

М.Б.Муратбеков, С.Ж.Игисинов

Таразский государственный педагогический институт
(E-mail: musahan_m@mail.ru)**О замыкаемости и об ограниченной обратимости дифференциального оператора смешанного типа в неограниченной области**

В статье рассмотрен один класс сингулярного дифференциального оператора смешанного типа в неограниченной области. Первоначально показана замыкаемость данного оператора, так как в данном случае не существует априорной оценки, как в случае с оператором, коэффициенты которого при слагаемых $u_x(x, y)$ и $u(x, y)$ зависят только от переменной y . Доказано существование резольвенты рассматриваемого оператора в неограниченной области. В работе использованы методы локализации и теории линейных операторов.

Ключевые слова: оператор смешанного типа, замыкание, резольвента, ограниченная обратимость, обратный оператор, неограниченная область, полоса, покрытие, ядро, сопряженный оператор, преобразование Фурье.

Часть 2. Доказательства основных теорем

Для доказательства основных теорем, кроме вспомогательных лемм, приведенных в части I [1], нами будут использованы следующие утверждения:

Лемма 5. Пусть выполнены условия $i)$ – $iii)$. Тогда существует такое покрытие:

$$a) \sum_{\{j\}} \varphi_j^2 \equiv 1, \varphi_j \in C_0^\infty(\Delta_j), \cup_j \Delta_j = R;$$

$$b) \|D_x^\alpha \varphi_j\|_{C(R)} \leq \frac{c}{b^\alpha d_x^\alpha}, \quad b > 0, d_x > 0; \quad \alpha = 0, 1, 2;$$

$c)$ каждое множество Δ_j может пересекаться не более чем ξ множествами из семейства $\{\Delta_j\}_{j \geq 1}$.

Замечание. Отметим, что, пользуясь условиями $i)$ – $iii)$, можно построить систему функций $\{\varphi_j(\cdot)\}_{j=-\infty}^{j=\infty}$, что соответствующая ей система носителей имеет не более чем трехкратное пересечение, т.е. любая точка $x \in R$ может принадлежать не более чем трем отрезкам из системы отрезков $\{\sup p \varphi_j(\cdot)\}$. Данное условие в дальнейшем считается выполненным.

Определим оператор

$$Kf = \sum_{\{j\}} \varphi_j L_j^{-1} \varphi_j f, \quad f(x, y) \in C_0^\infty(\bar{\Omega}).$$

Непосредственно можно проверить, что оператор K ограниченный и допускает замыкание в $L_2(\Omega)$ и $Kf \subseteq D(L)$.

Действуя на Kf оператором L , имеем, что

$$LKf = f + Af + Bf, \quad f(x, y) \in C_0^\infty(\bar{\Omega}),$$

где

$$Af = \sum_{\{j\}} \varphi_j (a(x) - a(x_j)) (L_j^{-1} \varphi_j f)_x + \sum_{\{j\}} \varphi_j (c(x) - c(x_j)) L_j^{-1} \varphi_j f; \quad (14)$$

$$Bf = \sum_{\{j\}} \varphi_{j_x} a(x) L_j^{-1} \varphi_j f + \sum_{\{j\}} \varphi_{j_{xx}} L_j^{-1} \varphi_j f + 2 \sum_{\{j\}} \varphi_{j_x} (L_j^{-1} \varphi_j f)_x, \quad (15)$$

т.е. справедлива следующая

Лемма 6. Пусть выполнены условия $i)$ – $iii)$. Тогда для любой функции $f \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$ справедливо равенство

$$LKf = [E + A + B]f, \quad (16)$$

где операторы A, B определяются по формулам (14)–(15).

Лемма 7. Пусть $a(x), c(x) \in K(\tau, b)$. Тогда найдутся числа τ_0 и b_0 , что при некоторых $\tau \in (0, \tau_0)$ и $b > b_0$ операторы A и B ограничены и для них справедливо неравенство

$$\|A + B\|_{2 \rightarrow 2} < 1.$$

Лемма 8. Пусть выполнены условия леммы 7. Тогда

$$L_{np}^{-1} = K[E + A + B]^{-1}, \quad (17)$$

где L_{np}^{-1} — правый обратный оператор оператора L .

Доказательство леммы 8. Пользуясь леммой 7 и равенством (16), приходим к представлению (17).

