Настоящая работа поддержана Министерством образования и науки Республики Казахстан (грант АР 08855726)

Список использованной литературы

1. Iskakova N.B., Temesheva S.M., Abildayeva A.D.On the conditions of solvability of a nonlinear boundary value problem for a system of differential equations with a delay argument // Kazakh Mathematical Journal. – 2020. –Vol. 20, №4. –P.59-74.

РАЗРЕШИМОСТЬ И СУЩЕСТВОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ОПЕРАТОРОМ ГЕРАСИМОВА-КАПУТО

[1]**Исломов Б.И.**, [2]**Ахмадов И.А.**
[1,2]*Национальный Университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан*
E-mail: islomovbozor@yandex.ru[1], ahmadov.ilhom@mail.ru[2]

С семидесятых годов *XX* века интенсивно изучаются краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром. Первые существенные научные результаты по спектральной теории уравнений смешанного типа получены Т.Ш.Кальменовым, Е.И.Моисеевым,С.М.Пономаревым.Дальнейшее развитие этой теории связано с именами учёныхВ.А. Ильина,Н.Ю.Капустина,М.С.Салахитдинова и А.К.Уринова, М.А.Садыбекова.

Эффективные методы исследования некоторых задач спектральной теории для не самосопряженных краевых задач были созданы Д. Биркгофом, Я.Д. Тамаркиным, Т. Карлеманом, М.В. Келдышем, В.А. Ильиным.

Отметим, что наши результаты статьи связаны с работами работы Н.Ю.КапустинаиЕ.И.Моисеева[1],Н.Ю.Капустина[2], К.Б Сабитова [3], М.А. Садыбекова,Г.Д. Тойжанова [4]и А.С. Бердышева[5].

Приведенная ниже задача, которую мы решим, связана с решением спектральной задачи для параболической части уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с оператором Герасимова-Капуто, никем не исследованным.

В настоящей статье изучается разрешимость и существование собственных значений краевой задачи для смешанного параболо-гиперболического уравнения с оператором Герасимова-Капуто.

Пусть $\Omega \in R^2$-конечная область, ограниченная при $y>0$ отрезками AA_0, A_0B_0, B_0B, $A=(0,0)$, $A_0=(0,1)$, $B_0=(1,1)$, $B=(1,0)$, а при $y<0$ гладкой кривой AC: $y=-\gamma(x),\ 0\le x\le l,$ $0.5\le l\le 1,\ \gamma(0)=0,\ l+\gamma(l)=1,$ расположенной внутри характеристического треугольника: $0\le x+y\le x-y\le l,$ характеристикой BC: $y=x-1$ уравнения

$$Lu=\begin{Bmatrix} {}_C D_{0x}^{\alpha}u-u_{yy}, & y\ge 0 \\ u_{xx}-u_{yy}, & y<0 \end{Bmatrix}=f(x;y), \tag{1}$$

где ${}_c D_{\sigma x}^{\alpha}[\cdot]$ – оператор дробного порядка α в смысле Герасимова-Капуто [4]:

$$ {}_c D_{\sigma x}^{\alpha} g(x)=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sgn}(x-\sigma)}{\Gamma(1-\alpha)}\displaystyle\int_{\sigma}^{x}|x-t|^{-\alpha}g'(t)dt, & 0<\alpha<1, \\ g'(x), & \alpha=1. \end{cases} \tag{2}$$

Относительно $\gamma(x)$ будем предполагать, что она принадлежит классу $C^1[0,l]$ и такая, $x-\gamma(x)$ монотонно возрастает.

Задача M_α**.** Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям,

$$u|_{AA_0\cup A_0B_0}=0, \tag{3}$$

$$(u_x + u_y)\big|_{AC \cup BC} = 0. \tag{4}$$

Через $W_2^l(\Omega) = H^l(\Omega)$ обозначим пространство С. Л. Соболева с нормой $\|\cdot\|_l$, $W_2^0(\Omega) = L_2(\Omega)$; $L_2[0,1]$ - пространство квадратично суммируемых функций на $[0,1]$, $\Omega_0 = \Omega \cap \{y > 0\}$, $\Omega_1 = \Omega \cap \{y < 0\}$.

Определение 1. Классическим решением задачи M_α назовем функциюиз класса $\mathrm{P}_1 = \left\{u(x,y):\ u(x,y) \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C_y^2(\Omega_0) \cap C_{x,y}^{2,2}(\Omega_1)\right\}$, удовлетворяющую краевым условиям (1), (3) и (4) задачи M_α и обращающую уравнение (1) в тождество.

Определение 2. Функцию $u \in L_2(\Omega)$ назовем *сильным решением задачи* M_α, если существует последовательность функций $\{u_n(x)\}$, $u_n \in P_1$, удовлетворяющих краевым условиям (3), (4) задачи M_α, такая, что последовательности u_n и Lu_n сходятся в $L_2(\Omega)$ к функциям u и f соответственно. ($\|u_n - u\|_0 \to 0$, $\|Lu_n - f\|_0 \to 0$ при $n \to \infty$.)

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Для любой $f \in L_2(\Omega)$ существует единственное сильное решение и задачи M_α. Это решение принадлежит классу $P_2 = \left\{u(x,y):\ u(x,y) \in W_2^1(\Omega) \cap W_{2x,y}^{1,2}(\Omega_1) \cap C(\bar{\Omega})\right\}$, удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_1 \le C\|f\|_0 \tag{5}$$

и может быт представлено в виде

$$u(x,y) = \iint_\Omega K(x,y;x_1,y_1) f(x_1,y_1)\,dx_1 dy_1, \tag{6}$$

где $K(x,y;x_1,y_1) \in L_2(\Omega \times \Omega)$.

Теореме 2. Пусть $\gamma \not\equiv 0$. Тогда существует $\lambda \in C$ такое, что уравнение $Lu = \lambda u$ имеет нетривиальное решение $u \in P_1$.

Список использованной литературы

1. Н.Ю.Капустин., Е.И.Моисеев. О спектральных задачах со спектральным параметром в граничном условии. //Дифференциальные уравнения. 1997.Т.33. №1. С.115-119.
2. Н.Ю.Капустин. О классической задаче с комплекснозначным коэффициентом и спектральным параметром в граничном условии. //Дифференциальные уравнения.2012.Т.48. №10. С. 1361-1367.
3. К. Б. Сабитов, К теории уравнений смешанного параболо- гиперболического типа со спектральным параметром,// Дифференциальные уравнения. 1989.Т.25.№ 1. С. 117–126.
4. М. А. Садыбеков, Г. Д. Тойжанова, Спектральные свойства одного класса краевых задач для параболо-гиперболического уравнения.// Дифференциальные уравнения. 1992.Т.28.№ 1. С. 176–179.
5. Бердышев А.С. Краевые задачи и их спектральные свойства для уравнения смешанного параболо-гиперболического и смешанного-составного типов. Алматы. 2015.224 с.
6. А.В. Псху. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука. 2005. 199 с.
7. B. I. IslomovandI. A. Akhmadov. ANonlocal Boundary Value Problem with the Frankl Condition for an Equation of Mixed Parabolic-Hyperbolic Type with the Fractional Gerasimov–Caputo Operator.//LobachevskiiJournalofMathematics.2022.Vol. 43.№. 3.pp. 1508–1514. DOI: 10.1134/S1995080222060129.