

## О некоторых приложениях интегральных преобразований

### About some applications of integral transformations

Есенбаева Г.А.

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова

Мақалада жылуөткізгіштік пен толқындық теңдеуінің шарттары берілген, олардың қасиеттері, сонымен қатар қарастырылған теңдеулердің шеттік есептерінің шешімі интегралдық Фурье түрлендіруін қолданып, зерттелген.

In the given article the equation of heat conduction, the wave equation with the given conditions, some properties of these equations and also the solutions of study boundary problems for these equations with the application of integral transformation of Fourier have been investigated.

Интегральные преобразования играют важную роль при решении широкого класса задач математической физики, к которым относятся, например, краевые задачи для уравнения Лапласа, Гельмгольца и Фурье в области, имеющей вид бесконечной полосы и полуполосы, бесконечного цилиндра и полуцилиндра и т.д. [1].

Применяемые в математической физике интегральные преобразования можно условно разделить на три класса: преобразования по временной переменной  $t$  на промежутке  $(0, +\infty)$ , преобразования по пространственным переменным в бесконечных пределах и преобразования по пространственным переменным в конечных пределах. К первому из них принадлежат преобразования Лапласа и Лапласа-Карсона, являющиеся основой операционного исчисления. Ко второму и третьему относят преобразования Фурье, Ганкеля, Лежандра, Меллина и другие, выбор которых в качестве «инструмента» решения конкретной задачи определяется геометрией тела и типом граничных условий [2].

Применение интегрального преобразования Фурье целесообразно в задачах, которые приводятся к интегрированию уравнений вида

$$u_{xx} + L(u) = f(x, y),$$

где  $L(u)$  — линейный дифференциальный оператор, не содержащий переменной  $x$ ;  $f(x, y)$  — заданная функция [1].

Найдем интегральное преобразование, ядро которого определяется задачей [3]

$$K_{xx} + \lambda K = 0, \quad x > 0; \quad (K_x - hK)|_{x=0} = 0. \quad (1)$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$K(x, \lambda) = A(\lambda) \cos(x\sqrt{\lambda}) + B(\lambda) \sin(x\sqrt{\lambda}),$$

и с учетом условий  $K(0, \lambda) = 1$ ,  $K_x(0, \lambda) = h$  получаем

$$K(x, \lambda) = \cos px + \frac{h}{p} \sin px,$$

где  $p = \sqrt{\lambda}$  — значение в верхней полуплоскости  $C$ .

Для вычисления функции Вейля-Титчмарша [3] найдем также функцию

$$\chi(x, \lambda) = h \cos px - \frac{1}{p} \sin px.$$

Решение Вейля, принадлежащее  $L_2[0, +\infty)$ , с точностью до множителя, зависящего от  $\lambda$ , имеет вид

$$v(x, \lambda) = \chi(x, \lambda) + m(\lambda)K(x, \lambda)$$

или после преобразования по формулам Эйлера

$$v(x, \lambda) = \frac{1}{2} \left[ \left( h + \frac{i}{p} \right) + m(\lambda) \left( 1 - \frac{ih}{p} \right) \right] \cdot e^{ipx} + \frac{1}{2} \left[ \left( h - \frac{i}{p} \right) + m(\lambda) \left( 1 + \frac{ih}{p} \right) \right] \cdot e^{-ipx}.$$

Так как  $e^{ipx} \in L_2[0, +\infty)$ , в то время как  $e^{-ipx} \notin L_2[0, +\infty)$ , заключаем, что

$$\left(h - \frac{i}{p}\right) + m(\lambda) \left(1 + \frac{ih}{p}\right) = 0,$$

откуда

$$m(\lambda) = \frac{1 + ip h}{h - pi}, \quad p = \sqrt{\lambda}.$$

Через функцию Вейля-Титчмарша по теореме 3.7 [3] находим спектральную функцию [3], имеющую различный вид в зависимости от знака  $h$ . Если  $h > 0$ , то

$$d\sigma(\lambda) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi(h^2 + \lambda)} d\lambda, & \lambda \geq 0, \\ 0, & \lambda < 0. \end{cases}$$