Доказательство леммы 7. Оценим норму оператора A в пространстве $L_2(\Omega)$. Для этого будем оценивать каждое слагаемое отдельно. Рассмотрим оценку нормы первого слагаемого равенства (14). Согласно утверждению 2 и замечанию леммы 5 имеем

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{\{j\}} \varphi_j(a(x) - a(x_j)) D_x L_j^{-1} \varphi_j f \right\|_2^2 \leq \\ & \leq 12 \sum_{\{j\}} \left\| \varphi_j(a(x) - a(x_j)) D_x L_j^{-1} \varphi_j f \right\|_2^2 \leq 12 \sup_{\{j\}} \sup_{x \in \Delta_j} \frac{|a(x) - a(x_j)|^2}{|a(x_j)|^2} \|f\|_2^2. \end{aligned}$$

Здесь учитывалось, что $\sum_{\{j\}} \|\varphi_j f\|_2^2 = \|f\|_2^2$. Из последнего неравенства вытекает, что

$$\left\| \sum_{\{j\}} \varphi_j(a(x) - a(x_j)) D_x L_j^{-1} \varphi_j f \right\|_2^2 \leq 12 \sup_{\{j\}} \sup_{x \in \Delta_j} \frac{|a(x) - a(x_j)|^2}{|a(x_j)|^2} \|f\|_2^2. \quad (18)$$

Теперь оценим норму второго слагаемого. Учитывая утверждение 2 и повторяя выкладки, использованные при доказательстве неравенства (18), можно убедиться, что

$$\left\| \sum_{\{j\}} \varphi_j(c(x) - c(x_j)) L_j^{-1} \varphi_j f(x, y) \right\|_2^2 \leq 12 \sup_{\{j\}} \sup_{x \in \Delta_j} \frac{|c(x) - c(x_j)|^2}{c^2(x_j)} \|f(x, y)\|_2^2. \quad (19)$$

Из неравенств (18) и (19), учитывая условия $i) - iii)$, окончательно находим:

$$\|A\|_{2 \rightarrow 2}^2 \leq 24c_2(\tau + \tau^2) \leq c_3(\tau + \tau^2), \quad c_3 = 24c_1, \quad c_2 = c_2(c_0, c_1). \quad (20)$$

Для справедливости леммы 7 возьмем $\tau_0 = c_3(\tau + \tau^2) < \frac{1}{2}$.

Теперь оценим норму оператора B . Рассмотрим первое слагаемое. Согласно лемме 5 и утверждению 2 имеем

$$\left\| \sum_{\{j\}} \varphi_{j_x} a(x) L_j^{-1} \varphi_j f(x, y) \right\|_2^2 \leq 12 \sum_{\{j\}} \sup_{x \in \Delta_j} \frac{c^2 |a(x)|^2}{b^2 d_j^2} \|L_j^{-1}\|_2^2 \|\varphi_j f\|_2^2,$$

где $c > 0$ — постоянное число из леммы 5.

Отсюда, в силу (11) и учитывая условия $i) - iii)$, получаем, что

$$\left\| \sum_{\{j\}} \varphi_{j_x} a(x) L_j^{-1} \varphi_j f(x, y) \right\|_2^2 \leq 12 \sup_{\{j\}} \sup_{x \in \Delta_j} \frac{c^2 |a(x)|^2}{b^2 d_j^2 \cdot (c(x_j))^2} \|f(x, y)\|_2^2 \leq \frac{c_4(\tau + 1)}{b^2}, \quad (21)$$

где $c_4 = c_4(c, c_0, c_1)$.

Теперь рассмотрим норму второго слагаемого оператора B , т.е.

$$\left\| \sum_{\{j\}} \varphi_{j_{xx}} L_j^{-1} \varphi_j f(x, y) \right\|_2^2 \leq 12 \sup_{\{j\}} \sup_{x \in \Delta_j} \frac{c^4}{b^4 d_j^4 (c(x_j))^2} \|f\|_2^2.$$

Отсюда, пользуясь условиями $i) - iii)$, находим, что

$$\left\| \sum_{\{j\}} \varphi_{j_{xx}} L_j^{-1} \varphi_j f \right\|_2^2 \leq \frac{c_5}{b^4} \|f\|_2^2, \tag{22}$$

где $c_5 = c^4$, c — постоянное число из леммы 5.

