega)$, то

$$J = -n \int_0^1 \rho^{n-1} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + 2 \right)^{\ell-2} g(\rho \xi) d\rho.$$

Тогда

$$J_1 + J_2 = (2-n) \int_0^1 \rho^{n-1} \int_{|\xi|=1} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + 2 \right)^{\ell-2} g(\rho, \xi) d\xi d\rho.$$

Повторяя эту процедуру еще $\ell - 2$ - раз, получаем

$$\int_{\Omega} \Gamma_2^{(\ell-2)} [g](y) dy = (2-n)^{\ell-1} \int_{\Omega} g_2(y) dy.$$

Тогда из следствия 3 вытекает равенство (18). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $u(x)$ является решением задачи 2. Применим к этой функции оператор $\Gamma_0^{(\ell)}$ и обозначим $v(x) = \Gamma_0^{(\ell)} [u](x)$. Применяя к этой функции оператор Δ в силу утверждения 1) из следствия 2, получаем $\Delta v(x) = \Gamma_2^{(\ell)} [\Delta u]$.

Далее так как $-\Delta u(x) = g(x)$, то

$$-\Delta v(x) = \Gamma_2^{(\ell)} [g](x) \equiv g_1(x).$$

А силу граничного условия (9) обозначаем как

$$v(x)|_{\partial\Omega} = \Gamma_0^{(\ell)} [u](x)|_{\partial\Omega} = f(x).$$

Кроме того, $\Gamma_0^{(\ell)} [u](0) = 0$ и поэтому $v(0) = 0$. Таким образом, если $u(x)$ — решение задачи 2, то функция $v(x) = \Gamma_0^{(\ell)} [u](x)$ будет удовлетворять условиям задачи (10) с $g_1(x) = \Gamma_2^{(\ell)} [g](x)$ и $v(0) = 0$.

Из леммы 6 и следствия 3 вытекает, что для выполнения условия $v(0) = 0$ необходимо выполнение условия (14).

Покажем, что выполнение этого условия является и достаточным для существования решения задачи 2.

Действительно, если $g(x) \in C^{\lambda+\ell}(\bar{\Omega})$ и $f(x) \in C^{\lambda}(\partial\Omega)$, то $g_1(x) \in C^{\lambda}(\bar{\Omega})$ и решение задачи (10) существует и принадлежит классу $C^{\lambda}(\bar{\Omega})$ [3].

Далее так как выполняется условие (14), то решение задачи (10) удовлетворяет условию $v(0) = 0$. Тогда оператор $\Gamma_0^{(-\ell)}$ в таких функциях определен и поэтому можно рассмотреть функцию $u(x) = C + \Gamma_0^{(-\ell)} [v](x)$. Покажем, что данная функция удовлетворяет всем условиям задачи 2. Действительно, если применим к этой функции оператор Лапласа, то

$$\Delta u(x) = \Delta(C) + \Delta \Gamma_0^{(-\ell)} [v](x) = \Gamma_2^{(-\ell)} [\Delta v](x) = \Gamma_2^{(-\ell)} [\Gamma_2^{(\ell)} [g]] = g(x)$$

и

$$\Gamma_0^{(\ell)}[u](x) = \Gamma_0^{(\ell)}[\Gamma_2^{(-\ell)}[v]](x) = v(x).$$

Отсюда

$$\Gamma_0^{(\ell)}[u](x)|_{\partial\Omega} = v(x)|_{\partial\Omega} = f(x).$$

Теорема доказана.

Замечание 2. Если в задаче 2 $\ell = 1$, то условие разрешимости задачи имеет вид

$$\int_{\partial\Omega} f(y) dS_y = \int_{\Omega} g(y) dy,$$

т.е. в этом случае мы получаем условие разрешимости классической задачи Неймана.

Замечание 3. Если в задаче 2 функция $g(x)$ принадлежит классу $C_0^{\ell-1}(\Omega)$, то в силу равенства (18) условие разрешимости задачи имеет вид:

$$\int_{\partial\Omega} f(y) dS_y = (2-n)^{\ell-1} \int_{\Omega} g(y) dy.$$

Ранее этот результат был получен в работе [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке МОН РК. Грант № 1562 (20.09.2012 г.).

References

- 1 *Bavrin I.I.* Integro-differential operators for harmonic functions in convex domains and applications // *Differential Equations*. — 1988. — Vol. 24. — № 9. — P. 1629–1631.
- 2 *Bavrin I.I.* Operators for the harmonic functions and their applications // *Differential Equations*. — 1985. — Vol. 21. — №1. — P. 9–15.
- 3 *Gilbarg D., Trudinger N.* Elliptic partial differential equations of second order. — Moscow: Nauka, 1989. — 464 p.
- 4 *Karachik V.V.* A problem with higher-order normal derivatives on the boundary for the Poisson equation // *Differential Equation*. — 1996. — Vol. 32. — № 3. — P. 421–424.

Б.Х.Турметов, М.А.Муратбекова

Шарда кейбір шеттік есептерді шешудің операторлық әдісі туралы

Мақалада гармониялық және жеткілікті тегіс функциялар класында Нейман операторының жалпыламасы болатын кейбір интегродифференциалдық операторлардың қасиеттері зерттелді. Алынған қасиеттердің қолданылуы ретінде шарда Лаплас және Пуассон теңдеулері үшін кейбір шеттік есептер қарастырылды. Бұл шекаралық операторлардың реті теңдеудің ретінен жоғары болады. Зерттелінетін есептер Лаплас және Пуассон теңдеулері үшін Нейман есебінің шекаралық операторлары жоғарғы ретті болған жағдайға жалпыламасы болады. Зерттелінетін есептердің шешімі бар және жалғыз болуы туралы теоремалар дәлелденген.

B.H.Turmetov, M.A.Muratbekova

About operator method of solution of some boundary value problems in a ball

This article deals with the class of harmonic and smooth functions, studying the properties of the integro-differential operators generalizing the Neumann operators. By way of application of the so-obtained properties, we consider some boundary value problems for the Laplace and Poisson equations in the ball. The order of the considered boundary operators exceeds the equation order. The problems summarize the Neumann problem for the Laplace and Poisson equations in boundary operators of the high order. The theorem of existence and uniqueness of solutions of the problem are proved.