УДК 530.21

А.С.Кудусов, А.К.Карбозова

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: handy_5@mail.ru)

Волновые функции частиц как решения уравнения Даламбера

Статья посвящена исследованию методологических аспектов квантовой теории, а именно вопросу о главных принципах соотнесения волновых параметров основным динамическим величинам элементарных частиц. Как может быть показано, масса покоя может рассматриваться как некоторый структурный волновой параметр. Авторами изучена возможность обобщения этого подхода на системы во внешнем силовом поле. Также для модели проверено выполнение принципа неопределенности.

Ключевые слова: волновой параметр, принцип неопределенности, уравнение Даламбера; электростатистическое поле; принцип Гейзенберга; отклонение импульса.

Введение

Общепринятая Стандартная Модель является огромным достижением современной теоретической физики. Почти регулярно ее теоретические предсказания подтверждаются все новыми экспериментальными фактами. Однако при всей своей формальной согласованности она имеет существенные проблемы с интерпретацией. К примеру, толкование процесса взаимодействия как обмена бозонами выглядит механически, кроме того, не имеет предположений о природе элементарных частиц. Действительно, Стандартная Модель оперирует волновыми функциями, функциями Грина и т.д., и все эти объекты связаны с поведением частиц, но не с их внутренней структурой. Такая ситуация, вместе с некоторыми противоречиями с экспериментальными данными, стимулирует научно-исследовательскую деятельность в области квантовых основ. Вполне возможно, что корень проблемы находится в Копенгагенском толковании волновой функции.

В статье Дональда Чанга «On the wave nature of matter» предложенная модель [1] показывает, что подход к волновой функции, как к волне некоторого физического поля для свободной частицы, ведет к возможному объяснению массы покоя как нового квантового числа. Его модель основывается на трех концептуальных постулатах.

- Как и фотоны, частицы (например, электроны) не являются точечными объектами, им следует сопоставлять волновые пакеты.
- Как и фотоны, материя волн частиц является возбуждениями реального физического поля.
- Разные виды частиц — это разные моды возбуждения единого поля в вакууме.

Как показано в этой статье, модель Чанга может быть обобщена до включения электрического поля и её цилиндрические решения не нарушают принципа неопределенности.

1. Теория для свободной частицы

Волновое уравнение для электромагнитного поля имеет вид

$$A_\mu = 0 .$$

Решение этого уравнения может быть представлено в виде $A_\mu = (\varphi\psi, \vec{A}\psi)$, где φ и $\vec{A}$ образуют некоторый четыре-вектор относительно преобразований Лоренца. Таким образом, мы получаем уравнение

$$\psi = 0 .$$

В цилиндрической системе отсчета имеем

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=0. \quad (1)$$

Выполняем разделение переменных

$$\psi(r,\varphi,z,t)=\psi_L(z,t)\psi_T(r,\varphi),$$

где мы обозначим буквой L продольную составляющую функции ψ и буквой T — поперечную. Таким образом, наряду с (1) мы будем иметь следующую систему двух независимых уравнений:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi_L}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\psi_L}{\partial z^2}=-l^2\psi_L,\\&\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi_T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi_T}{\partial\varphi^2}=-l^2\psi_T,\end{aligned} \quad (2)$$

где l^2 — новый параметр разделения переменных.

Очевидно, что первое уравнение можно интерпретировать как уравнение Клейна-Гордона для свободной частицы, движущейся вдоль оси, если мы примем

$$l^2=m^2c^2/\hbar^2.$$

Решением этого уравнения является обычная плоская волна

$$\psi_L\propto\exp\left(\frac{i}{\hbar}(p_zz-Et)\right).$$

Второе уравнение системы (2), после разделения переменных $\psi_T(r,\varphi)=\psi_r(r)\psi_\phi(\varphi)$, приводит нас к следующему выражению для радиальной части:

$$\frac{\partial^2\psi_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_r}{\partial r}-\left(l^2+\frac{k^2}{r^2}\right)\psi_r=0, \quad (3)$$

где $k=0,\pm1,\pm2,....$ Угловая часть имеет очевидное решение в виде

$$\psi_\varphi\propto e^{ik\varphi}.$$

Нетрудно видеть, что решение уравнения (3) должно иметь вид цилиндрических функций

$$\psi_r=C_1J_n(lr)+C_2N_n(lr),$$

где C — произвольные постоянные и J_n, N_n — функции Бесселя. Следовательно, полное решение уравнения (1) имеет форму

$$\psi(r,\varphi,z)=\left(C_1J_n(lr)+C_2N_n(lr)\right)\exp\left(ik\varphi\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}(p_zz-Et)\right). \quad (4)$$

Детальный анализ этого решения содержится в [1].

