

Решение интегро-дифференциального уравнения движения заряженных частиц на примере мультипольно-цилиндрического поля

Solution of integral differential equation of charged particles motion on the example of multipole cylindrical field

Саулебеков А.О., Асылбекова С.Н., Махабаева А.Т., Турлыбекова Р.С.

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (e-mail: saulebekov@mail.ru)

Мақалада зарядталған бөлшектер шоқтарының энергетикалық спектрін анықтау есебін шешуге практикалық қызығушылық тудыратын электростатикалық гексапольді-цилиндрлік өрістің электронды-оптикалық сипаттамаларын талдау және теориялық есептеу нәтижелері көрсетілген. Интегралдық-дифференциалдық түрде берілген қозғалыс теңдеуін дәрежелік қатар бойынша шешудің аналитикалық әдісі негізінде зарядталған бөлшектер траекториясын есептеу жүргізілді.

In the present work the results of theoretical calculation and analyze of electron-optical characteristics of electrostatic hexapole cylinder field, having the practical significance in solving of energy spectrum determination problems have been given. On a base of the power-series analytical method of solution of the equation of motion presented in integral differential form the trajectories of charged particle are calculated.

1. Введение

За последнее десятилетие в области корпускулярной оптике накопились важные с практической и теоретической точки зрения проблемы. Повысились требования к корпускулярно-оптическим характеристикам и функциональным возможностям систем. Возникла настоятельная необходимость в разработке теоретических методов, которые позволили бы рассчитывать электронные зеркала с различной формой электродов. В связи с появлением новых областей применения систем корпускулярно-лучевой электроники выдвигаются новые требования к скорости сбора информации, к одновременности получения различных данных и т.д. Актуальность работы определяется значительной ролью принципиально новых решений в электронной оптике, на основе которых становится возможной разработка приборов следующих поколений, значительно превосходящих по своим характеристикам имеющиеся.

В настоящей работе исследуется мультипольно-цилиндрическое поле (МЦП). Мультипольный подход синтеза электростатических полей используется достаточно давно, но в основном такие поля использовались как фокусирующие, отклоняющие и корректирующие элементы [1–6] в электронной и ионной оптике [7].

В серии работ [8–10] аксиально-симметричные мультиполю были применены для улучшения электронно-оптических характеристик энергоанализаторов дефлекторного типа с электростатическими и магнитными полями. В работе [11] построен нелапласов круговой мультиполь и рассмотрена принципиальная возможность корректирующего воздействия его на угловую фокусировку электростатического анализатора дефлекторного типа. Автором работы [12] получены формулы, по которым вычисляются круговые мультиполю в цилиндрической системе координат, а потенциальные поля, базирующиеся на сериях круговых мультиполей, изучены в статье [13]. Метод вычисления мультипольно-цилиндрических полей, основанный на решении задачи Дирихле в цилиндрической системе координат (R, ξ) с потенциалом в виде $V \sim \sum_{k=0}^N [A_k \ln R + B_k] R^{2k}$, распределенным в плоскости $\xi=0$, представлен в работе [14].

Приближенно-аналитический метод расчета траекторий заряженных частиц в аксиально-симметричном зеркале с МЦП был предложен в работах [15, 16]. В работе [17] приведены новые классы мультипольных электрических и магнитных полевых структур, на основе которых возможен эффективный синтез новых корпускулярно-оптических элементов.

Основная трудность, возникающая при использовании МЦП в качестве энергоанализующих систем, связана с проблемой аналитического описания траектории движения заряженных частиц в полях неклассического типа и, следовательно, с невозможностью оценки aberrаций, определяющих пре-

дельное разрешение фокусирующей системы. С использованием предложенной математической модели траекторного расчета проведены дальнейшие исследования анализирующих свойств МЦП.

Продолжим исследование осесимметричных лапласовых полей, построенных на основе синтеза гексаполя и цилиндрического поля, начатое в работах [13, 18]. Рассмотрим движение заряженной частицы в гексапольно-цилиндрическом поле (ГЦП), потенциал которого описывается в системе координат r, z следующим выражением:

$$U(r, z) = \mu Lnr + \gamma U_h(r, z), \quad (1)$$

где $U_h(r, z) = \frac{1}{2} \left\{ Lnr \left[z^2 - \frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{2} \right] + \frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{2} \right\}$ — круговой гексаполь; μ и γ — коэффициенты, задающие весовой вклад цилиндрического поля Lnr и кругового гексаполя соответственно.

