удовлетворяющих уравнениям (5)–(7). При проведении эксперимента специально были допущены грубые ошибки и затем, с помощью изложенного выше согласования, подправлены. Результаты отражены в таблице 3.

Таблица 3

Среднеквадратическая ошибка до и после первого и второго согласования $N = M = 4$, $A = 10$, $l = 5$

Среднеквадратические ошибки	u_ε	v_ε	H_ε
Ошибки до согласования	2,31	2,42	2,8
Ошибки после1-го согласования	0,75	0,63	0,41
Ошибки после 2-го согласования	0,54	0,48	0,34

Отсюда видно, что после первого и второго согласований среднеквадратические ошибки уменьшаются. Но при дальнейших согласованиях среднеквадратические ошибки не улучшаются, это, по-видимому, связано с погрешностью аппроксимаций производных.

Список литературы

1. *Костюков В.В.* Объективный анализ и согласование метрологических полей. — М.,1982. — 184 с.
2. *Бабалиев А.М., Костюков В.В., Фомин В.М.* Локальное согласование метеорологических элементов на базе полиномов // Труды ЗапСибНИИ. — 1982. — Вып. 55.
3. *Большаков В.Д., Гайдаев П.А.* Теория математической обработки геодезических измерений. — М.: Недра, 1977. — 367 с.
4. *Мудров В.И., Кушко В.Л.* Методы обработки измерений. — М., 1976. — 192 с.

УДК 517.518

Л.Н.Беляева, А.С.Шульгина-Таращук

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ДИРИХЛЕ ПРИ РЕШЕНИИ НЕСТАНДАРТНЫХ ЗАДАЧ

Көптесе есептерді шығару кезінде «кері жору» логикалық әдісі қолданылады. Мақалада осы әдістің бір тәсілі — Дирихле принципі қарастырылған. Бірнеше есептердің мысалында осы принцип қолданылды, сондай-ақ үздіксіз Дирихле принципі және де өлшемді шексіз көпмүше-ліктерге де Дирихле принципін пайдалануға болады. Есептердің біреуі Turbo Pascal програм-маның көмегімен шығарылған. Қарастырылған есептер ерекше шартты «қояндар» және «торлар» тіліне аударуды қажет етеді.

At the decision of many problems the logic method of a reasoning is used is «by contradiction». In the article one of its forms — a principle of Dirihle is considered. On an example of several problems the principle of Dirihle, a continuous principle of Dirihle, and also a principle of Dirihle with reference to infinite sets having a measure is used. One of problems is solved by means of the program in language Turbo Pascal. The considered problems demand ability logically to argue, translate an unusual condition on suitable language of «hares» and «cages».

В математике большое значение имеют так называемые доказательства существования. Самый простой способ доказать существование объекта с заданными свойствами — это указать его и убедиться, что он действительно обладает нужными свойствами. Например, чтобы доказать, что уравнение имеет решение, достаточно привести какое-то его решение. Доказательства существования такого рода называют прямыми или конструктивными.

Но бывают и косвенные доказательства существования, когда обоснование факта, что искомый объект существует, происходит без прямого указания на сам объект. Подобные соображения используются в различных задачах для доказательства существования.

При решении многих нестандартных задач используется логический метод рассуждения — «от противного». В данной работе рассмотрена одна из его форм — принцип Дирихле. Согласно этому принципу если множество из N элементов разбито на n непересекающихся частей, не имеющих общих элементов, где $N > n$, то, по крайней мере, в одной части будет более одного элемента. Принцип назван в честь немецкого математика Дирихле (1805–1859), который успешно применял его к доказательству арифметических утверждений.

Самая популярная задача на прямое применение принципа Дирихле такова: на Земле живет 3 млрд. человек, у каждого на голове — не более миллиона волос. Нужно доказать, что обязательно найдутся два человека с одинаковым числом волос. Приняв в качестве «классов» возможное число волос от 0 до 1000000 (всего 1000001 класс), а в качестве «предметов» население Земли (всего 3000000000 предметов) и применив принцип Дирихле, получим, что обязательно найдутся, по крайней мере, 2000 людей, имеющих одинаковое число волос на голове [1].

