УДК 531.88

Т.М.Макажанова, Л.Н.Беляева, А.А.Муканов

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: orumbayevan@mail.ru)

О некоторых свойствах огибающих точечно-множественного отображения и двойственного к нему

В данной статье рассмотрены точечно-множественные отображения топологических пространств. Введено понятие семейства огибающих точечно-множественного отображения и двойственного (по Минковскому) к нему. Далее рассмотрены точечно-множественные отображения топологического векторного пространства X_1 в подмножестве локально-выпуклого пространства X_2, которое наделено слабой топологией $\sigma(X_1, X_2)$. Изучено строение двойственного отображения, топологические свойства огибающих функций.

Ключевые слова: топологическое векторное пространство, точечно-множественное отображение, сублинейный функционал, полурешётка, последовательность, полунепрерывность.

Рассматриваются топологические пространства X_1, X_2; $\Pi(X_2)$— непустые подмножества пространства X_2.

Пусть f — точечно-множественное отображение, сопоставляющее точкам из X_1 подмножества пространства X_2

$$f: X_1 \to \Pi(X_2);$$

$C(X_2)$ — пространство непрерывных на X_2 вещественнозначных функций; R^1 — вещественные числа.

Пусть K — выпуклый конус в $C(X_2)$, рассмотрим семейство вещественных функций

$$P_g: X_1 \to R^1, \text{ где } P_g(x) = \sup\{g(y), y \in f(x)\} \ \left(x \in X_1, g \in \mathrm{K} \subset C(X_2)\right),$$

называемых семейством огибающих отображения f.

Пусть X — векторное пространство, функционал $g: X \to R^1$ называется сублинейным, если выполнены условия

$$g(x_1 + x_2) \leq g(x_1) + g(x_2) \text{ (субаддитивность);}$$

$$g(\alpha x) = \alpha g(x), \alpha \geq 0 \text{ (положительная однородность).}$$

Очевидно, что сублинейным является всякий линейный функционал. Сублинейные непрерывные функционалы образуют выпуклый конус в $C(X_2)$.

Пусть теперь X_1, X_2 — векторные пространства $f: X_1 \to \Pi(X_2)$.

Отображение f назовём сублинейным, если выполняются условия

$$f(x_1 + x_2) \subset f(x_1) + f(x_2) \ \forall x_1, x_2 \in X_1 \text{ (субаддитивность);}$$

$$f(\alpha x) = \alpha f(x) \ \forall x \in X_1, \ \alpha \geq 0 \text{ (положительная однородность).}$$

Справедливо

Предложение 1. Если f сублинейно, K — конус сублинейных функционалов в $C(X_2)$, то P_g является сублинейным функционалом $\forall g \in \mathrm{K}$.

Доказательство. Проверим субаддитивность P_g, $g \in \mathrm{K}$. Пусть $x_1, x_2 \in X_1$, $g \in \mathrm{K}$, тогда

$$P_g(x_1 + x_2) = \sup\{g(y), y \in f(x_1 + x_2)\} \ .$$

Из условия субаддитивности f имеем, что

$$f(x_1 + x_2) \subset f(x_1) + f(x_2).$$

Так как $y \in f(x_1 + x_2)$, то $y \in f(x_1) + f(x_2)$, т.е. $y = y_1 + y_2$, где $y_1 \in f(x_1)$, $y_2 \in f(x_2)$, и из субаддитивности g получаем неравенство

$$g(y) \le g(y_1) + g(y_2).$$

Таким образом,

$$P_g(x_1 + x_2) = \sup\{g(y), y \in f(x_1 + x_2)\} \le \sup\{g(y_1) + g(y_2),\ y_1 \in f(x_1),\ y_2 \in f(x_2)\} \le$$
$$\le \sup\{g(y_1),\ y_1 \in f(x_1)\} + \sup\{g(y_2),\ y_2 \in f(x_2)\} = P_g(x_1) + P_g(x_2).$$

Нетрудно проверить положительную однородность функционала P_g.