Для третьего слагаемого оператора B , непосредственно вычисляя, получаем, что

$$\left\| 2 \sum_{\{j\}} \varphi_{j_x} D_x L^{-1} \varphi_j f \right\|_2^2 \leq 24 \sup_{\{j\}} \sup_{x \in \Delta_j} \frac{c^2}{b^2 d_j^2 |a(x_j)|^2} \|f\|_2^2 \leq \frac{c_6}{b^2} \|f\|_2^2, \tag{23}$$

где $c_6 = c_6(c, c_0, c_1)$.

Из оценок (21)–(23) следует, что

$$\|B\|_2^2 \leq \left(\frac{c_4(\tau+1)}{b^2} + \frac{c_5}{b^4} + \frac{c_6}{b^2} \right) \leq c_7 \left(\frac{\tau+1}{b^2} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{b^2} \right), \tag{24}$$

где $c_7 = \max\{c_4, c_5, c_6\}$.

Для справедливости леммы 7 теперь надо взять b таким образом, чтобы $\|B\|_{2 \rightarrow 2} < \frac{1}{2}$.

Далее положим, что

$$\begin{aligned} \tilde{a}(x) &= \sum_{\{j\}} a(x_j) \varphi_j^2, \quad \tilde{c}(x) = \sum_{\{j\}} c(x_j) \varphi_j^2; \\ \tilde{L}u &= k(y)u_{xx} - u_{yy} + \tilde{a}(x)u_x + \tilde{c}(x)u, \quad u \in C_0^\infty(\bar{\Omega}); \\ \tilde{L}'u &= k(y)u_{xx} - u_{yy} - \tilde{a}(x)u_x + \tilde{c}(x)u - (\tilde{a}(x))'_x u, \quad u \in C_0^\infty(\bar{\Omega}), \end{aligned}$$

где \tilde{L}' — формально сопряженный оператор. Заметим, что на функциях $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$ выполняется равенство

$$\langle \tilde{L}u, v \rangle = \langle u, \tilde{L}'v \rangle,$$

где $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$ — множество бесконечно дифференцируемых финитных функций.

Операторы \tilde{L} и \tilde{L}' допускают замыкание в пространстве $L_2(\Omega)$, и замыкания этих операторов соответственно также обозначим через \tilde{L} и \tilde{L}' .

Введем оператор

$$M^\# f = \sum_{\{j\}} \varphi_j L_j^{-1} \varphi_j f, \quad f(x, y) \in C_0^\infty(\bar{\Omega}),$$

где L_j^{-1} — оператор, обратный к оператору L_j .

$$L_j' u = k(y)u_{xx} - u_{yy} - a(x_j)u_x + c(x_j)u, \quad u \in D(L_j').$$

Лемма 9. Пусть выполнены условия $i) - iii)$. Тогда для любой функции $f(x, y) \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$ справедливо равенство

$$\tilde{L}Kf = [E + A_1 + B_1]f; \tag{25}$$

$$\tilde{L}'M^\# f = [E + A_2 + B_2]f, \tag{26}$$

где

$$\begin{aligned}
 Kf &= \sum_{\{j\}} \varphi_j L_j^{-1} \varphi_j f; \\
 A_1 f &= \sum_{\{j\}} \varphi_j (\tilde{a}(x) - a(x_j)) [L_j^{-1} \varphi_j f]_x + \sum_{\{j\}} \varphi_j (\tilde{c}(x) - c(x_j)) L_j^{-1} \varphi_j f; \\
 B_1 f &= \sum_{\{j\}} \varphi_{jx} \tilde{a}(x) L_j^{-1} \varphi_j f + \sum_{\{j\}} \varphi_{jxx} L_j^{-1} \varphi_j f + 2 \sum_{\{j\}} \varphi_{jx} [L_j^{-1} \varphi_j f]_x; \\
 A_2 f &= \sum_{\{j\}} \varphi_j (a(x_j) - \tilde{a}(x)) [L_j^{-1} \varphi_j f]_x + \sum_{\{j\}} \varphi_j (\tilde{c}(x) - c(x_j)) L_j^{-1} \varphi_j f; \\
 B_2 f &= \sum_{\{j\}} \tilde{a}(x) \varphi_{jx} L_j^{-1} \varphi_j f - \sum_{\{j\}} \varphi_j (\tilde{a}(x))_x L_j^{-1} \varphi_j f.
 \end{aligned}$$

Здесь учтено, что $\varphi_{jyy} = 0, \varphi_{jy} = 0$.

Доказательство. Лемма 9 доказывается точно так же, как лемма 6.

