# МЕХАНИКА

УДК 621.01.531.4

Ж.Б.Бакиров, М.Ж.Бакиров, Г.Д.Таженова

Карагандинский государственный технический университет

## РАСЧЕТ ВИБРОИЗОЛЯТОРОВ С НЕЛИНЕЙНЫМ ДЕМПФИРОВАНИЕМ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

*Гармоникалық линеаризация әдісімен сызықты емес виброизоляторы бар тербеліс объектінің параметрлерін анықтау есебі шығарылады. Еркін сызықты емес серпімді сипатталған құрғақ және ішкі үйкеліс виброизоляторлар қарастырылған. Виброизоляцияның коэффициентін анықтау үшін формулалар алынған және виброқорғалым тиімділігінің критерийі бойынша сызықты емес виброизоляторлар параметрлерінің таңдалым әдісі ұсынылған.*

*Using method of harmonic linearization solves the task of the determination parameters of oscillation of the object with non-linear vibration isolator. There are considered vibration isolators dry and inner friction with free non-linear elastic feature. There have been obtained formulas for determination of coefficient of vibration isolation and offered the methodology of the choice of parameters of non-linear vibration isolators on criterion of efficiency of vibroprotection.*

Уравнение колебаний виброизолированного объекта массы $m$ при гармоническом воздействии имеет вид

$$\ddot{x} + R(x,\dot{x})/m = f_0(\omega)\cos\omega t,$$

где $R(x,\dot{x})$ — сила, возникающая в виброизоляторе; $f_0(\omega) = F(\omega)/m$ — при силовом воздействии и $f_0(\omega) = \xi_0\omega^2$ — при кинематическом воздействии.

При кинематическом возбуждении под $x$ следует понимать относительное движение объекта. Упруго-диссипативную характеристику виброизолятора $R(x,\dot{x})$ обычно представляют в виде суммы упругой и диссипативной силы и линеаризуют вокруг среднего значения перемещения

$$R_y(x) = R_0 + c_g(x - a_0),\quad R_g(x,\dot{x}) = b_g\dot{x},$$

где коэффициенты линеаризации зависят от параметров колебательного процесса и при гармоническом воздействии определяются известными формулами [1].

Рассмотрим сначала расчет виброизоляторов сухого трения, в которых диссипативную силу можно линеаризовать так:

$$R_g = H\mathrm{sign}\dot{x} \approx b_g\dot{x} = \frac{4H}{\pi a\omega}\dot{x}.$$

Тогда линеаризованное уравнение движения объекта примет вид

$$\ddot{x} + \dot{x}h/a\omega + \lambda^2(a)x_0 + R_0/m = f_0(\omega)\cos\omega t, \tag{1}$$

где $h = 4H/\pi m$; $\lambda^2 = c_g/m$ — частота свободных нелинейных колебаний.

Уравнение (1) решаем методом гармонического баланса, представляя решение в виде

$$x = a_0 + x_0 = a_0 + a\cos(\omega t + \phi).$$

Тогда получим следующие выражения:

$$R_0(a_0,a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R_y(a_0 + a\cos\psi)d\psi = 0; \tag{2}$$

$$a = \sqrt{f_0^2(\omega) - h^2}\,/\left|\lambda^2(a) - \omega^2\right|. \tag{3}$$

Если теперь из (2) выразить $a_0$ через $a$ и подставить в формулу для коэффициента $c_g$, то получим уравнение скелетной кривой

$$\lambda^2(a) = \frac{1}{\pi m a}\int_0^{2\pi} R_y[a_0(a) + a\cos\psi]\cos\psi d\psi. \tag{4}$$

Известно, что при $F_0(\omega) < H$ виброзащитная система «заперта» сухим трением, т.е. объект колеблется вместе с источником. Из (3) следует, что при $f_0 < h$ приближенное гармоническое решение не существует. Анализ колебаний показывает, что в этом случае происходят движения с остановками. Так как такой режим для виброзащитных систем не характерен, то этот случай в работе не рассматривается. Решая совместно уравнения (3) и (4), определяем амплитуду колебаний. Подставляя ее в (4), находим частоту.