2. Включение внешнего электромагнитного поля

Для включения в рассмотрение электромагнитного поля достаточно заменить обычные производные по координатам согласно стандартной процедуре:

$$D_\mu=\partial_\mu+ieA_\mu, \quad (5)$$

где A_μ образует потенциальный четыре-вектор. Итак, обычный оператор Даламбера может быть заменен конструкцией $g^{\mu\nu}D_\mu D_\nu$, который здесь назван обобщенным оператором Даламбера. В соответствии с предыдущей схемой решения для свободной частицы выберем уравнение для волновой функции в той же форме:

$$g^{\mu\nu}D_\mu D_\nu\psi=0.$$

После замены (5) мы будем иметь

$$g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\psi+ieg^{\mu\nu}(\partial_\mu A_\nu)\psi+ieg^{\mu\nu}A_\nu\partial_\mu\psi+g^{\mu\nu}ieA_\mu\partial_\nu\psi-g^{\mu\nu}e^2A_\mu A_\nu\psi=0. \quad (6)$$

Для простоты рассмотрим однородное электрическое поле, направленное вдоль оси z:

$$A_\mu=(\varphi(z),0,0,0).$$

Включая во внимание уравнение (6) в цилиндрической системе координат $\psi=\psi(r,\alpha,z,t)$, получим:

$$\frac{1}{c^2}\partial_t{}^2\psi-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+2i\frac{e}{c}\varphi\partial_t\psi-e^2\varphi^2\psi=0\,.$$

После разделения переменных $\psi=\Psi(z,t)\varphi(r,\alpha)$ мы будем иметь следующий набор независимых уравнений:

$$\begin{gathered}\frac{1}{c}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}+2i\frac{e}{c}\varphi\frac{\partial\Psi}{\partial t}-e^2\varphi^2\Psi=-l^2\Psi,\\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha}=-l^2\varphi.\end{gathered}\tag{7}$$

Последнее уравнение не содержит никакой информации о потенциале, т.е. угловая часть новой волновой функции остается прежней. Примем во внимание, что данная часть в модели Чанга содержит информацию о внутренних свойствах частиц, что является очень важным фактом для модели.

Нетрудно видеть, что первое уравнение из системы (7) имеет тот же вид, как и для плоской волны, распространяющейся вдоль оси, которая также является решением уравнения Клейна-Гордона,

$$D_\mu D^\mu\psi=-\frac{m^2c^2}{\hbar}\psi\,,$$

где

$$\frac{m^2c^2}{\hbar^2}=l^2\,.$$

Таким образом, результат свидетельствует о применимости модели во внешнем электростатическом поле.

3. Проверка принципа неопределенности

Теперь мы намерены проверить выполнение принципа неопределенности для цилиндрической волновой функции вида (4). Для простоты ограничимся случаем $n=0$ и $C_2=0$, тогда

$$\psi_0=C_1J_0(rl)\exp\left[\frac{i}{\hbar}(p_zz-Et)\right].\tag{8}$$

Обычное условие нормировки $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi^*\psi\,dV=1$ является условием на коэффициент C_1:

$$\left|C_1\right|^2\int J_0{}^2(rl)rdrd\varphi dz=1\,.$$

Нетрудно видеть, что это выражение стремится к бесконечности в связи с характерной зависимостью (8) от переменной *z*. Но интеграл по радиальной переменной также расходится. Действительно, в силу свойства цилиндрических функций [2]

$$\int x[z_p(\alpha x)]^2\,dx=\frac{x^2}{2}\{[z_p(\alpha x)]^2-z_{p-1}(\alpha x)z_{p+1}(\alpha x)\}\,,$$

мы получаем

$$\int r[J_0(lr)]^2\,dr=\frac{r^2}{2}\{[J_0(lr)]^2-J_{-1}(lr)J_1(lr)\}+const\,,$$

где

$$J_{-n}=(-1)^nJ_n\quad n=1,2,3...\,.$$

Таким образом, для определенного интеграла получим выражение

$$\int\limits_0^\infty r[J_0(lr)]^2\,dr=\lim_{r\to\infty}\frac{r^2}{2}\{J_0{}^2(lr)\}+J_1{}^2(lr)\}-\lim_{r\to0}\frac{r^2}{2}\{J_0{}^2(lr)+J_1{}^2(lr)\}\,.$$