Переходя от параметра  $\lambda$  к  $p = \sqrt{\lambda}$ , получаем [3] смешанное преобразование Фурье и соответствующее ему обратное преобразование

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(x) \cdot \left[ \cos px + \frac{h}{p} \sin px \right] \cdot dx, \quad f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} F(p) \cdot \left[ \cos px + \frac{h}{p} \sin px \right] \cdot \frac{p^2}{p^2 + h^2} dp,$$

или

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(x) \cdot [p \cos px + h \sin px] \cdot dx; \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} F(p) \cdot [p \cos px + h \sin px] \cdot \frac{1}{p^2 + h^2} dp. \quad (3)$$

**Теорема 1** [4]. Если функция  $f \in L_1(-\infty, \infty)$  непрерывна и имеет ограниченную вариацию на всяком конечном интервале  $(a, b) \in (-\infty, \infty)$ , то имеет место интегральное представление

$$f(x) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} K(p, x) K(p, \xi) f(\xi) d\xi dp; \quad (4)$$

$$K(p, x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{p \cos px + h \sin px}{\sqrt{p^2 + h^2}}.$$

Отметим, что в случае отказа от непрерывности функции  $f$  в точке  $x$  ( $f$  кусочно-непрерывна) в левой части формулы (4) следует писать  $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ .

Интегральное представление (4) имеет место и для функций  $f \in L_2(0, \infty)$ .

**Теорема 2** [4]. Для функции  $f$ , имеющей интегрируемый квадрат модуля на полуоси  $[0, \infty)$ , справедливо в смысле сходимости в среднем интегральное представление (4).

Из интегрального представления (4) следует, что функция  $f$  по своему образу

$$F(p) = K[f(x)] = \int_0^{\infty} K(p, \xi) f(\xi) d\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi(p^2 + h^2)}} \int_0^{\infty} (p \cos \lambda \xi + h \sin p \xi) f(\xi) d\xi \quad (5)$$

однозначно восстанавливается по правилу

$$f(x) = K^{-1}[F(p)] = \int_0^{\infty} K(p, x) F(p) dp = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{p \cos px + h \sin px}{\sqrt{p^2 + h^2}} F(p) dp. \quad (6)$$

Очевидно, что интегральные представления (2)–(5) равносильны, что следует из (4).

Заметим, что при нахождении ядра интегрального преобразования задачи (1) при краевом условии первого рода или второго рода получим известные синус-преобразование или косинус-преобразование Фурье соответственно.

Найдем распределение температуры в полугораниченном стержне  $0 < x < \infty$ , если граничное условие конца стержня соответствует теплообмену по закону Ньютона на поверхности тела с окружающей средой, температура которой  $\theta(t)$  известна:  $u_x(0, t) - hu(0, t) = -h\theta(t)$ ;  $h$  — коэффициент теплообмена, а начальная температура стержня равна функции  $\varphi(x)$ . Температура  $u(x, t)$  в точке  $x$  в момент  $t$  должна удовлетворять краевой задаче

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0; \\ u_x(0, t) - hu(0, t) &= g(t), \quad \text{где } g(t) = -h\theta(t), \quad t > 0; \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad x > 0. \end{aligned}$$

Применяя преобразование Фурье (2) к исходной задаче:

$$\begin{aligned} U_p(t) &= \int_0^\infty u(x, t)(p \cos px + h \sin px) dx; \quad u_t: \int_0^\infty u_t(p \cos px + h \sin px) dx = U'_p(t); \\ u_{xx}: \int_0^\infty u_{xx}(p \cos px + h \sin px) dx &= \left\{ u_x(p \cos px + h \sin px) - pu(h \cos px - p \sin px) \right\} \Big|_0^\infty - p^2 U_p(t) = \\ &= -p(u_x - hu) \Big|_{x=0} - p^2 U_p(t) = -pg(t) - p^2 U_p(t); \\ u(x, 0) = \varphi(x) \Rightarrow U_p(0) &= \Phi_p, \quad \text{где } \Phi_p = \int_0^\infty \varphi(x)(p \cos px + h \sin px) dx, \end{aligned}$$