Лемма 10. Пусть $a(x), c(x) \in K(\tau, b)$. Тогда найдутся числа τ_0 и b_0 , что при $\tau \in (0, \tau_0)$ и $b > b_0$, операторы $A_i + B_i, i = 1, 2$, ограничены, и для них справедливы неравенства

$$\|A_i + B_i\|_{2 \rightarrow 2} < \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2.$$

Лемма 11. Пусть выполнены условия леммы 10. Тогда справедливы равенства

$$\tilde{L}_{np}^{-1} = K[E + A_1 + B_1]^{-1}; \tag{27}$$

$$\tilde{L}'_{np}{}^{-1} = M^* [E + A_2 + B_2]^{-1}, \tag{28}$$

где $\tilde{L}_{np}^{-1}, \tilde{L}'_{np}{}^{-1}$ — правые обратные операторы соответственно к операторам \tilde{L}, \tilde{L}' .

Доказательство леммы 10. Оценим норму оператора A_1 в L_2 . Для этого будем оценивать каждое слагаемое отдельно. Используя замечание к лемме 5 и воспользовавшись тем, что на Δ_j количество φ_j , отличных от нуля, не больше трех, имеем

$$\left\| \sum_{\{j\}} \varphi_j (\tilde{a}(x) - a(x_j)) D_x L_j^{-1} \varphi_j f \right\|_2^2 \leq 12 \sum_{\{j\}} \sup_{x \in \Delta_j} |\tilde{a}(x) - a(x_j)|^2 \|D_x L_j^{-1}\|_2^2 \cdot \|\varphi_j f\|_2^2. \tag{29}$$

Согласно лемме 5 $\sum_{j=1}^{j+1} \varphi_j^2 \equiv 1, x \in \bar{\Delta}_j$. С учетом этого и условий *i)-iii)* имеем

$$|\tilde{a}(x) - a(x_j)| \leq c \sqrt{2\tau(\tau+1)} a(x_j). \tag{30}$$

Здесь учитывалось, что

$$\frac{1}{2(\tau+1)} \leq \frac{c(x)}{c(t)} \leq 2(\tau+1) \quad \text{при } |x-t| \leq bd(t). \tag{31}$$

Из неравенства (29) с помощью неравенств (30), (31) и (3) получаем, что

$$\left\| \sum_{\{j\}} \varphi_j (\tilde{a}(x) - a(x_j)) D_x L_j^{-1} \varphi_j f \right\|_2^2 \leq 12 \frac{c\tau(2+\tau) |a(x_j)|^2}{|a(x_j)|^2} \|f\|_2^2 \leq 12c\tau(2+\tau) \|f\|_2^2, \tag{32}$$

$c > 0$ — постоянное число.

Точно так же, повторяя выкладки и рассуждения, использованные при доказательстве неравенства (32), находим, что

$$\left\| \sum_{\{j\}} \varphi_j (\tilde{c}(x) - c(x_j)) L_j^{-1} \varphi_j f \right\|_2^2 \leq 12c\tau^2(2+\tau) \|f\|_2^2, \tag{33}$$

где $c > 0$ — постоянное число. Из (32)–(33) окончательно получим

$$\|A_1\|_{2 \rightarrow 2}^2 \leq 12c(\tau(2+\tau) + \tau^2(2+\tau)). \quad (34)$$

Оценим норму первого слагаемого оператора B_1 :

$$\left\| \sum_{\{j\}} \varphi_{jx} \tilde{a}(x) L_j^{-1} \varphi_j f \right\|_2^2 \leq 12 \sup_{\{j\}} \left(\sup_{x \in \Delta_j} \frac{c^2 |\tilde{a}(x)|^2}{b^2 d_j^2} \right) \frac{1}{(c(x_j))^2} \|f\|_2^2. \quad (35)$$

С другой стороны, имеем

$$|\tilde{a}(x)| = \left| \sum_{j-1}^{j+1} a(x_j) \varphi_j \right| \leq |a(x_{j-1})| + |a(x_j)| + |a(x_{j+1})| \text{ при } x \in \bar{\Delta}_j.$$

Отсюда, согласно неравенству (31) и условию *ii*), имеем

$$|\tilde{a}(x)| \leq (4\tau + 5) |a(x_j)|. \quad (36)$$

В результате из (33) с помощью (2), (36) получаем, что

$$\left\| \sum_{\{j\}} \varphi_{jx} \tilde{a}(x) L_j^{-1} \varphi_j f \right\|_2^2 \leq \frac{c(4\tau + 5)^2}{b^2}, \quad (37)$$

$c > 0$ — постоянное число.

