УДК 519.865.63

Д.Д.Каминский, М.М.Букенов

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: jam_666@mail.ru)

Асимптотические оценки для задачи о кручении бруса

В статье получены и обоснованы двусторонние оценки для задачи о кручении бруса. Для получения этих оценок использовался метод фиктивных областей. Приближенные решения получены с использованием степенных рядов по малым параметрам. Для получения двусторонних оценок использовалась экстраполяция Ричардсона. Полученные двухсторонние оценки позволяют заключить в полосу шириной 2ε и дают возможность приближения к точному решению как сверху, так и снизу.

Ключевые слова: кручение, изотропный цилиндрический брус, метод фиктивных областей, задача трансмиссии, абсолютная сходимость, ряд.

Рассмотрим задачу о кручении изотропного цилиндрического бруса:

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = -2;\ \ x \in D \subset R^2;$$

$$u\big|_{\gamma} = 0;\ \ \gamma = \partial D, \tag{1}$$

где $\mu > 0$ — константа Ламе [1]. В качестве области D выберем круг единичного радиуса с центром в начале координат. Тогда

$$u = \frac{\mu}{2}\left(1 - r^2\right),\ r^2 = x_1^2 + x_2^2.$$

Сформулируем вспомогательную задачу метода фиктивных областей для (1)

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\right) = -2;\ \ x \in D;$$

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{Q}{\varepsilon\mu}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\right) = 0;\ \ x \in D_1; \tag{2}$$

$$u_\varepsilon\big|_{\Gamma} = 0;\ \ u_\varepsilon\big|_{\gamma^+} = u_\varepsilon\big|_{\gamma^-};\ \ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial N}\bigg|_{\gamma^+} = \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial N}\bigg|_{\gamma^-},$$

где $\Gamma = \partial D_0 = D \bigcup D_1$, значения γ^+ и γ^- означают стремление нормали к границе γ изнутри и извне; $\dfrac{\partial u}{\partial N}$ — производная по нормали.

В качестве области D_0 в задаче (2) выберем круг радиуса два с центром в начале координат. Полагая Q = 1, получим следующее решение (2):

$$u_\varepsilon^+ = \frac{\mu}{2}\left(1 - r^2\right) + \mu\varepsilon\ln 2,\ r \le 1;$$

$$u_\varepsilon^+ = \mu\varepsilon\ln\left(\frac{2}{r}\right),\ 1 \le r < 2.$$

В случае Q = –1

$$u_\varepsilon^- = \frac{\mu}{2}\left(1 - r^2\right) - \mu\varepsilon\ln 2,\ r \le 1;$$

$$u_\varepsilon^- = -\mu\varepsilon\ln\left(\frac{2}{r}\right),\ 1 \le r < 2.$$

Рассмотрим степенные функциональные ряды

$$S_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k V_k,\ x \in D;$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k y_k ,\ x \in D_1 , \tag{3}$$

определенные в областях D и D_1, членами которых являются решения системы задач

$$\begin{cases} Av_0 = -f, x \in D; \\ v_0\big|_\gamma = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta^2 y_1}{\partial x^2} = 0, x \in D_1; \\ \left.\dfrac{\partial y_1}{\partial N}\right|_\gamma = \dfrac{Q}{\varepsilon} \left.\dfrac{\partial V_0}{\partial N}\right|_\gamma , y_1\big|_\Gamma = 0; \end{cases} \tag{4}$$

для $k \ge 1$

$$\begin{cases} Av_k = 0, x \in D; \\ v_k\big|_\gamma = y_k\big|_\gamma ; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta^2 y_{k+1}}{\partial x^2} = 0, x \in D_1; \\ \left.\dfrac{\partial y_{k+1}}{\partial N}\right|_\gamma = \dfrac{Q}{\varepsilon} \left.\dfrac{\partial V_k}{\partial N}\right|_\gamma , y_{k+1}\big|_\Gamma = 0, \end{cases}$$

где $Au = \sum_{i=1}^{2} \dfrac{\partial}{\partial x_i} \left(\dfrac{1}{\mu} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \right)$.

Функции V_k, $k = 0,1,2\ldots$, определены в области D, а функции y_k, $k = 1,2\ldots$, — во вспомогательной области D_1. Данная система является системой задач трансмиссии. Нахождение неизвестных V_k, y_k осуществляется в следующем порядке: сначала определяется V_0 в D, затем, с учетом условий согласования V_0 и y_1, на γ находится решение y_1 в области D_1. По найденному y_1 можно определить решение V_1 в области D и т.д. Заметим, что при сделанных предположениях все задачи из системы (4) разрешены и их решения единственны в W_2^1, так что $V_k \in W_2^1(D), y_k \in W_2^1(D_1)$.