В [1] показано, что при определённых предположениях непрерывность (полунепрерывность) отображения f эквивалентна аналогичному свойству семейства $\{P_g\}$.

С помощью конуса $\mathrm{K} \subset C(X_2)$ строится двойственное к f отображение $f^d : X_1 \to \Pi(X_2)$ по формуле

$$f^d(x) = \{y \in X_2, g(y) \le P_g(x), g \in \mathrm{K}\}.$$

Рассматриваются свойства двойственных отображений, связанных в силу определения со свойствами функций P_g, а значит, и f.

Далее везде X_2 — топологическое векторное пространство; X_2' — сопряжённое к X_2 пространство линейных непрерывных функционалов; $\sigma(X_2, X_2')$ — слабая топология в пространстве X_2 [2].

Под локально-выпуклым понимаем хаусдорфово топологическое векторное пространство, каждая точка которого имеет выпуклую окрестность.

Напомним, что упорядоченное множество $(X, \ge)$ называется направленным, если

$$\forall x_1, x_2 \in X\ \ \exists x_3 \in X : x_3 \ge x_1,\ x_3 \ge x_2 \ \ [3].$$

Всякое отображение, область определения которого является направленным множеством, называется обобщённой последовательностью.

Для любого подмножества М топологического векторного пространства введём обозначения: co М — выпуклая оболочка М; $\overline{co}$ М — замкнутая выпуклая оболочка М.

Предложение 2. Пусть X_1 — топологическое векторное пространство; X_2 — локально-выпуклое пространство с топологией $\sigma(X_2, X_2')$; К — конус сублинейных непрерывных на X_2 функционалов, $f : X_1 \to \Pi(X_2)$, f^d — двойственное к отображению f. Тогда $f^d(x) = \overline{co} f(x)\ \forall x \in X_1$ ($\overline{co}$-выпуклая слабозамкнутая оболочка).

Доказательство. Включение $f^d(x) \supset f(x)$ следует непосредственно из определения отображения f^d. Проверим выпуклость множества $f^d(x)\ \ \forall x \in X_1$. Пусть $y_1, y_2 \in f(x), t_1, t_2 \ge 0,\ t_1 + t_2 = 1$. В силу определения P_g и сублинейности функционала g имеем

$$g(t_1 y_1 + t_2 y_2) \le t_1 g(y_1) + t_2 g(y_2) \le t_1 P_g(x) + t_2 P_g(x) = (t_1 + t_2) P_g(x) = P_g(x).$$

Покажем слабую замкнутость множества $f^d(x)$, т.е. покажем, что $f^d(x)$ содержит пределы всех своих слабосходящихся обобщённых последовательностей [3].

Пусть $\{y_\alpha\}$ — обобщённая последовательность в X_2, $y_\alpha \in f^d(x)$ и $y_\alpha \to y$. Как известно, сходимость в топологии $\sigma(X_2, X_2')$ означает, что $u(y_\alpha) \to u(y)$ для любого линейного на X_2 функционала $u \in X_2'$ [2]. Так как

$$y_\alpha \in f^d(x), \text{ т.е. } g(y_\alpha) \le P_g(x)\ \forall g \in \mathrm{K},$$

а $\mathrm{K} \supset X_2'$, то, следовательно,

$$u(y_\alpha) \le P_g(x)\ \forall \alpha, \text{ откуда и } \lim u(y_\alpha) = u(y) \le P_g(x).$$

Согласно теореме Хёрмандера (с учётом непрерывности g) всякий сублинейный функционал $g \in \mathrm{K}$ может быть представлен в виде $g(x) = \sup\{u(x); u \in X_2', u \le g\}$ [4]. Так как для любого линейного функционала $u \in X_2'$ имеем $u(y) \le P_g(x)$, то и $g(y) = \sup\{u(y),\, u \in X_2',\, u \le g\} \le P_g(x)$, откуда следует нужное включение $y \in f^d(x)$. Из выпуклости и замкнутости множества $f^d(x)$, включения $f^d(x) \supset f(x)$ получаем, что $f^d(x) \supset \overline{co}\, f(x)$.