Если амплитуда вибрационного воздействия постоянна, то введение сухого трения эквивалентно уменьшению амплитуды воздействия в $f_0 / \sqrt{f_0^2 - h^2}$ раз в недемпфированной нелинейной системе [1, 2].

Рассмотрим случай, когда $f_0(\omega) = \xi_0\omega^2$. При этом зависимость амплитуды от частоты воздействия (АЧХ), называемая резонансной кривой, начинается с точки $a = 0$, $\omega = \sqrt{h/\xi_0}$ и идет вправо с ростом частоты. Найдем значения частоты $\omega_*$, при которых амплитуда принимает экстремальные значения. Приравнивая нулю производную $da^2 / d\omega^2$, получим

$$\omega_* = h / \xi_0\lambda(a).$$

Подставив это выражение в (3), находим формулу для определения экстремальных значений амплитуды

$$a_* = h\xi_0 / \sqrt{h^2 - \xi_0^2\lambda^4(a_*)}. \tag{5}$$

Значения $a_*$ могут быть определены графически как ординаты точек пересечения кривой (5) со скелетной кривой. При «жесткой» скелетной кривой, которая характерна для виброизоляторов, эти линии могут не пересекаться или пересекаться в двух точках. В первом случае АЧХ имеет одну ветвь без максимума, во втором случае — две ветви: основная ветвь имеет в точке пересечения максимум, а дополнительная — минимум (см. рис.). На рисунке при построении графика $a_*$ учтено, что $\lambda(a) = \omega$.

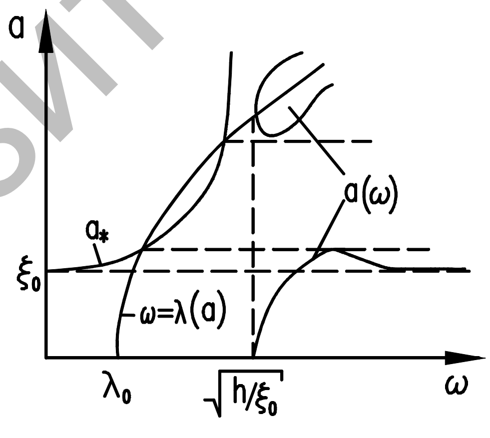


Рис. Формы АЧХ при наличии двух точек пересечения скелетной кривой с линией (5)

Максимальное значение силы в виброизоляторе равно

$$R_{\max} \approx m\lambda^2(a)a + H.$$

Коэффициент виброизоляции при этом составляет

$$k_R = R_{\max} / f_0(\omega)m = \left|1 - \omega^2 / \lambda^2(a)\right|^{-1} \sqrt{1 - h^2 / f_0^2(\omega)} + \pi h / 4 f_0(\omega). \tag{6}$$

Если $f_0 = const$, то это выражение можно переписать так

$$k_R = \sqrt{1 - \alpha_c^2} / \left|1 - z^2 / \nu^2(a)\right| + \alpha_c\pi / 4, \tag{6 а}$$

где $\alpha_c = h / f_0$, $z = \omega / \lambda_0$, $\nu = \lambda / \lambda_0$.

При этом условие эффективности виброзащиты $(k \le 1)$ примет вид

$$z^2 \ge \alpha_* \nu^2(a), \ \ \alpha_* = 1 + \sqrt{1-\alpha_c^2} / (1 - \alpha_c \pi / 4). \tag{7}$$

Если $f_0 = \xi_0 \omega^2$, то коэффициент виброизоляции можно переписать следующим образом:

$$k_R = \sqrt{1 - \alpha^2 / z^4} \, / \left|1 - z^2 / \nu^2(a)\right| + \pi\alpha / 4z^2, \ \ z = \omega / \omega_0. \tag{6 б}$$

Рассмотрим расчет конкретных виброизоляторов с нелинейной упругой характеристикой. Введем обозначение $\beta = a / a_c$, где

$$a_c = \sqrt{1-\alpha_c^2} F_0 / c, \ \ \beta = \left|\nu^2(a) - z^2\right|^{-1} \ \text{при} \ f_0 = const; \tag{3а}$$

$$a_c = \xi_0, \ \ \beta = \sqrt{z^4 - \alpha^2} \, / \left|\nu^2(a) - z^2\right| \ \text{при} \ f_0 = \xi_0 \omega^2. \tag{3б}$$