Выясним условия, при которых ряды S_1 и S_2, определенные равенством (3), сходятся к решению задачи (2).

Теорема 1. Существует ε_0 такое, что для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ряды S_1, S_2 (3) абсолютно сходятся в $W_2^1(D)$, $W_2^1(D_1)$ соответственно и имеют место равенства

$$u_\varepsilon = S_1, x \in D ;\ u_\varepsilon = S_2, x \in D_1 , \tag{5}$$

где u_ε — решение (2).

Доказательство. Для доказательства абсолютной сходимости рядов воспользуемся оценками неоднородных граничных задач [2]. Используя однородные оценки решений и следов функций, а также условия согласования на γ, находим, что

$$\|y_k\|_{W_2^1(D_1)} \le C_1 C_2 \|v_{k-1}\|_{W_2^1(D)} . \tag{6}$$

Оценка (6) показывает сходимость ряда S_2 в $W_2^1(D_1)$ при условии сходимости S_1 в норме пространства $W_2^1(D)$. Для доказательства сходимости ряда S_1 поступаем аналогично:

$$\|v_k\|_{W_2^1(D)} \le C_3 \|v_{k-1}\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\gamma)} \le C_3 C_4 \|y_k\|_{W_2^1(D)} ;$$

$$C_5 = C_4 C_3 C_2 ,\ k \ge 1;$$

$$\|v_0\|_{W_2^1(D)} \le C_1 \|f\|_{L_2(D)} . \tag{6'}$$

В силу признака Даламбера при $\varepsilon < \varepsilon_0 = C_5^{-1}$ получаем абсолютную сходимость ряда S_1 в $W_2^1(D)$, а из (6) и ряда S_2 в $W_2^1(D_1)$. Из полноты пространства W_2^1 следует, что $S_1 \in W_2^1(D), S_2 \in W_2^1(D_1)$. Умножая уравнения относительно V_k, y_k из системы (4) на ε^k и суммируя по всем k, приходим к задаче

$$AS_1 = -f, x \in D; \ \Delta S_2 = 0, x \in D_1;$$

$$S_1\big|_\gamma = S_2\big|_\gamma; \ \frac{Q}{\varepsilon}\frac{\partial S_2}{\partial N}\bigg|_\gamma = \frac{\partial S_1}{\partial N}\bigg|_\gamma; \ S_2\big|_\Gamma = 0,$$

совпадающей, как нетрудно проверить, с (2). Тем самым имеют место равенства (5). Для доказательства теоремы 1 осталось проверить законность операций

$$\lim_{n\to\infty} AS_1^n = A\lim_{n\to\infty} S_1^n = AS_1 = -f; \ \lim_{n\to\infty}\Delta S_2^n = \Delta\lim_{n\to\infty} S_2^n = \Delta S_2 = 0, \qquad (7)$$

которыми мы воспользовались при формальном суммировании членов Av_k, Δy_k. Здесь через S_1^n и S_2^n обозначены частичные суммы рядов S_1, S_2. Из теории операторов следует ограниченность операторов A, Δ, действующих из $W_2^1(D)$ в $L_2(D)$ и из $W_2^1(D_1)$ в $L_2(D_1)$ соответственно. В силу ограниченности A, Δ и перечисленных свойств следует равенство $AS_1 = -f$; $\Delta S_2 = 0$ и законность операций (7) для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Из теоремы следует оценка близости

$$\|u - u_\varepsilon\|_{W_2^1(D)} \le C_7\varepsilon\|f\|_{L_2(D)}. \qquad (8)$$

Для этого достаточно сравнить u-решение (1) с S_1 в области D. В силу построения *u* совпадает с первым членом разложения V_0 по степеням малого параметра ε, поэтому

$$S_1 - u = \varepsilon\varphi.$$

При условии $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ряд $\varphi = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k V_{k+1}$ абсолютно сходится в $W_2^1(D)$ и вместе с оценкой (6') влечет за собой (8). Ясно, что при $V_1 \ne 0$ полученная оценка неулучшаемая по ε.