Схема энергоанализатора с потенциалом, определяемым выражением (1) для весовых вкладов цилиндрического поля $\mu = 2$ и гексаполя $\gamma = 1$, изображена на рисунке 1. Поле формируется в пространстве между двумя осесимметричными коаксиальными электродами, внутренний из которых имеет цилиндрическую форму (радиуса r_0) и находится под потенциалом земли, на внешний электрод, имеющий криволинейный профиль, подается отклоняющий потенциал U_0 .

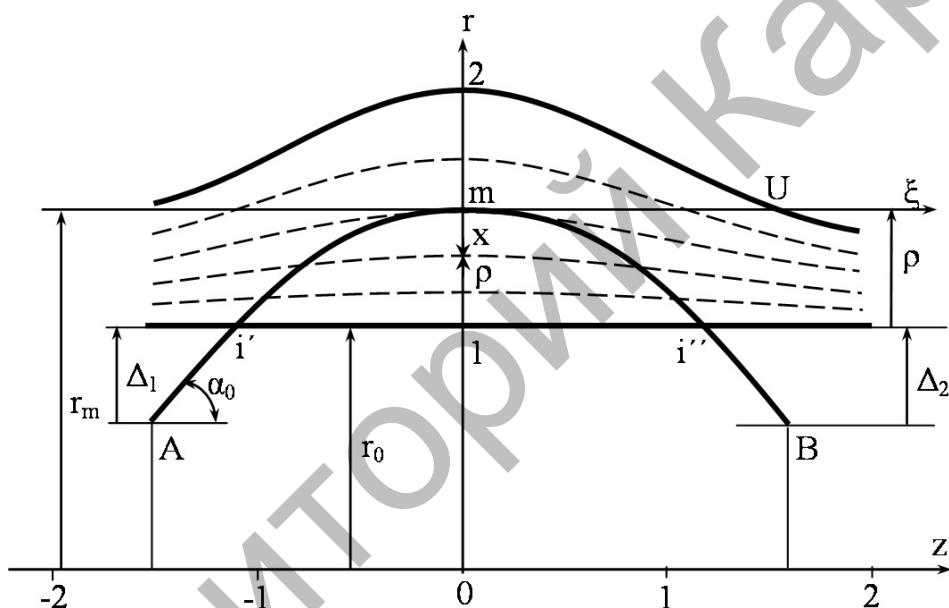


Рис. 1. Схема энергоанализатора на основе ГЦП: А — источник, i' — входная кольцевая щель, i'' — выходная кольцевая щель, В — приемник

Следуя методике работы [19], переводим точку начала отсчета траектории в ее вершину m и в эту же точку размещаем начало координат x, ξ . Все линейные размеры будут выдержаны в долях радиуса внутреннего цилиндрического электрода r_0 :

$$\frac{r}{r_0} = \frac{r_0 + r_0 \rho}{r_0} = 1 + \rho, \quad x = \frac{r_m - r}{r_0} = \rho_m - \rho, \quad \xi = \frac{z}{r_0}. \quad (2)$$

Распределение ГЦП (1) в координатах x, ξ для $\mu = 2$ и $\gamma = 1$ имеет следующий вид:

$$U(x, \xi) = U_0 g(x, \xi) = \frac{U_0}{4} \cdot \left\{ Ln(R-x) \left[2\xi^2 - (R-x)^2 + 7 \right] + (R-x)^2 - 1 \right\}, \dots R = 1 + \rho_m \dots \quad (3)$$

2. Решение интегро-дифференциального уравнения движения заряженных частиц

Исходя из закона сохранения энергии при движении заряженной частицы в статическом потенциальном поле и следуя методике работы [20], можно вывести интегро-дифференциальное уравнение траектории движения заряженной частицы в предложенном ГЦП:

$$(\xi')^2 \left[g_o - g_x + \int_0^x \text{Ln}(R-x) \xi \xi' dx \right] = P^2 \text{Ctg}^2 \alpha_o + f_m - \int_0^x \text{Ln}(R-x) \xi \xi' dx, \quad (4)$$

где $\xi' = \frac{d\xi}{dx}$, $g_o = g(x_m, \xi_m) = \text{Ln}(R) \left[-\frac{R^2}{4} + \frac{7}{4} \right] + \frac{R^2}{4} - \frac{1}{4}$, $g_x = g(x, \xi(x))$, (5)

$$f_m = \int_0^{\rho_m} \frac{\partial g(x, \xi)}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dx} dx = \int_0^{\rho_m} \text{Ln}(R-x) \xi \xi' d\xi \quad (6)$$

и $P_o^2 = \frac{W}{qU} \text{Sin}^2 \alpha_o$ — параметр отражения, связывающий геометрические и энергетические параметры зеркала.