Проверим обратное включение

$$f^d(x) \subset \overline{co}\, f(x) \ \ \forall x \in X_1 .$$

Предположим, что это неверно и существует точка $x \in X_1$ такая, что $f^d(x) \not\subset \overline{co}\, f(x)$, т.е. $\exists y_0 \in f^d(x),\, y_0 \notin \overline{co}\, f(x)$. По теореме об отделимости выпуклых множеств в локально-выпуклых пространствах найдётся линейный функционал $u \in X_2'$ такой, что

$$u(y_0) > \sup_{y \in \overline{co}\, f(x)} u(y) \ [2].$$

Из известного равенства $\sup\limits_{y \in \overline{co}\, f(x)} u(y) = \sup\limits_{y \in co\, f(x)} u(y)$ получим, что $\sup\limits_{y \in co\, f(x)} u(y) = \sup\limits_{y \in f(x)} u(y)$.

Действительно, если $\sup\limits_{y \in co\, f(x)} u(y) > \sup\limits_{y \in f(x)} u(y)$ (а в силу включения $f(x) \subset co\, f(x)$ всегда $\sup\limits_{y \in co\, f(x)} u(y) \ge \sup\limits_{y \in f(x)} u(y)$), то найдётся точка $y' \in co\, f(x)$ такая, что $u(y') > \sup\limits_{y \in (x)} u(y)$. Так как $y' \in co\, f(x)$, то

$$y' = \sum_{i=1}^{n} t_i y_i \text{, где } t_i \ge 0,\ \sum_{i=1}^{n} t_i = 1,\ y_i \in f(x)\ \forall i = \overline{1,n}.$$

В силу линейности функционала u имеем

$$u(y') = \sum_{i=1}^{n} t_i u(y_i) \le \sum_{i=1}^{n} t_i \max_{i=\overline{1,n}} u(y_i) = \max_{i=\overline{1,n}} u(y_i) \le \sup_{y \in f(x)} u(y),$$

что противоречит выбору y'. Таким образом, существуют $y_0 \in f^d(x)$ и линейный функционал u такие, что

$$u(y_0) > \sup_{y \in f(x)} u(y) = P_u(x)$$

(поскольку линейные функционалы входят в K). Но неравенство $u(y_0) > P_u(x)$ противоречит включению $y_0 \in f^d(x)$.

Для отображения $f^d : X_1 \to \Pi(X_2)$ также рассмотрим семейство огибающих

$$\{R_g\}:\ R_g(x) = \sup\{g(y),\ y \in f^d(x)\},\ g \in \mathrm{K},\ x \notin X_1 .$$

Если выполнены условия предложения 2, то справедливо

Предложение 3. Для любого $g \in \mathrm{K}$ функционалы P_g и R_g совпадают.

В связи с отмеченными взаимосвязями свойств отображений и семейства его огибающих (определяемого с помощью конуса K) возникает задача изучения преобразований конуса, не меняющих топологических свойств огибающих.

Приведём некоторые определения.

Векторное пространство с введённым в нём отношением порядка $\ge$ назовём упорядоченным векторным пространством, если в нём алгебраические операции и порядок согласованы следующим образом:

1. $x \ge y \Rightarrow x + z \ge y + z, \forall z$;
2. $x \ge y \Rightarrow \alpha x \ge \alpha y, \forall \alpha \ge 0$ [4].

Конус K в упорядоченном векторном пространстве называется верхней (нижней) полурешёткой, если вместе с любыми двумя своими элементами он содержит и точную верхнюю *sup* (нижнюю *inf*) границу этих элементов.