По традиции принцип Дирихле объясняют на примере «зайцев и клеток». Если мы хотим применить принцип Дирихле при решении конкретной задачи, то нам предстоит разобраться, что в ней — «клетки», а что — «зайцы». Это обычно является самым трудным этапом в доказательстве. Цель этой статьи — ознакомление с некоторыми изюминками решения задач по принципу Дирихле.

Самая популярная формулировка принципа Дирихле звучит так: «Если в n клетках сидит $n+1$ или больше зайцев, то найдётся клетка, в которой сидят, по крайней мере, два зайца».

Обратим внимание, что невозможно указать, в какой именно клетке сидит больше одного зайца (даже нельзя сказать, на сколько больше), можно только утверждать, что такая клетка обязательно есть. Заметим, что в роли зайцев могут выступать различные предметы и математические объекты — числа, отрезки, места в таблице и т.д.

Принцип Дирихле можно сформулировать на языке множеств и отображений: «При любом отображении множества P, содержащего $n+1$ элементов, в множество Q, содержащее n элементов, найдутся два элемента множества P, имеющие один и тот же образ».

В несерьёзной форме принцип Дирихле гласит: «Нельзя посадить семь кроликов в три клетки, чтобы в каждой было не больше двух кроликов».

Один математик сказал, что Дирихле по частоте упоминаний навсегда обеспечено одно из самых высших мест. И добавил: «Пожалуй, есть способ лишить его лидерства — назвать чьим-нибудь именем принцип «никакое чётное число не равно никакому нечётному».

Непрерывный принцип Дирихле: Если сумма n чисел равна S, то среди них есть число, не меньшее $\frac{S}{n}$, и число, не большее $\frac{S}{n}$. По-другому его можно сформулировать так: «Если среднее арифметическое нескольких чисел больше a, то хотя бы одно из этих чисел больше a». Действительно, если все числа меньше $\frac{S}{n}$, то их сумма меньше S, а если все числа больше $\frac{S}{n}$, то их сумма больше S. В обоих случаях получаем противоречие [2].

Не надо бояться дробного числа зайцев: если получается, что в ящике не меньше $\frac{7}{3}$ зайцев, значит, их больше двух.

Применительно к бесконечным множествам, имеющим меру, можно сформулировать утверждение, похожее на принцип Дирихле и столь же очевидное:

«Если внутри множества меры V расположено несколько множеств, сумма мер которых больше V, то найдётся общий элемент, принадлежащий, по крайней мере, двум из этих множеств».

Для отрезков и фигур это положение переписывается так:

«Если на отрезке длины L расположено несколько отрезков с суммой длин больше L, то хотя бы два из них имеют общую точку»;

«Если внутри фигуры площади S находится несколько фигур, имеющих сумму площадей больше S, то хотя бы две из них имеют общую точку».

В ряде задач используется обобщение принципа, а также утверждение, в некотором смысле ему обратное:

«Если на отрезке длины L расположено несколько отрезков, сумма длин которых больше $L \cdot k$, то, по крайней мере, одна точка покрыта не менее чем $k+1$ из этих отрезков»;

«Если сумма площадей нескольких фигур меньше S, то ими нельзя покрыть фигуру площади S».

Кроме того, существует простая геометрическая интерпретация принципа Дирихле: «Пусть из некоторой точки на плоскости проведено N различных лучей; тогда угол между некоторыми двумя из них не менее $\dfrac{360^0}{N}$».

Понятно, что если рассматривать только углы между соседними лучами, то всего получится N углов (рис. 1). В сумме они составляют полный угол, равный 360^0.

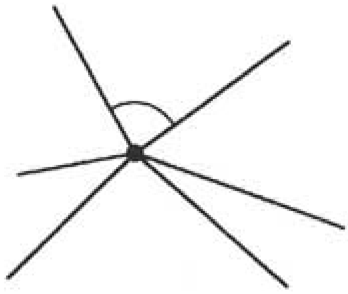


Рис. 1. Геометрическая интерпретация непрерывного принципа

Следовательно, по непрерывному принципу Дирихле градусная мера одного из этих углов не менее $\dfrac{360^0}{N}$ (иначе их сумма будет меньше 360^0).