Далее, пользуясь оценкой (2) и леммой 5, непосредственно вычисляя, имеем:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{\{j\}} \varphi_{jxx} L_j^{-1} \varphi_j f \right\|_2^2 &\leq 12 \sum_{\{j\}} \left\| \varphi_{jxx} L_j^{-1} \varphi_j f \right\|_2^2 \leq \\ &\leq 12 \sup_{\{j\}} \frac{c^4}{b^4 d_j^4} \cdot \frac{1}{(c(x_j))^2} \|f\|_2^2 \leq 12 \frac{c}{b^4} \|f\|_2^2, \end{aligned} \quad (38)$$

$c > 0$ — постоянное число.

Далее, пользуясь утверждением 2, леммой 5 и условиями *i) – iii)*, получим, что

$$\left\| 2 \sum_{\{j\}} \varphi_{jx} D_x L_j^{-1} \varphi_j f \right\|_2^2 \leq 48 \sup_{\{j\}} \frac{c^2}{b^2 d_j^2} \cdot \frac{1}{a^2(x_j)} \|f\|_2^2 \leq \frac{c}{b^2} \|f\|_2^2. \quad (39)$$

Из неравенств (37)–(39) следует

$$\|B_1\|_{2 \rightarrow 2}^2 \leq \frac{c(4\tau + 5)^2}{b^2} + \frac{12c}{b^4} + \frac{c}{b^2}, \quad (40)$$

где $c > 0$ — постоянное число.

Теперь для справедливости леммы 10 выберем τ и b так, чтобы

$$\|A_1 + B_1\|_{2 \rightarrow 2} \leq \|A_1\|_{2 \rightarrow 2} + \|B_1\|_{2 \rightarrow 2} < \frac{1}{2}. \quad (41)$$

Повторяя выкладки и рассуждения, использованные при доказательстве неравенства (41), получим:

$$\|A_2 + B_2\|_{2 \rightarrow 2} < \frac{1}{2}. \quad 2)$$

Лемма 11 доказывается точно так же, как и лемма 8.

Лемма 12. Пусть выполнены условия леммы 10. Тогда справедливо равенство

$$\tilde{L}^{-1} = K[E + A_1 + B_1]^{-1}, \quad (43)$$

где \tilde{L}^{-1} — обратный оператор оператора \tilde{L} .

Доказательство. Для полного доказательства леммы 12 нам остается показать, что $\text{Ker} \tilde{L} = \{0\}$.

Из общей теории операторов известны следующие утверждения:

$$L_2(\Omega) = R(\tilde{L}) + \overset{\circ}{Ker} \tilde{L}^*, \quad L_2(\Omega) = R(\tilde{L}') + \overset{\circ}{Ker} (\tilde{L}')^*.$$

Из равенств (27), (28) следует, что

$$Ker \tilde{L}^* \equiv 0, \quad Ker (\tilde{L}')^* \equiv 0. \quad (44)$$

Так как $D(\tilde{L}) \subseteq D((\tilde{L}')^*)$, то из равенства (44) вытекает, что

$$Ker(\tilde{L}) \equiv \{0\}. \quad (45)$$

Учитывая (45), из (27) имеем

$$\tilde{L}^{-1} = K[E + A_1 + B_1]^{-1}.$$

Лемма 12 доказана.

Лемма 13. Пусть выполнены условия леммы 12. Тогда $Ker K = \{0\}$.

Доказательство. Поскольку $Ker[E + A_1 + B_1] \equiv \{0\}$, то из (43) и (45) следует, что $Ker K = \{0\}$.

Лемма 13 доказана.

Лемма 14. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда оператор L допускает замыкание.

Доказательство. Пусть $u_n \rightarrow 0, Lu_n \rightarrow v$ ($u \in L_2(\Omega), u_n \in C_0^\infty(\bar{\Omega}), n=1,2,\dots$). Из леммы 13 следует, что u_n представима в виде $u_n = Kv_n, v_n \in L_2(\Omega)$, так как $C_0^\infty(\bar{\Omega}) \subset D(\tilde{L}) = R(K)$. Поэтому при $n \rightarrow \infty$ имеем

$$Lu_n = LKv_n = [E + A + B]v_n \rightarrow v,$$

а отсюда

$$v_n \rightarrow [E + A + B]^{-1}v, \quad Kv_n \rightarrow K[E + A + B]^{-1}v.$$

Из того, что $u_n = Kv_n \rightarrow 0$, получаем, что $K[E + A + B]^{-1}v = 0$. Откуда заключаем $v = 0$. Лемма 14 доказана.