Пусть виброизолятор имеет кубическую характеристику вида $R_y = cx + ex^3$. Для нечетной функции $R_y$ с учетом (2) всегда получаем $a_0 = 0$. Тогда из (4) имеем

$$\lambda^2 = \lambda_0^2 (1 + 0{,}75 a^2 e / c) = \lambda_0^2 (1 + 0{,}75 \gamma \beta^2). \tag{а}$$

Для $f_0 = const$, подставляя (а) в (3а), получаем кубическое уравнение для определения безразмерной амплитуды $x = \beta^2$:

$$0{,}5625 \gamma^2 x^3 + 1{,}5 \gamma (1 - z^2) x^2 + (1 - z^2)^2 x - 1 = 0.$$

Решая это уравнение для фиксированных $\gamma, z$, определяем $\beta^2$, затем по (а) находим $\nu^2$ и далее по формуле (6а) находим коэффициент эффективности виброизоляции.

Проектный расчет по критерию эффективности виброзащиты производится по уравнению (3а) с учетом условия (7), записанного в виде равенства. Тогда уравнение для проектного расчета можно записать так:

$$0{,}75 \gamma \beta^3 + \beta - (\alpha_* - 1)^{-1} = 0.$$

Для конкретного объекта $(m)$ и виброизолятора выбранной марки $(e, c, H)$ при известных параметрах воздействия $(\omega, F_0)$ определяются $\gamma$ и $\alpha_*$ и находится корень этого уравнения $\beta_*$. Далее проверяется условие эффективности виброзащиты для рабочего диапазона частот

$$\omega_{\min}^2 \ge \alpha_* (1 + 0{,}75 \gamma \beta_*^2) c / m.$$

Если это условие не выполняется, то проверяется виброизолятор другой марки. С целью уменьшения габаритов виброзащитных систем подбор рекомендуется начать с виброизолятора с более жесткой упругой характеристикой.

Рассмотрим расчет для случая $f_0 = \xi_0 \omega^2$. Уравнение для определения амплитуды колебаний примет вид

$$(0{,}75\gamma)^2 x^3 + 1{,}5 \gamma (1 - z^2) x^2 + (1 - z^2)^2 x + \alpha^2 - z^4 = 0.$$

После определения $\beta^2$ и $\nu^2$ находим коэффициент виброизоляции по формуле (6 б).

Проектный расчет производится по этой схеме в виде проверки условия эффективности виброзащиты $k \le 1$.

Приведем расчетные формулы для виброизолятора с начальным натягом

$$R_y = cx + H_0 signx.$$

Из выражения (4) находим

$$\lambda^2 = \lambda_0^2 (1 + 4 H_0 / \pi c a).$$

Если $f_0 = const$, то с учетом (3а)

$$\nu^2 = 1 + \gamma / \beta = 1 + \gamma \left|\nu^2 - z^2\right|, \ \ \gamma = 4 H_0 / \pi c a_c.$$

Отсюда находим

$$\nu^2(a) = (1 - \gamma z^2) / (1 - \gamma) \ \text{при} \ z^2 < \nu^2; \ \ \nu^2(a) = (1 + \gamma z^2) / (1 + \gamma) \ \text{при} \ z^2 > \nu^2. \tag{б}$$

Уравнение резонансной кривой (3а) теперь примет вид

$$\left|(1 - z^2)\beta + \gamma\right| - 1 = 0. \tag{в}$$

Коэффициент виброизоляции определяется по (6 а) с учетом (б).