Верхней (нижней) полурешёткой, натянутой на конус K, называется наименьшая по включению верхняя (нижняя) полурешётка, содержащая в себе K и обозначаемая $\mathrm{K}^0(\mathrm{K}_0)$.

Для любого конуса K верхнюю (нижнюю) полурешётку, натянутую на K, можно получить присоединением к конусу K точных верхних (нижних) границ всех конечных подмножеств из K.

Замечание. Отметим, что если K — выпуклый конус (т.е. $x_1 + x_2 \in K \ \forall x_1, x_2 \in K$ и $\alpha x \in K \ \forall x \in K, \ \alpha \geq 0$), то выпуклыми конусами будут K^0 и K_0.

Покажем это для K^0. Пусть $x_1, x_2 \in K^0$, т.е.

$$x_1 = \sup_{i=\overline{1,n}} y_i, \ x_2 = \sup_{j=\overline{1,m}} z_j, \ y_i \in K \ \forall i = \overline{1,n}, \ z_j \in K \ \forall j = \overline{1,m}, \ x = x_1 + x_2.$$

Из определения sup имеем

$$x_1 \geq y_i \ \forall i = \overline{1,n}, \ x_2 \geq z_j \ \forall j = \overline{1,m},$$

откуда $x_1 + x_2 \geq y_i + z_j$, $\forall i = \overline{1,n}$, $\forall j = \overline{1,m}$, где $y_i + z_j \in K$ в силу выпуклости K.

Пусть теперь

$$b \geq y_i + z_j \ \forall i, j \ \Rightarrow b \geq \sup_{i,j} \left(y_i + z_j \right),$$

и в силу свойства ассоциативности точных границ имеем

$$\sup_{i,j} \left(y_i + z_j \right) = \sup_i \left(y_i + \sup_j z_j \right) = \sup_i y_i + \sup_j z_j = x_1 + x_2.$$

Мы показали, что $b \geq x_1 + x_2$, т.е. $x_1 + x_2$ — наименьшая верхняя граница конечной совокупности $\left\{ y_i + z_j \right\}_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,m}}}$ элементов из K, т.е. $x_1 + x_2 \in K^0$.

Далее считаем, что пространство $C(X_2)$ упорядочено естественным образом. Справедливо

Предложение 4. Пусть K — конус в $C(X_2)$, $f: X_1 \to \Pi(X_2)$; $P(K), P(K^0), P(K_0)$ — семейство огибающих отображения f относительно конусов K, K^0 и K_0. Тогда следующие условия эквивалентны:

a) функционалы из $P(K)$ полунепрерывны сверху (снизу);

b) функционалы из $P(K^0)$ полунепрерывны сверху (снизу);

c) функционалы из $P(K_0)$ полунепрерывны сверху (снизу).

Доказательство проведём по схеме 1) $a \Leftrightarrow b$, 2) $a \Leftrightarrow c$.

1) Пусть выполнено a). Возьмём $P_g \in P(K^0)$, т.е.

$$P_g = \sup_{y \in f(x)} g(y), \ g = \sup(g_1, g_2, ..., g_n), \text{ где } g_1, g_2, ..., g_n \in K.$$

Используя свойство ассоциативности точных границ, можно записать равенство

$$P_g(x) = \sup_{y \in f(x)} g(y) = \sup_{y \in f(x)} \left\{ g_1(y), g_2(y), \ldots, g_n(y) \right\} = \sup_{i=\overline{1,n}} \sup_{y \in f(x)} g_i(y) = \sup_{i=\overline{1,n}} P_{g_i}(x).$$

Пусть функционалы из $P(K)$ полунепрерывны сверху, α — вещественное число, тогда множество

$$\left\{ x : P_g(x) < \alpha \right\} = \bigcap_{i=1}^{n} \left\{ x : P_{g_i}(x) < \alpha \right\}$$

открыто как пересечение конечного числа открытых множеств, т.е. P_g полунепрерывен сверху.