Замечание 2. Из теоремы следует однозначная разрешимость вспомогательной задачи (2) для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

Множитель Q, введенный при коэффициенте ε^{-1}, играет специальную роль. Смысл заключается в том, чтобы наряду с u_ε^+ - решением (2), Q=1, рассмотреть другое решение u_ε^- той же задачи (2), но с Q=-1. На основании теоремы 1 имеют место следующие разложения:

$$u_\varepsilon^+ = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k V_k^+, x \in D; \ u_\varepsilon^+ = \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k y_k^+, x \in D_1. \qquad (9)$$

Здесь V_k^+, y_k^+ означают решения из системы (4), в которой параметр Q принимает значение, равное единице. По этой же причине для u_ε^- справедливы разложения

$$u_\varepsilon^- = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k V_k^-, x \in D, \ u_\varepsilon^- = \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k y_k^-, x \in D_1, \qquad (10)$$

в которых через V_k^-, y_k^- обозначены решения (4) с Q=-1. Покажем, что V_k^+ и V_k^- связаны между собой соотношениями

$$V_k^+ = V_k^-, \ k \text{ — четное}; \ V_k^+ = -V_k^-, \ k \text{ — нечетное}. \qquad (11)$$

Для этого рассмотрим $\tilde{y}_1 = y_1^+ + y_1^-$, которое является решением задачи

$$\Delta\tilde{y}_1 = 0, x \in D_1;$$

$$\tilde{y}_1\big|_\Gamma = 0, \ \frac{\partial\tilde{y}_1}{\partial N}\bigg|_\gamma = 0.$$

Очевидно, что $\tilde{y}_1 = 0$, поэтому $y_1^+ = -y_1^-$. Далее обозначим $\tilde{V}_1 = V_1^+ + V_1^-$. Тогда $\tilde{V}_1$ — решение задачи

$$A V_1 = 0, x \in D;$$
$$\left. \tilde{V}_1 \right|_\gamma = 0. \qquad (12)$$

Из (12) следует $\tilde{V}_1 = 0$ и равенство $V_1^+ = -V_1^-$. Продолжая подобные рассуждения, приходим к (11).

При k=0 очевидно, что $V_0^+ \equiv V_0^- \equiv u$, где u — решение (1). С учетом (11) перепишем разложения (9), (10) в области D в следующем виде:

$$u_\varepsilon^+ = u + \varepsilon v_1^+ + \varepsilon^2 v_2^+ + \ldots$$
$$u_\varepsilon^- = u - \varepsilon v_1^+ + \varepsilon^2 v_2^+ - \ldots \qquad (13)$$

Используя полученное представление (13) и оценку (6), находим, что при всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

$$\left\| u - \frac{1}{2}\left(u_\varepsilon^+ + u_\varepsilon^-\right) \right\|_{W_2^1(D)} \le C_8 \varepsilon^2 \left\| f \right\|^2_{L_2(D)}.$$

Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 2. Для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ справедлива оценка

$$\left\| u - \frac{1}{2}\left(u_\varepsilon^+ + u_\varepsilon^-\right) \right\|_{W_2^1(D)} \le C_8 \varepsilon^2 \left\| f \right\|_{L_2(D)}, \qquad (14)$$

где u — решение (1); u_ε^+, u_ε^- — решения (2), соответствующие выбору Q=1 и Q=-1. Тогда для всех $x \in D$ и $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ имеет место асимптотическое поточечное двустороннее неравенство

$$O(\varepsilon^2) + \min\left\langle u_\varepsilon^+(x), u_\varepsilon^-(x) \right\rangle \le u(x) \le \max\left\langle u_\varepsilon^+(x), u_\varepsilon^-(x) \right\rangle + O(\varepsilon^2). \qquad (15)$$

Доказательство этих утверждений непосредственно следует из предыдущих рассуждений. Точность получаемых двусторонних приближений ограничена оценкой (15).

Для того чтобы получить двусторонние оценки решения $u(x)$ с заданной точностью ε^S, применим идею экстраполяции Ричардсона. Построим экстраполированные решения $V_S^\pm$, являющиеся линейной комбинацией $u_{S_k}^\pm$, с некоторыми весами

$$V_S^+ = \sum_{k=1}^{s} \gamma_k u_{\varepsilon_k}^+; \;\; V_S^- = \sum_{k=1}^{s} \gamma_k u_{\varepsilon_k}^-; \;\; x \in D. \qquad (16)$$

Корректный вид коэффициентов γ_k зависит от выбора последовательности $\varepsilon > \varepsilon_1 > \ldots > \varepsilon_S > 0$ и показателя точности S.