получим дифференциальную задачу в изображениях

$$U'_p(t) + a^2 p^2 U_p(t) = -a^2 pg(t); \quad U_p(0) = \Phi_p,$$

решение которой имеет следующий вид:

$$U_p(t) = \Phi_p e^{-a^2 p^2 t} - a^2 p \int_0^t g(\tau) e^{-a^2 p^2 (t-\tau)} d\tau.$$

Используя обратное преобразование (3):

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty U_p(t) \frac{p \cos px + h \sin px}{p^2 + h^2} dp,$$

найдем решение исходной задачи в аналитической форме

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^\infty \Phi_p e^{-a^2 p^2 t} \frac{p \cos px + h \sin px}{p^2 + h^2} dp - a^2 \int_0^t \left( \int_0^\infty g(\tau) e^{-a^2 p^2 (t-\tau)} d\tau \right) \frac{p \cos px + h \sin px}{p^2 + h^2} dp \right\};$$

$$u(x, t) = J_1 - J_2;$$

$$J_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \Phi_p e^{-a^2 p^2 t} \frac{p \cos px + h \sin px}{p^2 + h^2} dp =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left( \int_0^\infty \varphi(\xi) [p \cos p\xi + h \sin p\xi] d\xi \right) e^{-a^2 p^2 t} \frac{p \cos px + h \sin px}{p^2 + h^2} dp =$$

$$= \int_0^\infty \varphi(\xi) d\xi \left\{ \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-a^2 p^2 t}}{p^2 + h^2} (p \cos px + h \sin px)(p \cos p\xi + h \sin p\xi) dp \right\} = \int_0^\infty \varphi(\xi) F(x, t, \xi) d\xi,$$

где

$$\begin{aligned} F(x, t, \xi) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-a^2 p^2 t}}{p^2 + h^2} (p^2 \cos px \cos p\xi + ph(\cos px \sin p\xi + \cos p\xi \sin px) + h^2 \sin px \sin p\xi) dp = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-a^2 p^2 t}}{p^2 + h^2} (p^2 [\cos p(x-\xi) + \cos p(x+\xi)] + 2ph \sin p(x+\xi) + h^2 [\cos p(x-\xi) - \cos p(x+\xi)]) dp = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-a^2 p^2 t} \cos p(x - \xi) dp + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{p^2 - h^2}{p^2 + h^2} e^{-a^2 p^2 t} \cos p(x + \xi) dp + \frac{2h}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-a^2 p^2 t}}{p^2 + h^2} p \sin p(x + \xi) dp = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-a^2 p^2 t} \cos p(x - \xi) dp + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-a^2 p^2 t} \cos p(x + \xi) dp - \\
 &\quad - \frac{2h^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-a^2 p^2 t}}{p^2 + h^2} \cos p(x + \xi) dp + \frac{2h}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-a^2 p^2 t}}{p^2 + h^2} p \sin p(x + \xi) dp.
 \end{aligned}$$

Известно, что [5]