В асимптотическом приближении, как известно, может быть записано:

$$J_0(x)\Big|_{x\to0}\approx1-\frac{x^2}{n},\;\;J_n(x)\Big|_{x\to0}\approx\frac{x^n}{2^nn!}\Rightarrow J_1(x)\Big|_{x\to0}\approx\frac{x}{2}\,.$$

Это значит, что

$$\lim_{r\to 0}\frac{r^2}{2}\{J_0{}^2(lr)+J_1{}^2(lr)\}=\lim_{r\to 0}\frac{r^2}{2}\left\{\left(1-\frac{(lr)^2}{n}\right)+\left(\frac{lr}{2}\right)^2\right\}=0 .$$

И для другого предела $|x|>>1$ мы имеем

$$J_p(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{p\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right).$$

Итак,

$$J_0(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{n}\right) \text{ и } J_1(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{3\pi}{n}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\pi}{n}\right).$$

Тогда

$$\lim_{r\to\infty}\frac{r^2}{2}\{J_0{}^2(lr)+J_1{}^2(lr)\}=\lim_{r\to\infty}\frac{r^2}{2}\left\{\frac{2}{\pi lr}\cos^2\left(lr-\frac{\pi}{n}\right)+\frac{2}{\pi lr}\sin^2\left(lr-\frac{\pi}{n}\right)\right\}=\lim_{r\to\infty}\frac{r}{\pi l}.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty}J_0{}^2(rl)rdrd\varphi=\lim_{r\to\infty}\frac{2r}{l}, \qquad (9)$$

т.е. нормировочный множитель стремится к бесконечности.

Давайте теперь проверим выполнение принципа Гейзенберга вдоль оси y:

$$\left\langle\Delta p_y{}^2\right\rangle\left\langle\Delta y^2\right\rangle\geq\frac{\hbar^2}{4}.$$

Для среднеквадратичного отклонения координаты имеем выражение вида

$$\left\langle\Delta y^2\right\rangle=\int\psi*\left(y-\langle y\rangle\right)^2\psi\,dV .$$

В связи с осевой симметрией системы $\langle y\rangle=0$ и принимая во внимание $y=r\sin\varphi$, мы получаем:

$$\left\langle\Delta y^2\right\rangle=\int\psi^*\psi r^2\sin^2\varphi dV .$$

После замены

$$\psi_0=C_1J_0(rl)e^{\frac{i}{\hbar}(\rho_z z-Et)}$$

мы получаем, что

$$\left\langle\Delta y^2\right\rangle=\int|C_1|^2J_0{}^2(rl)r^2\sin^2\varphi rdrd\varphi dz=\int_{-\infty}^{\infty}|C_1|^2dz\int_0^{\infty}r^3J_0{}^2(rl)dr\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|C_1|^2dz\int_0^{\infty}r^3J_0{}^2(rl)dr .$$

Это выражение, очевидно, стремится к бесконечности быстрее, чем интеграл (9). Теперь давайте рассмотрим среднеквадратичное отклонение импульса:

$$\left\langle\Delta p_y{}^2\right\rangle=\int\psi^*\left(\hat{p}_y-\left\langle p_y\right\rangle\right)^2\psi\,dV .$$

Также вследствие цилиндрической симметрии $\left\langle p_y\right\rangle=0$.

Следовательно,

$$\left\langle\Delta p_y{}^2\right\rangle=\int\psi^*\hat{p}_y{}^2\psi\,dV=-\hbar^2\int\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}dV .$$

Давайте рассмотрим отдельно вторую производную:

$$\frac{\partial^2J_0(rl)}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dJ_0(rl)}{\partial(rl)}\frac{\partial(rl)}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial J_0(rl)}{\partial(rl)}l\frac{\partial\sqrt{x^2+y^2}}{\partial y}\right)=$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial J_0(rl)}{\partial (rl)}\frac{1}{2}\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial J_0(lr)}{\partial r}\right)\frac{y}{r} + \frac{\partial J_0(lr)}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}\right) =$$

$$\frac{\partial^2 J_0(lr)}{\partial r^2}\frac{1}{2}\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{y}{r} + \frac{\partial J_0(lr)}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{r-y^2}{r^2} =$$

$$= \frac{\partial^2 J_0(rl)}{\partial r^2}\frac{y^2}{r^2} + \frac{\partial J_0(lr)}{\partial r}\frac{r^2-y^2}{r^3} = \frac{\partial^2 J_0(lr)}{\partial r^2}\frac{y^2}{r^2} + \frac{\partial J_0(lr)}{\partial r}\frac{x^2}{r^3}.$$