Наиболее распространенным является выбор

$$\varepsilon_k = \frac{\varepsilon}{k}, \text{ k=1, 2, …, S},$$

при котором коэффициенты γ_k находятся в явной форме

$$\gamma_k = \frac{(-1)^{s-k} k^s}{k!(s-k)!}, \text{ k=1, 2, …, S},$$

и удовлетворяют условиям $\sum_{k=1}^{s} \gamma_k = 1$; $\sum_{k=1}^{s} \frac{\gamma_k}{k^j} = 1$, j=1, 2, …, S-1. При таком способе задания ε_k, γ_k находим, что

$$V_S^+ = \sum_{k=1}^{s} \gamma_k u_{\varepsilon_k}^+ = \sum_{k=1}^{s} \gamma_k u + \sum_{k=1}^{S-1} \sum_{j=1}^{S} \gamma_k \left(\frac{\varepsilon}{j}\right)^k V_k^+ + \sum_{k=1}^{S} \gamma_k \left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^S V_S^+ + O\left(\varepsilon^{S+1}\right) =$$
$$= u \sum_{k=1}^{S} \gamma_k + \sum_{k=1}^{S-1} \varepsilon^k V_k^+ + \sum_{j=1}^{S} \gamma_j \left(\frac{1}{j}\right)^k + \varepsilon^S V_S^+ + \sum_{j=1}^{S} \gamma_j \left(\frac{1}{j}\right)^S + O\left(\varepsilon^{S+1}\right) = u + C_{10} \varepsilon^S V_S^+ + O\left(\varepsilon^{S+1}\right),$$

где $C_{10} = \sum_{j=1}^{S} \gamma_j \left(\frac{1}{j}\right)^S$. Совершенно аналогично $V_S^- = u + C_{10}\varepsilon^S V_S^- + O\left(\varepsilon^{S+1}\right)$. Пусть S — нечетное, тогда $V_S^+ = -V_S^- u$, значит,

$$V_S^+ = u + C_{10}\varepsilon^S V_S^+ + O\left(\varepsilon^{S+1}\right);\ V_S^- = u - C_{10}\varepsilon^S V_S^- + O\left(\varepsilon^{S+1}\right).$$

С помощью этого представления доказывается теорема 3.

Теорема 3. Пусть $f \in C\left(\overline{D}\right)$; u — решение (1); u_ε^+, u_ε^- — решения (2), соответствующие выбору Q = 1, Q = –1. Тогда для всех $x \in D$ и $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ имеют место асимптотическое поточное двустороннее неравенство

$$O(\varepsilon^{S+1}) + \min\left\langle V_\varepsilon^+(x), V_\varepsilon^-(x)\right\rangle \le u(x) \le \max\left\langle V_\varepsilon^+(x), V_\varepsilon^-(x)\right\rangle + O(\varepsilon^{S+1})$$

и оценки близости

$$\max_{x\in \overline{D}}\left|u(x) - V_S^{\pm}(x)\right| \le C_{11}\varepsilon^2,\ \max_{x\in \overline{D}}\left|u(x) - \frac{1}{2}V_S^+(x) + V_S^-(x)\right| \le C_{12}\varepsilon^{S+1},$$

где S — нечетное; V_S^+, V_S^- определяется по формулам (16).

References

1 *Konovalov A.N.* The method of fictitious domains in the torsion problem // Numerical Methods of Continuum Mechanics. — Novosibirsk, 1973. — Vol. 4. — № 2. — P. 109–116.

2 *Bukenov M.M.* Small parameters in the algorithms for elasticity problems. — Novosibirsk, 1986. — 124 p.

Д.Д.Каминский, М.М.Букенов

Брусты бұрмалау есебінің асимптотикалық бағалары

Брусты бұрмалау есебі үшін фиктивті облыстар әдісімен екі жақты бағалар келтірілген және негізделген. Жуық шешімінің дәрежелік қатарға жеткілікті аз параметрі бойынша жіктелу параметрі қолданылады. Екі жақты бағаларды алу үшін Ричардсонның экстраполяциясы қолданылған. Алынған екі жақты бағалар арқылы қойылған есептің дәл шешімнің ені 2ε жолаққа бекітеді және осы бағалардың көмегімен дәл шешімді жоғарыдан да, төменнен де жуықтауға болады.

D.D.Kaminsky, M.M.Bukenov

Asymptotic bounds for the problem of torsion beam

The bilateral estimations for a problem about bar torsion are received and proved in this article. The method of fictitious areas was used for reception of these estimations. The approached decisions are received with use of power series on small parameters. In order to receive bilateral estimations it was used Richardson's extrapolation. The received bilateral estimations allow to conclude in a strip in width 2ε also gives the chance of approach to the exact decision both from above, and from below.