Рассмотренный принцип называется непрерывным, так как здесь числа (или градусные меры углов) могут принимать любое значение из некоторого промежутка, в то время как принцип Дирихле в обычном смысле оперирует с дискретным набором объектов — было бы абсурдным предполагать, что в клетке может оказаться, скажем, два с половиной зайца [3].

Казалось бы, полученных сведений совсем мало, однако и на основании таких незначительных данных можно делать значительные выводы. Несмотря на совершенную очевидность этого принципа, его применение является весьма эффективным методом решения задач, дающим во многих случаях наиболее простое и изящное решение. Однако во всех этих задачах часто нелегко догадаться, что считать «зайцем», что — «клеткой» и как использовать наличие двух «зайцев», попавших в одну «клетку».

Приводимые ниже задачи показывают, что природа «зайцев» и «клеток» в различных задачах может сильно отличаться друг от друга.

Задача 1. На краю круглого стола расположены на одинаковом расстоянии друг от друга n флагов стран, за столом сидят n послов этих стран, причём каждый посол сидит рядом с чужим флагом. Доказать, что существует такое вращение стола, после которого хотя бы два посла окажутся рядом с флагом своей страны.

Решение. Существует $n-1$ способов вращения стола, после каждого из них взаимное расположение флагов и послов изменится. Каждому послу сопоставим вращение, после которого он окажется рядом со своим флагом. Согласно принципу Дирихле при каком-то вращении два (может, и больше) посла окажутся рядом со своим флагом. В решении задачи роль «зайцев» играют послы, а роль «клеток» — положения стола при различных вращениях. Посол попадает в «клетку», если при соответствующем этой «клетке» вращении стола он оказывается рядом с флагом своей страны. Таким образом, «клеток» у нас $n-1$, а «зайцев» — n.

Замечание. Условие о том, что вначале ни один из послов не находится рядом со своим флагом, существенно. На самом деле первоначальное положение также является «клеткой», но эта «клетка» по условию заведомо окажется пустой. Так что можно считать, что всего «клеток» имеется $n-1$.

Задача 2. Все натуральные числа выписаны в порядке возрастания без разделителей. В результате получилась бесконечная последовательность цифр: 12345678901234… Докажите, что некоторое натуральное число, образованное первыми цифрами этой последовательности, делится на 2009.

Решение. Первое число последовательности равно 1. Каждое следующее число строится по способу, указанному в условии задачи, а именно: последовательно выписываются числа натурального ряда до тех пор, пока не выпишется предыдущее число последовательности (повторяющиеся фрагменты чисел выделены жирным шрифтом).

1
123456789**1**
1234567891…1234567890**1234567891**
….

По принципу Дирихле в последовательности найдутся два числа, дающие одинаковые остатки при делении на 2009. Разность этих чисел представляет собой число вида $A \cdot 10^m$ и делится на 2009 без остатка. Так как 10^m на 2009 не делится, то на 2009 делится число A, по способу своего построения удовлетворяющее всем требованиям задачи. Оно и будет искомым.

Задача 3. Остроугольный треугольник разрезали прямолинейным разрезом на две (не обязательно треугольные) части, затем одну из этих частей — опять на две части и так далее: на каждом шаге выбирали любую из уже имеющихся частей и разрезали её (по прямой) на две. Через несколько шагов оказалось, что исходный треугольник распался на несколько треугольников. Могут ли все они быть тупоугольными?

Решение. Докажем индукцией по количеству имеющихся частей следующее утверждение: после каждого разрезания найдётся часть (многоугольник) хотя бы с тремя не тупыми углами.

База индукции. Сначала есть одна часть, и это треугольник с тремя острыми углами.

Шаг индукции. Пусть на очередном шаге имеется многоугольник M хотя бы с тремя не тупыми углами, и мы делаем очередное разрезание.

