ПУЛЬСИРУЮЩИЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В КРУГЛОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ С УПРУГИМИ СТЕНКАМИ

Наврузов К., Шарипова Ш.Б., Абдикаримов Н.И.
Ургенчский государственный университет, Хорезм, Узбекистан
E-mail: qurol_46@mail.ru, shshb1990@gmail.com, nabijon.88@mail.ru

Сформулируем упрощенную задачу, имеющую немаловажное значение в исследованиях пульсирующего течения вязкой жидкости в трубах с упругими стенками [4-8]. Для этого считаем, что относительная амплитуда деформации стенки к радиусу слишком мало по сравнению единицы, т.е. $\frac{\Delta R}{R} << 1$. А также течение жидкости происходит в длинном трубопроводе, так что $\varepsilon = \frac{R}{L} << 1$. Тогда, пренебрегая малыми величинами, из системы уравнений для течения вязкой жидкости имеем

$$\begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_x}{\partial r}\right), \\ \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Для деформации стенки трубопровода на основании принятого допущения при малых деформаций стенки достаточно использовать уравнение Лайтфута [3]

$$\rho_\omega h \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = (p - p_c) - \frac{Ehu_r}{R^2(1-\nu_1^2)}, \quad (2)$$

где u_r – отношение радиальной деформации ΔR к радиусу трубы в состояние покоя; p_c – давление окружающей среды; ρ_ω – плотность стенки трубы; $h -$ толщина стенки; E – модуль упругости; R – радиус срединной поверхности стенки трубы; ν_1 – коэффициент Пуассона.

Левая часть уравнения выражает инерцию стенки трубы, однако они пренебрежимо малые величины, поэтому ими пренебрегаем. Тогда (2) имеет вид

$$p - p_c = \frac{Ehu_r}{R^2(1-\nu_1^2)}. \quad (3)$$

Отметим, что прилипание жидкости в стенки трубы определяются граничными условиями для компонент скоростей:

$v_x = 0, v_r = \frac{\partial u_r}{\partial t}$ при $r = R$. (4)

Если деформация стенки мала, то можно считать, что

$v_r|r = R + u_r = v_r|r = R.$ (5)

Дифференцируя уравнения (3) по переменной *t*, с учетом (5) , запишем

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} = \frac{Eh\vartheta_{r=R}}{R^2(1-\nu_1^2)} \text{где } \bar{p} = p - p_c. \quad (6)$$

Производя интегрирование уравнения неразрывности от 0 до R, найдем

$$\frac{\partial \bar{V}_x}{\partial x} = -\frac{2}{R}\vartheta_{r=R}, \qquad \text{где } \bar{V}_x \text{ – средняя скорость течения.} \quad (7)$$

Тогда связь между давлением и средней скоростью описывается уравнением

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial t} = -\frac{\bar{E}h}{2R}\frac{\partial \bar{V}_x}{\partial x}, \qquad \text{где} \bar{p} = p - p_c, \bar{E} = \frac{E}{1-\nu_1^2}. \quad (8)$$

Таким образом, упрощенная система уравнений движения вязкой жидкости в трубах с упругими стенками примет окончательный вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial V_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_x}{\partial r}\right), \\ \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} = 0, \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} = -\frac{\bar{E}h}{2R}\frac{\partial \bar{V}_x}{\partial x}. \end{cases} \quad (9)$$

Для решения упрощенной задачи при условиях, что в начальном и конечном сечениях трубы давление жидкости задается в комплексном виде, которые соответствуют рассматриваемому случаю, т.е.

$p = \sum_{n=1}^{N} p_{n0}\, exp(\, in\omega t)$ при $x = 0,$

$p = \sum_{n=1}^{N} p_{nL}\, exp(\, in\omega t)$ при $x = L.$ (10)

Тогда система уравнений принимает следующий вид:

$\frac{\partial^2 \tilde{V}_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{V}_x}{\partial r} - \frac{in\omega}{\nu}\tilde{V}_x = \frac{1}{\rho\nu}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x},$ (11)

$\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \frac{\partial \tilde{V}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{V}_r}{\partial r} + \frac{\tilde{V}_r}{r} = 0,$(12)

$in\omega \frac{1}{a}\bar{p} = -\frac{\partial \bar{V}_x}{\partial x},$(13)

где $a = \frac{\bar{E}h}{2R}$

Решение системы уравнений (11),(12) и (13) с учетом граничных условий (4)запишем в виде

$$\bar{V}(x,r) = \frac{1}{\rho(in\omega)}\left(-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}\right)\left(1 - \frac{I_0\left(\sqrt{\frac{in\omega}{\nu}}r\right)}{I_0\left(\sqrt{\frac{in\omega}{\nu}}R\right)}\right). \quad (14\ )$$

Умножив обе части формулы (14) на $\frac{2r}{R^2}$и проинтегрировав от 0 до R, получим

$$\bar{V}(x) = \frac{1}{in\omega\rho}\left(-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}\right)\left(1 - \frac{2J_1\left(i^{\frac{3}{2}}\alpha_n\right)}{i^{\frac{3}{2}}\alpha_n J_0\left(i^{\frac{3}{2}}\alpha_n\right)}\right). \quad (15\ )$$

где $\alpha_n^2 = \frac{n\omega}{\nu}R^2$

Тогда

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = -z\bar{V}_x(x). \quad (16\ )$$

Произведя дифференцирование (16) по x и подставив в место $\frac{\partial \bar{V}_x(x)}{\partial x}$ его значение из уравнения (13), получаем уравнения для определения давления

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x^2} - \frac{in\omega}{a}z\bar{p} = 0. \quad (17\ )$$

$$\bar{p} = \sum_{n=1}^{N} \bar{p}_{n0} \text{при} x = 0,$$

$$\bar{p} = \sum_{n=1}^{N} \bar{p}_{nL} \text{ при } x = L. \quad (18\ )$$

$$\bar{p}(x) = \sum_{n=1}^{N}\left[\bar{p}_{n0}\frac{sh\sqrt{\frac{in\omega}{a}}zL\left(1-\frac{x}{L}\right)}{sh\sqrt{\frac{in\omega}{a}}zL} + \bar{p}_{nL}\frac{sh\sqrt{\frac{in\omega}{a}}zL\frac{x}{L}}{sh\sqrt{\frac{in\omega}{a}}L}\right], \quad (19)$$

$$\bar{V}_x(x) = \sum_{n=1}^{N}\left[p_{n0}\frac{ch\sqrt{\frac{in\omega}{a}}zL\left(1-\frac{x}{L}\right)}{sh\sqrt{\frac{in\omega}{a}}zL} - \bar{p}_{nL}\frac{sh\sqrt{\frac{in\omega}{a}}zL\frac{x}{L}}{sh\sqrt{\frac{in\omega}{a}}zL}\right]\sqrt{\frac{in\omega}{az}}. \quad (20)$$

Использую полученное решение (19) и (20) можно произвести числовые расчеты для пульсирующих течения вязкой несжимаемой жидкости в круглой цилиндрической трубе с упругими стенками.

Список использованной литературы

1. Наврузов К. Гидродинамика пульсирующих течений в трубопроводах. Ташкент Фан. 1986, с.112
2. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Гостехиздат, 1956. – 520 с.
3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1973. – 877 с.
4. Громека И.С. О скорости распространения волнообразного движения жидкости в упругих трубах. Собр. соч. – М., 1952. – С. 172-183.