Вследствие связи между декартовыми и цилиндрическими координатами ($x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi$) получаем

$$\frac{\partial^2 J_0(lr)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 J_0(lr)}{\partial r^2}\cos^2\varphi + \frac{\partial J_0(lr)}{\partial r}\frac{\sin^2\varphi}{r^2}.$$

Так как

$$\frac{dJ_0(z)}{d\,z} = J_{-1}(z) = -J_1(z),$$

мы получим

$$\frac{\partial J_0(z)}{\partial r} = -lJ_1(lr).$$

И вследствие уже известного выражения

$$\frac{d}{dz}z^n J_n(z) = z^n J_{n-1}(z)$$

окончательно получим

$$\frac{\partial J_1(lr)}{\partial r} = l\frac{\partial}{\partial lr}\left(\frac{J_1(lr)}{lr}lr\right) = l\frac{\frac{\partial}{\partial lr}\left(J_1(lr)lr\right) - J_1(lr)lr}{(lr)^2} = lJ_0(lr) - \frac{1}{r}J_1(lr)$$

и

$$\frac{\partial^2 J_0(rl)}{\partial r^2} = -l\frac{\partial}{\partial r}J_1(lr) = \frac{l}{r}J_1(lr) - l^2 J_0(lr).$$

Поэтому для второй производной вдоль оси y будем иметь

$$\frac{\partial^2 J_0(rl)}{\partial y^2} = \left\{\frac{l}{r}J_1(lr) - l^2 J_0(lr)\right\}\cos^2\varphi - \frac{l}{r}J_1(lr)\sin^2\varphi = \frac{l}{r}J_1(lr)\cos 2\varphi - l^2 J_0(lr)\cos^2\varphi.$$

И в итоге для среднего квадратичного отклонения импульса мы получаем выражение

$$\left\langle \Delta P_y{}^2 \right\rangle = -\hbar^2 \int |C_1|^2 J_0(lr)\frac{\partial^2 J_0(lr)}{\partial y^2} r dr d\varphi dz =$$

$$= -\hbar^2 \int_{-\infty}^{\infty} |C_1|^2\, dz \int \left\{ J_0(lr)\frac{l}{r}J_1(lr)\cos 2\varphi - l^2 J_0(lr)\cos^2\varphi \right\} d\varphi.$$

После интегрирования по φ будем иметь

$$\left\langle \Delta P_y{}^2 \right\rangle = \hbar^2 l^2 \frac{1}{2}\int |C_1|^2\, dz J_0{}^2(lr) r dr.$$

Принимая во внимание условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_0{}^* \psi_0 dV = |C_1|^2 \int J_0{}^2(lr) r dr d\varphi dz = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |C_1|^2\, dz \int_0^{\infty} J_0{}^2(lr) r dr = 1,$$

мы, наконец, можем записать:

$$\left\langle \Delta p_y{}^2 \right\rangle = \frac{\hbar^2 l^2}{4\pi}.$$

Ненулевой результат означает, что принцип Гейзенберга не нарушается в исследуемой модели. Действительно, поскольку среднеквадратичное отклонение вдоль координаты стремится к бесконечности, то выражение $\left\langle \Delta p_y^{\,2} \right\rangle \left\langle \Delta y^2 \right\rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}$ также стремится к бесконечности.

References

1 *Chang D.C.* On the wave nature of matter // arXiv: physics/0505010. — 2005. — 18 p.

2 *Gradshteyn, Ryzhik I.M.* Tables of integrals, series and derivatives. — Moscow: State publishing of physical and mathematical literature, 1963. — 1100 p.

А.С.Кудусов, А.К.Карбозова

Бөлшектердің толқындық функциялары Даламбердің теңдеуінің шешімдері ретінде

Мақала кванттық теорияның әдіснамалық аспектілерін зерттеуге арналған. Нақтырақ айтсақ, элементар бөлшектердің негізгі динамикалық өлшемдерінің толқындық параметрлерінің арақатынасы принциптері мәселелері зерттелді. Тыныштық массасы кейбір құрылымдық толқындық параметр болып қарастырылуы мүмкін. Сондай-ақ бұл амалдың сыртқы күштер өрісімен жалпылау мүмкіндігі қарастырылып, модель үшін анықталмағандық принципінің орындалуы тексерілді.

A.S.Kudusov

Particle wave functions as solutions of the D'Alembert equation

This work is devoted to research of methodological aspects of the quantum theory. Namely, the question about the main principles of a correlation between the common dynamical quantities of elementary particles with the corresponding wave parameters is investigated in the paper. It can be shown that the particle rest mass can be regarded as some structural wave parameter. In the present work the possibility of generalization this approach on systems in external field is investigated. Also the implementation of uncertainty principle to the model is verified.