Если мы режем не многоугольник M, то шаг индукции доказан. Пусть мы разрезали M по прямой на две части. Обозначим точки пересечения этой прямой с многоугольником M буквами A и B.

Если точка A лежит внутри одной из сторон многоугольника M, то линия разреза образует с этой стороной два смежных угла, по крайней мере, один из которых — не тупой. Если же точка A — вершина многоугольника, то соответствующий ей угол многоугольника разбивается разрезом на два угла, сумма которых меньше 180^0. Значит, тем более один из них не тупой. Если при этом угол A сам не был тупым, то, очевидно, оба получившихся угла также не тупые. Таким образом, после разреза к точке A примыкает больше не тупых углов (по крайней мере, на единицу). Аналогичные рассуждения про второй конец разреза показывают, что дополнительный не тупой угол появляется и там.

По предположению индукции многоугольник M имел не менее трёх не тупых углов. Поэтому после разрезания у двух получившихся многоугольников таких углов в сумме не менее пяти. Но согласно принципу Дирихле, по крайней мере, в одном из них не тупых углов не менее трёх. Шаг индукции доказан.

Тем самым, утверждение доказано. Значит, после того как исходный треугольник распадётся на треугольники, хотя бы у одного из них будет не меньше трёх не тупых углов, то есть все углы этого треугольника будут не тупыми. Следовательно, треугольники, на которые распался исходный треугольник, не могут быть все тупоугольными.

Задача 4. Доказать, что если прямая l, расположенная в плоскости треугольника ABC, не проходит ни через одну из его вершин, то она не может пересечь все три стороны треугольника.

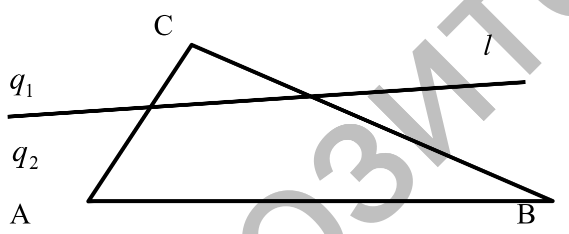


Рис. 2. Решение задачи 4

Решение. Полуплоскости, на которые прямая l разбивает плоскость треугольника ABC, обозначим через q_1 и q_2; эти полуплоскости будем считать открытыми (то есть не содержащими точек прямой l). Вершины рассматриваемого треугольника (точки A, B, C) будут «зайцами», а полуплоскости q_1 и q_2 — «клетками». Каждый «заяц» попадает в какую-нибудь «клетку» (ведь прямая l не проходит ни через одну из точек A, B, C). Так как «зайцев» три, а «клеток» только две, то найдутся два «зайца», попавшие в одну «клетку»; иначе говоря, найдутся такие две вершины треугольника ABC, которые принадлежат одной полуплоскости (рис. 2).

Пусть, скажем, точки A и B находятся в одной полуплоскости, то есть лежат по одну сторону от прямой l. Тогда отрезок AB не пересекается с l. Итак, в треугольнике ABC нашлась сторона, которая не пересекается с прямой l.

Задача 5. Внутри равностороннего треугольника со стороной m расположено пять точек. Доказать, что расстояние между некоторыми двумя из них меньше $0,5m$.

Решение. Средние линии правильного треугольника со стороной m разбивают его на четыре правильных треугольника со стороной $0,5m$. Назовём их «клетками», а точки будем считать «зайцами». По принципу Дирихле из пяти точек хотя бы две окажутся в одном из четырёх треугольников (рис. 3).