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-a^2 p^2 t} \cos pzd p = \frac{1}{2a\sqrt{\pi \cdot t}} e^{-\frac{z^2}{4a^2 t}}; \\
 I_2 &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-\beta p^2}}{p^2 + h^2} \cos pzd p = \frac{\sqrt{\pi}}{4h\sqrt{\beta}} \int_0^{\infty} e^{-h\eta} \left( e^{\frac{-(z-\eta)^2}{4\beta}} + e^{\frac{-(z+\eta)^2}{4\beta}} \right) d\eta; \\
 I_3 &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-\beta p^2}}{p^2 + h^2} p \sin pzd p = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\beta}} \int_0^{\infty} e^{-h\eta} \left( e^{\frac{-(z-\eta)^2}{4\beta}} - e^{\frac{-(z+\eta)^2}{4\beta}} \right) d\eta; \\
 \Rightarrow F(x, t, \xi) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi \cdot t}} \left( e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{\frac{-(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right) - \frac{2h^2}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4ah\sqrt{t}} \int_0^{\infty} e^{-h\eta} \left( e^{\frac{-(x+\xi-\eta)^2}{4a^2 t}} + e^{\frac{-(x+\xi+\eta)^2}{4a^2 t}} \right) d\eta + \\
 &\quad + \frac{2h}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{t}} \int_0^{\infty} e^{-h\eta} \left( e^{\frac{-(x+\xi-\eta)^2}{4a^2 t}} - e^{\frac{-(x+\xi+\eta)^2}{4a^2 t}} \right) d\eta = \\
 &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi \cdot t}} \left( e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{\frac{-(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right) - \frac{h}{a\sqrt{\pi \cdot t}} \int_0^{\infty} e^{-h\eta} \frac{(x+\xi+\eta)^2}{4a^2 t} d\eta = \\
 &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi \cdot t}} \left( e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{\frac{-(x+\xi)^2}{4a^2 t}} - 2h \int_0^{\infty} e^{-h\eta} \frac{(x+\xi+\eta)^2}{4a^2 t} d\eta \right). \\
 \Rightarrow J_1 &= \int_0^{\infty} \varphi(\xi) F(x, t, \xi) d\xi = \frac{1}{2a\sqrt{\pi \cdot t}} \int_0^{\infty} \varphi(\xi) \left( e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{\frac{-(x+\xi)^2}{4a^2 t}} - 2h \int_0^{\infty} e^{-h\eta} \frac{(x+\xi+\eta)^2}{4a^2 t} d\eta \right) d\xi.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_2 &= \frac{2a^2}{\pi} \int_0^{\infty} p \left( \int_0^t g(\tau) e^{-a^2 p^2 (t-\tau)} d\tau \right) \frac{p \cos px + h \sin px}{p^2 + h^2} dp = \\
 &= a^2 \int_0^t g(\tau) \left( \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-a^2 p^2 (t-\tau)} \frac{p^2 \cos px + hp \sin px}{p^2 + h^2} dp \right) d\tau = a^2 \int_0^t g(\tau) R(x, t, \tau) d\tau,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 R(x, t, \tau) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-a^2 p^2 (t-\tau)} \frac{(p^2 + h^2) \cos px - h^2 \cos px + hp \sin px}{p^2 + h^2} dp = \\
 &= \frac{2}{\pi} \left( \int_0^{\infty} e^{-a^2 p^2 (t-\tau)} \cos pxdp - h^2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-a^2 p^2 (t-\tau)}}{p^2 + h^2} \cos pxdp + h \int_0^{\infty} \frac{e^{-a^2 p^2 (t-\tau)}}{p^2 + h^2} p \sin pxdp \right).
 \end{aligned}$$

Используя значения интегралов  $I_1, I_2, I_3$ , получим:

$$R(x, t, \tau) = \frac{2}{\pi} \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t-\tau}} e^{\frac{-x^2}{4a^2(t-\tau)}} - h^2 \frac{\sqrt{\pi}}{4ah\sqrt{t-\tau}} \int_0^\infty e^{-h\eta} \left( e^{\frac{-(x-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{\frac{-(x+\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right) d\eta + \right. \\ \left. + h \frac{\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{t-\tau}} \int_0^\infty e^{-h\eta} \left( e^{\frac{-(x-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{\frac{-(x+\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right) d\eta \right) = \frac{1}{a\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{\frac{-x^2}{4a^2(t-\tau)}} - \frac{h}{a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int_0^\infty e^{-h\eta - \frac{(x+\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\eta.$$

$$h\eta + \frac{(x+\eta)^2}{4a^2(t-\tau)} = \frac{(\eta+x+2a^2h(t-\tau))^2 - 4a^4h^2(t-\tau)^2 - 4a^2hx(t-\tau)}{4a^2(t-\tau)} =$$

$$= \left( \frac{\eta+x+2a^2h(t-\tau)}{2a\sqrt{t-\tau}} \right)^2 - (a^2h^2(t-\tau) + hx), \Rightarrow$$