Пусть теперь функционалы из $P(K)$ полунепрерывны снизу, α — вещественное число. Тогда

$$\left\{ x : P_g(x) > \alpha \right\} = \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ x : P_{g_i}(x) > \alpha \right\} —$$

открытое множество, т.е. P_g полунепрерывен снизу.

Пусть верно b). Выполнение a) следует из включения $K \subset K^0$.

Из включения $K \subset K^0$ и выполнения условия b) следует условие a).

2) Пусть теперь выполнено a),

$$P_g \in P(K_0), \ P_g(x) = \sup_{y \in f(x)} g(y), \ g = \inf(g_1, g_2, ..., g_n), \text{ где } g_1, g_2, ..., g_n \in K,$$

откуда

$$P_g(x) = \sup_{y\in f(x)} \inf\left(g_1(y), g_2(y), \ldots, g_n(y)\right)\ \forall x \in X_1.$$

Используя порядковую дистрибутивность пространства вещественных чисел, можно записать равенство [4]

$$P_g(x) = \underline{\inf}_{i=1,n} \sup_{y\in f(x)} g_i(y) = \underline{\inf}_{i=1,n} P_{g_i}(x).$$

Пусть функционалы из $P(\mathrm{K})$ полунепрерывны сверху, α — вещественное число, тогда

$$\left\{x : P_g(x) < \alpha\right\} = \bigcup_{i=1}^{n}\left\{x : P_{g_i}(x) < \alpha\right\} —$$

открытое множество в силу открытости множеств $\left\{x : P_{g_i}(x) < \alpha\right\}\ \forall i = \overline{1,n}$.

Если функционалы из $P(\mathrm{K})$ полунепрерывны снизу, α — вещественное число, то множество

$$\left\{x : P_g(x) > \alpha\right\} = \bigcap_{i=1}^{n}\left\{x : P_{g_i}(x) > \alpha\right\}$$

открыто, откуда следует полунепрерывность снизу функционала P_g.

References

1 *Rubinov A.M.* Superlinear multiple-valued maps. — L.: Science, 1980. — 166 p.

2 *Schaefer H.H.* Topological vector spaces. — M.: World, 1971. — 359 p.

3 *Kelly J.L.* General topology. — M.: Science, 1981. — 431 p.

4 *Kutatuladze S.S., Rubinov A.M.* Duality of Minkovsky and its applications. — Novosibirsk: Science, 1976. — 255 p.

Т.М.Мақажанова, Л.Н.Беляева, А.А.Мұқанов

Айналып өтетін нүктелі-жиынды бейнелеудің және оған қосарланған бейнелеудің кейбір қасиеттері туралы

Мақалада топологиялық кеңістіктердің нүктелі-жиынды бейнелеулері қарастырылған. Минковский бойынша, қосарланған және айналып өтетін нүктелі-жиынды бейнелеулердің жинағының ұғымдары берілген. Қосарланған бейнелеулердің құрылысы және айналып өтетін функциялардың жинағының топологиялық қасиеттері зерттелген. Сонымен қатар әлсіз топологиялы $\sigma(X_1, X_2)$ топологиялық векторлы X_1 кеңістігіндегі локальді-дөңес X_2 кеңістігінің ішкі жиынында нүктелі-жиынды бейнелеулер, айналып өтетін функциялардың топологиялық қасиеттері, қосарланған бейнелеулердің құрылымы қарастырылған.

T.M.Makazhanova, L.N.Belyaeva, A.A.Mukanov

On some properties of bend arounding point-set map and duali one for it

In this article we have considered point-set (i.d. for any point there is corresponding set) maps of topological spaces. Notions of collection of supreme generative functions of the point-set map and duali one by Minkovsky are introduced. Then we are considering point-set maps from topological vector-space X_1 into subsets X_2 — local-convex space, which has weak topology $\sigma(X_1, X_2)$. Also the structure of duali map and topological properties of the collection of supreme-generative functions are investigated.