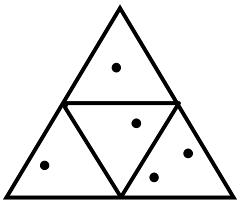


Рис. 3. Решение задачи 5

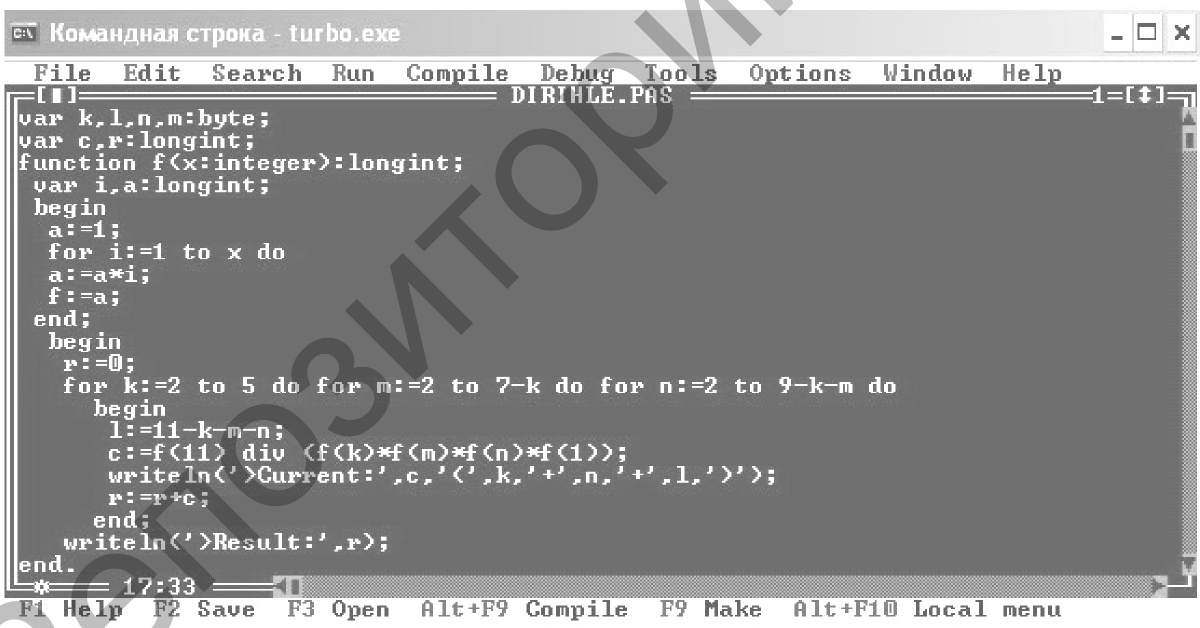
Расстояние между этими точками меньше $0,5m$, поскольку точки не лежат в вершинах треугольников. (Здесь использована известная лемма о том, что длина отрезка, расположенного внутри треугольника, меньше длины его наибольшей стороны.)

Задача 6. Группе из одиннадцати студентов предлагают контрольную работу из четырех разных вариантов. Сколькими способами можно разделить варианты, если на каждый вариант должно быть не менее двух человек? Сколькими способами после закрепления вариантов студентов можно рассадить по трем рядам (не менее чем по одному в каждый ряд)?

Решение. Пусть первый вариант получат k студентов. По условию $k > 1$, но, как следствие, $k < 6$ (иначе, по принципу Дирихле, какой-то другой вариант получат менее двух студентов). Количество вариантов такого выбора $A = C(11, k)$. Далее при выбранной первой группе выбираем вторую группу из m людей: $2 \le m \le 7 - k$. Количество вариантов выбора $B = C(11 - k, m)$. При выбранных двух группах аналогичным образом выбираем третью из n человек ($2 \le n \le 9 - k - m$), $D = C(11 - k - m, n)$. Последняя группа при выбранных трёх определяется автоматически.

По правилу умножения общее число способов выбора первого варианта — k, второго — m, третьего — n, четвертого $l = 11 - m - n - k$ равно $ABD = \dfrac{11!}{k! \cdot m! \cdot n! \cdot l!}$.