$$I_4 = \int_0^\infty e^{-h\eta - \frac{(x+\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\eta = e^{hx+a^2h^2(t-\tau)} \int_0^\infty e^{-\left( \frac{\eta+x+2a^2h(t-\tau)}{2a\sqrt{t-\tau}} \right)^2} d\eta;$$

$$\beta = \frac{\eta+x+2a^2h(t-\tau)}{2a\sqrt{t-\tau}} \Rightarrow I_4 = 2a\sqrt{t-\tau} \cdot e^{hx+a^2h^2(t-\tau)} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}} + ah\sqrt{t-\tau}}^\infty e^{-\beta^2} d\beta.$$

$$\Rightarrow R(x, t, \tau) = \frac{1}{a\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{\frac{-x^2}{4a^2(t-\tau)}} - \frac{h}{a\sqrt{\pi(t-\tau)}} 2a\sqrt{t-\tau} \cdot e^{hx+a^2h^2(t-\tau)} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}} + ah\sqrt{t-\tau}}^\infty e^{-\beta^2} d\beta =$$

$$= \frac{1}{a\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{\frac{-x^2}{4a^2(t-\tau)}} - \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{hx+a^2h^2(t-\tau)} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}} + ah\sqrt{t-\tau}}^\infty e^{-\beta^2} d\beta.$$

$$\Rightarrow J_2 = a^2 \int_0^t g(\tau) R(x, t, \tau) d\tau = a^2 \int_0^t g(\tau) \left( \frac{1}{a\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{\frac{-x^2}{4a^2(t-\tau)}} - \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{hx+a^2h^2(t-\tau)} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}} + ah\sqrt{t-\tau}}^\infty e^{-\beta^2} d\beta \right) d\tau =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{g(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \cdot e^{\frac{-x^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau - \frac{2a^2h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{hx} \int_0^t g(\tau) \cdot e^{a^2h^2(t-\tau)} \cdot \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}} + ah\sqrt{t-\tau}}^\infty e^{-\beta^2} d\beta \cdot d\tau =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{g(t-\tau)}{\sqrt{\tau}} \cdot e^{\frac{-x^2}{4a^2\tau}} d\tau - \frac{2a^2h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{hx} \int_0^t g(t-\tau) \cdot e^{a^2h^2\tau} \cdot \int_{\frac{x}{2a\sqrt{\tau}} + ah\sqrt{\tau}}^\infty e^{-\beta^2} d\beta \cdot d\tau.$$

$$u(x, t) = J_1 - J_2 \Rightarrow$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi} \cdot t} \int_0^\infty \varphi(\xi) \left( e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2t}} + e^{\frac{-(x+\xi)^2}{4a^2t}} - 2h \int_0^\infty e^{-h\eta} \frac{(x+\xi+\eta)^2}{4a^2t} d\eta \right) d\xi - \\ - \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{g(t-\tau)}{\sqrt{\tau}} \cdot e^{\frac{-x^2}{4a^2\tau}} d\tau + \frac{2a^2h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{hx} \int_0^t g(t-\tau) \cdot e^{a^2h^2\tau} \cdot \int_{\frac{x}{2a\sqrt{\tau}} + ah\sqrt{\tau}}^\infty e^{-\beta^2} d\beta \cdot d\tau.$$

В результате найдена функция  $u(x, t)$ , характеризующая температурное поле, если краевая задача, описывающая данный процесс, определена полностью.

Определим закон движения полуограниченной струны при наличии внешней силы, если к концу струны приложена сила и заданы начальная форма струны и начальное распределение скоростей

струны. Предположим, что смещения струны лежат в одной плоскости  $(x, u)$ . Функция  $u(x, t)$ , характеризующая смещение струны в точке  $x$  в момент  $t$ , должна удовлетворять краевой задаче

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad x > 0, \quad t > 0; \\ u_x(0, t) &= v(t), \quad t > 0; \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad x > 0. \end{aligned}$$

Как указано выше, при граничном условии второго рода целесообразно использовать косинус-преобразование Фурье. В решении подобных задач возникают трудности, связанные со свойствами  $\delta$ -функции Дирака, преодоление которых и демонстрируется в данных вычислениях.