Уравнение для проектного расчета имеет вид

$$\beta\nu^2(\alpha_* - 1) = 1 \text{ или } \beta_* = 1/(\alpha_* - 1) - \gamma.$$

Условие эффективности виброзащиты

$$z^2 \ge \alpha_*(1 + \gamma/\beta_*) \text{ или } z^2 \ge \alpha_*/[1 - \gamma(\alpha_* - 1)].$$

Для выбора параметров виброизолятора это условие удобнее представить в виде

$$z^2 \ge \frac{1 - \alpha_c\pi/4 + \sqrt{1-\alpha_c^2}}{1 - \alpha_c\pi/4 - \gamma}.$$

Если $f_0 = \xi_0\omega^2$, то с учетом (3б) получим

$$\nu^2 = \frac{\sqrt{z^4 - \alpha^2} - \gamma z^2}{\sqrt{z^4 - \alpha^2} - \gamma} \text{ при } z^2 < \nu^2; \quad \nu^2 = \frac{\sqrt{z^4 - \alpha^2} + \gamma z^2}{\sqrt{z^4 - \alpha^2} + \gamma} \text{ при } z^2 > \nu^2. \qquad (г)$$

Уравнение резонансной кривой примет вновь вид (в). Коэффициент виброизоляции определяется по (6 б) с учетом (г). Проектный расчет производится в виде проверочного с использованием условия эффективности виброзащиты $k \le 1$.

Рассмотрим теперь случай, когда демпфирование осуществляется только за счет сил внутреннего трения в материале

$$R_g(x, \dot{x}) = \beta a^{\mu-1}\sqrt{a^2 - x^2}\, sign\dot{x},$$

где $\beta$, $\mu$ — параметры, характеризующие свойства материала; $a$ — амплитуда колебаний. При гармонической линеаризации этой силы получаем

$$R_g = \beta\omega^{-1}a^{\mu-1}\dot{x}.$$

Линеаризованное уравнение движения имеет вид (1), в котором коэффициент при втором слагаемом надо заменить на $\beta a^{\mu-1}/m\omega$. Разыскивая решение в прежнем виде, получаем следующее выражение для амплитуды колебаний:

$$a = \frac{f_0(\omega)}{\sqrt{[\lambda^2(a) - \omega^2]^2 + \beta_1^2 a^{2(\mu-1)}}}, \quad \beta_1 = \beta/m. \qquad (8)$$

Исследуем форму резонансных кривых. Приравняв нулю производную $da^2/d\omega^2$, можно показать, что экстремумы амплитуды достигаются вблизи точек пересечения резонансных кривых со скелетными. Полагая в (8) $\lambda = \omega$, получим выражение для экстремальных амплитуд или уравнение предельной кривой

$$a_* = [f_0(\omega)/\beta_1]^{1/\mu}. \qquad (9)$$

Количество точек пересечения скелетной кривой и линии (9), как и ранее, определяет число ветвей резонансной кривой.

Форма кривой (9) зависит от значения коэффициента $\mu$ и вида функции $f_0(\omega)$. При $f_0 = const$ — это прямая, параллельная оси абсцисс, которая с любой скелетной линией может иметь не более одной точки пересечения. Если $(f_0/\beta_1)^{1/\mu}$ превышает амплитуду, допустимую габаритами виброизолятора, то эта прямая не пересекается со скелетной кривой, что означает отсутствие экстремума и возможность резонансных явлений при любом значении $\omega > \lambda_0$.

При $f_0 = \xi_0\omega^2$ форма кривой (9) зависит от $\mu$. При $0 < \mu < 2$ она является вогнутой и может иметь несколько точек пересечения со скелетной кривой или не иметь таких точек. В соответствии с этим могут появиться дополнительные ветви резонансных кривых. При $\mu > 2$ кривая становится выпуклой и наиболее вероятным является существование одной точки пересечения. При $\mu = 2$ линия (9) превращается в прямую. В этом случае внутреннее трение, по степени влияния на резонансные явления, становится эквивалентным линейному трению.

При $\mu = 0$ линия (9) параллельна оси ординат, а ее уравнение $\beta_1 = \xi_0\omega^2$ показывает, что в этом случае внутреннее трение становится эквивалентным сухому трению, причем $h = \beta_1$.