Как и в работах [19, 20], для решения интегро-дифференциального уравнения (4) используем метод разложения решения уравнения ξ в дробно-степенной ряд:

$$\xi = \sqrt{x} \sum_0^n C_n x^n. \quad (7)$$

Радиальную составляющую точки поворота траектории $R=1+\rho_m$, необходимую для расчета ξ , определим из уравнения (4), используя условие $x=\rho_m$. В этом случае

$$(\xi')^2 = \text{Ctg}^2 \alpha_o, \quad g_{x=\rho_m} = 0 \quad \text{и} \quad g_o + f_m = P^2. \quad (8)$$

Подставив (5) в (8), придем к следующему трансцендентному и неявному относительно R уравнению:

$$\text{Ln} R = \frac{4(P^2 - f_m) - R^2 - 1}{7 - R^2}, \quad (9)$$

из которого R можно определить методом последовательных приближений. В качестве нулевого приближения используем параметр цилиндрического зеркального анализатора $R_o = \exp(P^2)$ [21].

Приведем конечные результаты расчета, в котором точность определения ξ ограничивалась величиной $C_6 x^{15/2}$, а значение параметра $\rho_m=R-1$ получено в виде разложения в ряд по величине параметра отражения зеркала P с точностью до 14 порядка включительно. Все расчеты выполнены с помощью программного средства Mathcad Professional.

ρ_m — величина максимального радиального проникновения частицы в отклоняющее поле:

$$\begin{aligned} \rho_m = & 0.5P^2 + 0.125P^4 + (0.03125 - 0.0625 \text{Ctg}^2(\alpha_o))P^6 + (0.01302 - 0.07986 \text{Ctg}^2(\alpha_o))P^8 + \\ & + (0.00638 - 0.06671 \text{Ctg}^2(\alpha_o) + 0.01736 \text{Ctg}^4(\alpha_o))P^{10} + \\ & + (0.00316 - 0.05334 \text{Ctg}^2(\alpha_o) + 0.04371 \text{Ctg}^4(\alpha_o))P^{12} + \\ & + (0.00164 - 0.04207 \text{Ctg}^2(\alpha_o) + 0.06444 \text{Ctg}^4(\alpha_o) - 0.00608 \text{Ctg}^6(\alpha_o))P^{14} + \dots \end{aligned} \quad (10)$$

ξ_m — проекция траектории на ось симметрии зеркала от точки входа траектории в поле до точки поворота траектории m определяется уравнением (11) при условии $x = \rho_m$:

$$\xi_m = \xi(x)_{(x=\rho_m)} = \sqrt{\rho_m} \cdot S, \quad (11)$$

где $C_o = \text{Ctg} \alpha_o$

$$S = \sqrt{2.0P^2 + P^4 + 0.625P^6 + (0.52778 - 0.125 \text{Ctg}^2 \alpha_o)P^8 + (0.39444 - 0.26042 \text{Ctg}^2 \alpha_o)P^{10} + (0.28916 - 0.39505 \text{Ctg}^2 \alpha_o + 0.03472 \text{Ctg}^4 \alpha_o)P^{12} + (0.21427 - 0.49110 \text{Ctg}^2 \alpha_o + 0.12235 \text{Ctg}^4 \alpha_o)P^{14} + \dots} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
S = & 1 - 0.04167P^2 - (0.03073 + 0.02083 \operatorname{Ctg}^2 \alpha_o)P^4 \\
& + (-0.02755 - 0.00920 \operatorname{Ctg}^2 \alpha_o)P^6 + \\
& + (-0.01300 + 0.00390 \operatorname{Ctg}^2 \alpha_o + 0.00412 \operatorname{Ctg}^4 \alpha_o)P^8 + \\
& + (-0.00653 + 0.01381 \operatorname{Ctg}^2 \alpha_o + 0.00638 \operatorname{Ctg}^4 \alpha_o)P^{10} + \\
& + (-0.00423 + 0.01670 \operatorname{Ctg}^2 \alpha_o + 0.00379 \operatorname{Ctg}^4 \alpha_o - 0.00125 \operatorname{Ctg}^6 \alpha_o)P^{12} + \\
& + (-0.00216 + 0.01594 \operatorname{Ctg}^2 \alpha_o - 0.00297 \operatorname{Ctg}^4 \alpha_o - 0.00360 \operatorname{Ctg}^6 \alpha_o)P^{14} + \dots
\end{aligned} \tag{13}$$