Применяя преобразование Фурье к исходной задаче

$$U_p(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} u(x, t) \cos px dx,$$

получим дифференциальную задачу в изображениях

$$\begin{aligned} U_p''(t) + a^2 p^2 U_p(t) &= F_p(t) - a^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} v(t); \\ U_p(0) &= \Phi_p, \quad U_p'(0) = G_p, \end{aligned}$$

где

$$F_p(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} f(x, t) \cos px dx, \quad \Phi_p = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} \varphi(x) \cos px dx, \quad G_p = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} g(x) \cos px dx.$$

Найдем общее решение дифференциального уравнения задачи в изображениях

$$U_p(t) = C_1(p, t) \cos apt + C_2(p, t) \sin apt;$$

$$\begin{cases} C_1(p, t) = -\frac{1}{ap} \int_0^t \left[ F_p(\tau) - a^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} v(\tau) \right] \sin apt d\tau + C_1(p); \\ C_2(p, t) = \frac{1}{ap} \int_0^t \left[ F_p(\tau) - a^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} v(\tau) \right] \cos apt d\tau + C_2(p); \end{cases}$$

$$U_p(t) = C_1(p) \cos apt + C_2(p) \sin apt + \frac{1}{ap} \int_0^t F_p(\tau) \sin ap(t - \tau) d\tau - \frac{a}{p} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^t v(\tau) \sin ap(t - \tau) d\tau,$$

и с учетом начальных условий решение задачи в изображениях примет вид

$$U_p(t) = \Phi_p \cos apt + \frac{1}{ap} G_p \sin apt + \frac{1}{ap} \int_0^t F_p(\tau) \sin ap(t - \tau) d\tau - \frac{a}{p} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^t v(\tau) \sin ap(t - \tau) d\tau.$$

Для нахождения оригинала используем обратное преобразование Фурье

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} U_p(t) \cos px dp;$$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} \Phi_p \cos apt \cos px dp + \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} G_p \frac{\sin apt \cos px}{p} dp + \\ &+ \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t d\tau \int_0^{\infty} F_p(\tau) \frac{\sin ap(t - \tau) \cos px}{p} dp - \frac{2a}{\pi} \cdot \int_0^t v(\tau) d\tau \int_0^{\infty} \frac{\sin ap(t - \tau) \cos px}{p} dp; \end{aligned}$$

$$u(x, t) = I_1 + \frac{1}{a} (I_1 + I_2) - a \cdot I_4;$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} \Phi_p \cos apt \cos px dp = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} \Phi_p (\cos p(x + at) + \cos p(x - at)) dp = \\ &= \frac{1}{2} [\phi(x + at) + \phi(|x - at|)]. \end{aligned}$$

$$\frac{2 \sin apt \cos px}{p} = \begin{cases} \frac{\sin pz}{p} \Big|_0^{x+at}, & x \geq at, \\ \frac{\sin pz}{p} \Big|_0^{x+at} + \frac{\sin pz}{p} \Big|_0^{at-x}, & x < at \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \int_0^{x+at} \cos pzd z - \int_0^{x-at} \cos pzd z, & x \geq at, \\ \int_0^{x+at} \cos pzd z + \int_0^{at-x} \cos pzd z, & x < at \end{cases} = \int_0^{x+at} \cos pzd z - \text{sign}(x-at) \int_0^{|x-at|} \cos pzd z ;$$

$$\Rightarrow I_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^\infty G_p \frac{\sin apt \cos px}{p} dp = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty G_p dp \left( \int_0^{x+at} \cos pzd z - \text{sign}(x-at) \int_0^{|x-at|} \cos pzd z \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left( \int_0^{x+at} \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty G_p \cos pzd p \right) dz - \text{sign}(x-at) \int_0^{|x-at|} \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty G_p \cos pzd p \right) dz \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left( \int_0^{x+at} g(z) dz - \text{sign}(x-at) \int_0^{|x-at|} g(z) dz \right) ;$$