Сила, возникающая в виброизоляторе, будет равна

$$R = m\lambda^2(a)a\cos(\omega t + \phi) - \beta a^\mu \sin(\omega t + \phi).$$

Амплитуда этой силы

$$R_{\max} = \sqrt{(m\lambda^2 a)^2 + (\beta a^\mu)^2}.$$

Коэффициент виброизоляции теперь определяется по формуле

$$k_R = \frac{R_{\max}}{mf_0(\omega)} = \{\frac{\nu^4(a)}{[\nu^2(a) - z^2]^2 + \beta_1^2 a^{2(\mu-1)} / \omega_0^4} + [\frac{\beta_1 a^\mu}{f_0(\omega)}]^2\}^{1/2}. \quad (10)$$

Преобразуем формулы (8) и (10) к виду, удобному для расчетов. Введем обозначение $\beta = a / a_c$, где при $f_0 = const$

$$a_c = f_0 / \lambda_0^2,\ \ \beta = \{[\nu^2(a) - z^2]^2 + \gamma_c \beta^{2(\mu-1)}\}^{-1/2},\ \ \gamma_c = \beta_1 a_c^{\mu-1} / \lambda_0^2;$$

$$a_c = \xi_0,\ \ \beta = z^2\{[\nu^2(a) - z^2]^2 + \gamma_c^2 \beta^{2(\mu-1)}\}^{-1/2} \text{ при } f_0 = \xi_0\omega^2.$$

Решая эти уравнения совместно с уравнением скелетной кривой, определяем $\beta$. Затем из уравнения скелетной кривой определяем частоту колебаний. Коэффициент виброизоляции теперь определяется по следующим формулам:

$$k_R = \sqrt{\nu^4(a)\beta^2 + \gamma_c^2\beta^{2\mu}} \text{ при } f_0 = const;$$

$$k_R = \sqrt{\nu^4(a)\beta^2 + \gamma_c^2\beta^{2\mu}} / z^2 \text{ при } f_0 = \xi_0\omega^2.$$

Проблему борьбы с резонансными колебаниями успешно может решить сочетанием различных форм демпфирования. Так при совместном действии внутреннего и сухого трения получаем следующее уравнение для АЧХ:

$$a = \frac{\sqrt{f_0^2(\omega) - h^2}}{\sqrt{[\lambda^2(a) - \omega^2]^2 + \beta_1^2 a^{2(\mu-1)}}}. \quad (11)$$

Нетрудно показать, что здесь амплитуда принимает экстремальные значения вблизи точек пересечения резонансной кривой со скелетной. Для определения этих точек полагаем в (11) $\lambda = \omega$ и получаем

$$a_* = (\sqrt{f_0^2(\omega) - h^2} / \beta_1)^{1/\mu}. \quad (12)$$

Для определения форм резонансных кривых достаточно найти точки пересечения кривой (12) со скелетной кривой. Для определения амплитуд и частот нелинейных колебаний совместно решается уравнение скелетной кривой и уравнение (11).

Выражение для коэффициента виброизоляции можно получить из (10) с учетом сухого трения

$$k_R = \{\frac{\nu^4(a)[1 - h^2 / f_0^2(\omega)]}{[\nu^2(a) - z^2]^2 + \beta_1^2 a^{2(\mu-1)} / \lambda_0^4} + [\frac{\beta_1 a^\mu}{f_0(\omega)}]^2\}^{1/2} + \frac{\pi h}{4 f_0(\omega)}. \quad (13)$$

При различных воздействиях эту формулу можно преобразовать к виду, более удобному для поверочного расчета:

$$f_0 = const,\ \ k_R = \sqrt{\nu^4\beta^2(1 - \alpha_c^2) + \gamma_c^2\beta^{2\mu}} + \pi\alpha_c / 4; \quad (13\text{ а})$$

$$f_0 = \xi_0\omega^2,\ \ k_R = [\sqrt{\nu^4\beta^2(1 - \alpha^2) + \gamma_c^2\beta^{2\mu}} + \pi\alpha / 4] / z^2. \quad (13\text{ б})$$

## Список литературы


1. *Бидерман В.А.* Прикладная теория механических колебаний. — М.: Высш. шк., 1972. — 416 с.
2. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974. — 503 с.