В силу симметрии «возвратной» траектории относительно оси r полная проекция траектории на ось симметрии z от источника А до его изображения В есть следующая сумма:

$$l = \frac{L}{r_o} = \Delta \operatorname{Ctg} \alpha_o + 2 * \xi_m, \quad \Delta = \Delta_1 + \Delta_2. \tag{14}$$

3. Результаты расчетов

Для анализа характеристик электростатического гексапольно-цилиндрического энергоанализатора были рассчитаны коэффициенты пространственной фокусировки 1, 2 и 3-го порядков:

$\frac{dl}{d\alpha}$, $\frac{d^2l}{d\alpha^2}$, $\frac{d^3l}{d\alpha^3}$. Найдены условия угловой фокусировки второго порядка $\frac{dl}{d\alpha} = \frac{d^2l}{d\alpha^2} = 0$. Проведен

анализ основных электронно-оптических параметров анализатора, рассчитанных в зависимости от параметра отражения P и удовлетворяющих условиям угловой фокусировки второго порядка: α_o — угол входа траектории; $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$ — величина суммарного удаления источника и его изображения от внутреннего цилиндрического электрода; ρ_m — координата точки поворота траектории; ξ_m — половинная проекция «возвратной» траектории на ось симметрии в поле зеркала; l — фокусное расстояние; $D = \partial l / \partial \varepsilon$ — относительная линейная дисперсия по энергии, определяемая дифференцированием уравнения (12) по $\varepsilon = \frac{\Delta \omega}{\omega}$; $A_{III} = \frac{1}{3!} \frac{d^3l}{d\alpha^3}$ — кубическая угловая aberrация;

$\Delta l = l(\alpha) - l(\alpha_o)$ — абберационное расширение изображения в фокусе зеркала и δ — удельная дисперсия по энергии.

Все расчеты выполнены в пределах значений $0 < P < 1$. Расчеты для $P > 1$ не будут иметь достаточной точности, так как дробно-степенной ряд, используемый для расчета проекции траектории движения частиц ξ , будет расходящимся.

Все расчеты выполнены в пределах значений $0 < P < 1$. Расчеты для $P > 1$ не будут иметь достаточной точности, так как дробно-степенной ряд, используемый для расчета проекции траектории движения частиц ξ , будет расходящимся.

Анализ данных показывает постепенное увеличение электронно-оптических характеристик зеркального энергоанализатора с ростом параметра отражения P . Исключение составляет пространственная кубическая aberrация A_{III} , которая вначале растет до некоторого максимального значения, а затем спадает до минимума при $P > 0.90$. Это ведет к уменьшению величины абберационного расширения изображения $\Delta l = l(\alpha) - l(\alpha_o)$ в этой области значений P . $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$ — величина суммарного удаления источника и его изображения от внутреннего цилиндрического электрода при любых значениях параметра P остается меньше 1. Это значит, что в предложенном зеркальном энергоанализаторе на основе ГЦП реализуется режим угловой фокусировки второго порядка только для схем фокусировки из кольцевого источника в кольцевое изображение.

Если кольцевые щели А и В узкие, а угловая расходимость пучка велика, то мерой разрешающей способности может служить величина удельной дисперсии, равная отношению линейной дисперсии по энергии к ширине линии изображения в фокусе зеркала $\delta = D / |\Delta l|$. Величина удельной дисперсии по энергии, рассчитанная для широких пучков частиц с начальным угловым разбросом в 16° ($\Delta \alpha = \alpha - \alpha_o = \pm 8$), достигает максимума в области минимальной величины абберационного расширения изображения Δl .