$$I_3 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t d\tau \cdot \int_0^\infty F_p(\tau) \frac{\sin ap(t-\tau) \cos px}{p} dp =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t d\tau \int_0^\infty F_p(\tau) dp \left( \int_0^{x+a(t-\tau)} \cos pzd z - \text{sign}(x-a(t-\tau)) \int_0^{|x-a(t-\tau)|} \cos pzd z \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \left( \int_0^{x+a(t-\tau)} f(z, \tau) dz - \text{sign}(x-a(t-\tau)) \int_0^{|x-a(t-\tau)|} f(z, \tau) dz \right) .$$

$$I_4 = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^t v(\tau) d\tau \int_0^\infty \frac{\sin ap(t-\tau) \cos px}{p} dp .$$

$$\frac{2 \sin ap(t-\tau) \cos px}{p} = \begin{cases} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \cos pzd z, & x \geq a(t-\tau); \\ \int_0^{x+a(t-\tau)} \cos pzd z + \int_0^{a(t-\tau)-x} \cos pzd z, & x < a(t-\tau). \end{cases}$$

При  $x \geq a(t-\tau)$

$$I_4 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^t v(\tau) d\tau \int_0^\infty \left( \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \cos pzd z \right) dp = \int_0^t v(\tau) d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \left( \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos pzd p \right) dz =$$

$$= \int_0^t v(\tau) d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \delta(z) dz = \int_0^t v(\tau) d\tau \int_{-a(t-\tau)}^{a(t-\tau)} \delta(x-s) ds =$$

$$= \int_{-at}^0 \left( \int_0^{t+\frac{s}{a}} v(\tau) d\tau \right) \delta(x-s) ds + \int_0^{at} \left( \int_0^{t-\frac{s}{a}} v(\tau) d\tau \right) \delta(x-s) ds .$$

Так как в первом интеграле последнего соотношения  $-at \leq s \leq 0$ , то  $\delta(x-s) \equiv 0$  при  $x > 0$  [5],  $\Rightarrow$

$$I_4 = \int_0^{at} \left( \int_0^{t-\frac{s}{a}} v(\tau) d\tau \right) \delta(x-s) ds.$$

Учитывая свойства  $\delta$ -функции, имеем:

$$\int_0^{at} \mu\left(t - \frac{s}{a}\right) \delta(x-s) ds = \begin{cases} 0, & t < \frac{x}{a}; \\ \mu\left(t - \frac{x}{a}\right), & t > \frac{x}{a}, \end{cases}$$

и принимая во внимание, что

$$\mu\left(t - \frac{s}{a}\right) = \int_0^{t-\frac{s}{a}} v(\tau) d\tau,$$

получим

$$I_4 = \int_0^{at} \left( \int_0^{t-\frac{s}{a}} v(\tau) d\tau \right) \delta(x-s) ds = \begin{cases} 0, & x > at; \\ \int_0^{t-\frac{x}{a}} v(\tau) d\tau, & x < at. \end{cases}$$

Функция  $v(t)$  определена при  $t > 0$ , следовательно, в последнем интеграле  $t - \frac{x}{a} > 0$ , откуда следует  $x < at$ , а случай  $x > at$  не имеет места, поэтому

$$I_4 = \int_0^{at} \left( \int_0^{t-\frac{s}{a}} v(\tau) d\tau \right) \delta(x-s) ds = \int_0^{t-\frac{x}{a}} v(\tau) d\tau. \quad (7)$$

При  $x < a(t - \tau)$

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^t v(\tau) d\tau \int_0^{\infty} \left( \int_0^{x+a(t-\tau)} \cos pzd z + \int_0^{a(t-\tau)-x} \cos pzd z \right) dp = \\ &= \int_0^t v(\tau) d\tau \left\{ \int_0^{x+a(t-\tau)} \left( \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos pzd p \right) dz + \int_0^{a(t-\tau)-x} \left( \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos pzd p \right) dz \right\} = \\ &= \int_0^t v(\tau) d\tau \left\{ \int_0^{x+a(t-\tau)} \delta(z) dz + \int_0^{a(t-\tau)-x} \delta(z) dz \right\} = \int_0^t v(\tau) d\tau \int_{-a(t-\tau)}^{a(t-\tau)} \delta(x-s) ds. \end{aligned}$$

Далее все выкладки при вычислении  $I_4$  аналогичны.