Задача решается с помощью программы, написанной на языке TURBO PASCAL 7.0 (рис. 4).




```
var k,l,n,m:byte;
var c,r:longint;
function f(x:integer):longint;
 var i,a:longint;
 begin
  a:=1;
  for i:=1 to x do
  a:=a*i;
  f:=a;
 end;
  begin
   r:=0;
   for k:=2 to 5 do for m:=2 to 7-k do for n:=2 to 9-k-m do
     begin
      l:=11-k-m-n;
      c:=f(11) div (f(k)*f(m)*f(n)*f(l));
      writeln('>Current:',c,'(',k,'+',n,'+',l,')');
      r:=r+c;
     end;
   writeln('>Result:',r);
end.
```

Рис. 4. Окно Turbo Pascal

В ходе выполнения программы получаются следующие результаты (см. табл.):

Т а б л и ц а

Распределение вариантов среди студентов

Current	4989600 (2+2+5)	1663200 (2+3+4)	415800 (2+4+3)	83160 (2+5+2)	1663200 (2+2+4)	554400 (2+3+3)	138600 (2+4+2)	415800 (2+2+3)	138600 (2+3+2)	83160 (2+2+2)
Current	1663200 (3+2+4)	554400 (3+3+3)	138600 (3+4+2)	554400 (3+2+3)	184800 (3+3+2)	138600 (3+2+2)	415800 (4+2+3)	138600 (4+3+2)	138600 (4+2+2)	83160 (5+2+2)
Result	14155680									

В таблице строки Current содержат все возможные распределения вариантов контрольной работы среди студентов. Ответ на второй вопрос задачи содержится в строке Result данной таблицы.

Рассмотренные нестандартные задачи для поиска ответа и решения требуют не столько знаний, сколько здравого смысла, изобретательности, умения логично рассуждать, переводить необычное условие на подходящий язык «зайцев» и «клеток».

Список литературы

1. *Спивак А.В.* Математический праздник. — М.: МЦНМО, 1995 — 78 с.
2. *Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В.* Ленинградские математические кружки. — Л., 1994. — 272 с.
3. Задачник Кванта: Математика. Ч. 3 / Под ред. Н.Б.Васильева. — М.: Физматгиз, 1997. — 128 с.

УДК 519.245:336.76

М.А.Емельяненко, Х.Ж.Халманов

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова

РЫНОК FOREX. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ИНФОРМАЦИОННОГО И МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Ақпараттық және математикалық модельдеу тұрғысынан валюта нарығының фундаменталды және техникалық талдауы қарастырылады. Техникалық талдаудың негізгі принциптерінің лингвистикалық және графикалық тұжырымдары беріледі.

It is considered the fundamental and technical analysis of foreign exchange market from the position of informational and mathematical simulation. It is presented the linguistic and graphic based statement of basic regulations about technical analysis.

Весьма популярным видом деятельности в наше время стала торговля иностранной валютой. Валютный рынок является круглосуточным, это непрерывный процесс, он не связан с определенными часами работы бирж, торговля происходит между банками, находящимися в разных частях земного шара [1]. Объемы торговых операций мирового валютного рынка FOREX составляют несколько триллионов долларов в день, причем не менее 80 % всех сделок составляет валютный дилинг — спекулятивные операции, имеющие целью извлечение прибыли за счет изменения курсов валют с течением времени [2]. Самой важной и сложной составляющей валютного дилинга является умение проводить анализ тенденций изменения рынка и, соответственно, предугадывать, какие именно факторы и каким образом повлияют на курсы валют.

Существует огромное число факторов, воздействующих как на весь валютный рынок в целом, так и на отдельные валюты [3]. Имеется также и множество подходов для анализа этих факторов. В данной статье мы рассмотрим подходы, которые объединяются понятием «количественные методы прогнозирования». Это означает, что поведение рынка мы описываем некоторым набором числовых показателей (индикаторов, индексов), причем для каждого из них задан способ его измерения. В применении к финансовым рынкам количественные методы прогнозирования подразделяются, как известно, на две группы существенно различных подходов: фундаментальный анализ и технический анализ [4].

Фундаментальный анализ устанавливает связь валютных курсов с экономической ситуацией и конкурентным положением торгующих стран, объясняет цели и инструменты финансовой политики центральных банков, показывает соотношения между различными финансовыми рынками, а главное — раскрывает причины их взлетов и падений. В фундаментальном анализе в основном используются экономические показатели, публикуемые международными информационными агентствами. К этим показателям относятся валовой внутренний продукт, торговый баланс, промышленное производство, индекс цен производителей и индекс потребительских цен, уровень безработицы, использо-