Лемма 15. Пусть выполнены условия леммы 12. Тогда $Ker L \equiv \{0\}$.

Доказательство. Пусть $Lu = 0, u \in D(L), u \neq 0$. Тогда для этой функции существует последовательность $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ такая, что

$$u_n \rightarrow u, Lu_n \rightarrow Lu, u_n \in C_0^\infty(\bar{\Omega}) \subset D(L).$$

Теперь, используя представление $u_n = Kv_n, v_n \in L_2(\Omega)$, получим

$$Lu_n = LKv_n = [E + A + B]v_n \rightarrow 0 \quad (46)$$

при $n \rightarrow \infty$. Поскольку $Ker[E + A + B] \equiv 0$, то из (46) следует, что $v_n \rightarrow 0$. Отсюда и из представления $u_n = Kv_n$ получаем, что $u_n \rightarrow 0$. Следовательно, $u = 0$. Лемма 14 доказана.

Доказательства теорем 1 и 2. Доказательства теорем следует из лемм 8, 14 и 15.

Список литературы

1 О замыкаемости и об ограниченной обратимости дифференциального оператора смешанного типа в неограниченной области. Ч.1 // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика. — 2013. — № 1 (69). — С. 28–32.

М.Б.Муратбеков, С.Ж.Игисинов

Аралас типті дифференциалдық оператордың шенелмеген облысында тұйықталуы мен шенелген қайтарымдылығы туралы

Мақалада шенелмеген облыста аралас типті сингулярлы дифференциалдық оператордың бір класы қарастырылған. Алдымен берілген оператордың тұйықталуы көрсетілді. Себебі қарастырылып отырған оператор үшін $u_x(x, y)$ және $u(x, y)$ қосылғыштарының алдындағы коэффициенттер y айнымалысына тәуелді болған жағдайдағыдай априорлы баға орындалмайды. Берілген оператордың шенелмеген облысында резольвентасының бар болатындығы дәлелденген. Жұмыста локализациялау әдісі мен сызықты операторлар теориясының әдістері қолданылды.

M.B.Muratbekov, S.Zh.Iginov

On closability and bounded invertibility of mixed type differential operator in an unbounded domain

In this paper we consider a class of mixed type singular differential operator in an unbounded domain. Initially closability of the operator is proved. Because there is no a priori estimate, which exists in the case of an operator whose coefficients depend only on the variable y in front of terms $u_x(x, y)$ and $u(x, y)$. The existence of the resolvent of the operator in an unbounded domain is proved. The method of localization and methods of the theory of linear operators are used.

References

- 1 *Bull. KSU, ser. Mathematics, 2013, 1 (69), p. 28–32.*

УДК 35В10

Б.Ж.Мухамбетова¹, Ж.А.Сартабанов², А.А.Кульжумиева¹

¹Западно-Казахстанский государственный университет им. М.Утемисова, Уральск;

²Актюбинский региональный государственный университет им. К.Жубанова
(E-mail: abaibotagoz@mail.ru)

Многопериодические решения систем уравнений с одним квазилинейным дифференциальным оператором в частных производных первого порядка

В статье исследованы вопросы о существовании и единственности решения начальной и многопериодической задачи для систем уравнений с квазилинейным дифференциальным оператором, векторные поля у которого являются линейными относительно искомым функций. Система, в частности, в одномерном случае обращается в уравнение Хопфа, которое характеризует распространение волн вдоль оси. Авторами установлены достаточные условия существования и единственности решения начальной задачи для системы и многопериодического решения системы по временным переменным.

Ключевые слова: начальная задача, многопериодическая задача, квазилинейный дифференциальный оператор.

Линейный однородный относительно частных производных по τ, t, ξ дифференциальный оператор

$$D = \frac{\partial}{\partial \tau} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial t_j} + \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k \frac{\partial}{\partial \xi_j} \equiv \frac{\partial}{\partial \tau} + \left\langle e, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle + \left\langle Ax, \frac{\partial}{\partial \xi} \right\rangle;$$

$$\tau \in (-\infty, +\infty) = R, \quad t = (t_1, \dots, t_m) \in R \times \dots \times R = R^m, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_l) \in R \times \dots \times R = R^l;$$