Заметим, что случай  $x < a(t - \tau)$  можно не вычислять, так как при  $\tau > 0$   $x < a(t - \tau) < at$ , т.е. сразу получаем (7). Итак,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= I_1 + \frac{1}{a}(I_1 + I_2) - a \cdot I_4; \\ u(x,t) &= \frac{1}{2} [\varphi(x+at) + \varphi(|x-at|)] + \frac{1}{2a} \left( \int_0^{x+at} g(z) dz - \text{sign}(x-at) \int_0^{|x-at|} g(z) dz \right) + \\ &+ \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \left( \int_0^{x+a(t-\tau)} f(z, \tau) dz - \text{sign}(x-a(t-\tau)) \int_0^{|x-a(t-\tau)|} f(z, \tau) dz \right) - a \int_0^{t-\frac{x}{a}} v(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Таким образом, определена функция  $u(x, t)$ , характеризующая закон движения струны, если известно уравнение процесса и заданы дополнительные условия, полностью определяющие краевую задачу.

### References

1. *Ditkin V.A., Prudnikov A.P.* Integral transformations and the operational calculation. — М.: Science, 1974. — 542 p.
2. *Galicin A.S., Jukovsky A.N.* Integral transformations and special functions in problems of heat conduction. — Kiev: Nauk. dumka, 1976. — 282 p.
3. *Volkov I.K., Kanatnikov A.N.* Integral transformations and the operational calculation. — М.: The moskery of MSTU named N.A. Bauman, 2002. — 225 p.
4. *Lenyuk M.P.* Integral transformations with divided variables (Fourier, Henkel). — Kiev: IM AS USSR, 1983. — 60 p.
5. *Budak B.M., Samarsky A.A., Tihonov A.H.* The collected problems for mathematical physics. — М.: Science, 1972. — 687 p.

УДК 517.51

## Применение z-преобразования к исследованию одного разностного уравнения

### The application of z-transformation to the research of one difference equation

Есенбаева Г.А.

*Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова*

Мақалада z-түрлендіру мен оның қасиеттері, берілген шарттары мен бір айырымдық теңдеуі қарастырылған, сондай-ақ теңдеудің ерекшеліктері, z-түрлендіруді қолдана отырып, табылған шешімі зерттелген.

In the given article the qualitative properties of z-transformation, the one difference equation with the given conditions, his basic properties and also the solution of study difference equation with the application of z-transformation have been investigated.

В приложениях часто вместо функции времени  $f(t)$  задается последовательность значений  $f_n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ), измеренных через определенные промежутки времени, например, в моменты времени  $t = 0, 1, \dots$ . Задачи, возникающие в связи с исследованием последовательностей, могут решаться либо применением преобразования Лапласа к соответствующим ступенчатым функциям, либо более кратким путем, посредством дискретного преобразования Лапласа самих последовательностей. Однако вычисления становятся еще более простыми, если использовать  $z$ -преобразование [1].

$z$ -преобразование переводит последовательность-оригинал  $f_n$  в изображение  $F(z)$ , которое является функцией комплексного переменного, посредством следующего соотношения [2]:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} \equiv z\{f_n\}.$$

Известно, что ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$  сходится вне некоторого круга комплексной плоскости, т.е. при  $|z| > R \geq 0$ . Необходимым и достаточным условием существования такого круга (т.е. чтобы его радиус  $R$  не был равен бесконечности) является существование двух таких положительных постоянных  $K$  и  $k$ , что  $|f_n| < K \cdot k^n$ . Изображение  $F(z)$  представляет собой при  $|z| > R$ , включая  $z = \infty$ , аналитическую функцию, поэтому все ее особенности лежат внутри круга  $|z| \leq R$  [1].