В качестве наиболее оптимальной конструкции для энергоанализа выберем вариант схемы фокусировки с минимальной пространственной абберацией: $P=0.9232$, $\alpha_m=43.5506^\circ$, $\rho_m=0.4405$, $z_m=1.1034$, $\Delta=\Delta_1+\Delta_2=0.7800$. Для выбранной схемы анализатора, приведенной на рисунке 1, удельная дисперсия равна $\delta=405.71$, что примерно в 3 раза больше по сравнению с аналогичным гексапольно-цилиндрическим зеркалом с $\mu=5/2$, предложенным в [3], и в 6 раз превышает удельную дисперсию цилиндрического зеркального анализатора, имеющего для лучшей схемы фокусировки «ось-ось» $\delta=65.5$ [21].

Таким образом, предлагаемый зеркальный анализатор на основе ГЦП за счет возможности острой фокусировки широких пучков заряженных частиц имеет значительное преимущество в разрешающей способности по сравнению с существующими аналогичными электронными зеркалами.

References

1. *Harald Rose*. Design of high-performance aberration corrector // VII International Conference on Charged particle optics. — Trinity College, Cambridge, England, 2006. — P. 3.
2. *Konenkamp R., Rempfer G., Word R., Almaraz L. etc.* First results obtained with an aberration-corrected PEEM employing a hyperbolic electron mirror // VII International Conference on Charged particle optics. — Trinity College, Cambridge, England, 2006. — P. 8.
3. *Liu H., Rouse J., Wang L., Munro E.* Software for designing multipole aberration corrector // VII International Conference on Charged particle optics. — Trinity College, Cambridge, England, 2006. — P. 19–20.
4. *Muller H., Uhlemann S., Hartel P., Haider M.* Aberration-Corrected optics from an idea to a device // VII International Conference on Charged particle optics. — Trinity College, Cambridge, England, 2006. — P. 77–78.
5. *Dellby N., Krivanek O.L., Murfitt M.F.* Optimized quadrupole-octupole C3/C5 aberration corrector for STEM // VII International Conference on Charged particle optics. — Trinity College, Cambridge, England, 2006. — P. 79–80.
6. *Baranova L.A., Read F.H., Cubric D.* Computer simulations of hexapole aberration correctors // VII International Conference on Charged particle optics. — Trinity College, Cambridge, England, 2006. — P. 81.
7. *Siladi M.* Electron and ion optics. — M.: 1990. — P. 639.
8. *Zashkvara V.V., Tyndyk N.N.* Electrostatic axially symmetric multipole in deflector-type analyzers // Nuclear Instruments & Methods in Physics Research. Section A. — 1992. — A 313. — P. 315–327.
9. *Zashkvara V.V., Tyndyk N.N.* Axially symmetric multipole in magnetic analyzers // Nuclear Instruments & Methods in Physics Research. Section A. — 1992. — A 321. — P. 439–446.
10. *Zashkvara V.V., Tyndyk N.N.* Two-sector electrostatic deflector based on superposition of cylindrical field and axially symmetric multipoles // Nuclear Instruments & Methods in Physics Research. Section A. — 1993. — A 328. — P. 416–434.
11. *Zashkvara V.V., Tyndyk N.N.* Not Laplace circular multipoles // Journal of Technical Physics. — 1995. — Vol. 65. — No. 7. — P. 154–166.
12. *Zashkvara V.V.* On circular multipole calculations // Nuclear Instruments & Methods in Physics Research. Section A. — 1995. — A 354. — P. 171–174.
13. *Zashkvara V.V., Tyndyk N.N.* Potential fields based on circular multipole series // Nuclear Instruments & Methods in Physics Research. Section A. — 1996. — A 370. — P. 452–460.
14. *Zashkvara V.V., Tyndyk N.N.* The method for the calculation of multipole-cylindrical fields // Nuclear Instruments & Methods in Physics Research. Section A. — 1999. — A 370. — P. 223–231.
15. *Zashkvara V.V., Ashimbaeva B.U., Chokin K.Sh.* Calculation of trajectories in a multipole cylindrical field // Journal of Electron Spectroscopy and Related Phenomena. — 2002. — 122. — P. 195–202.
16. *Zashkvara V.V., Ashimbaeva B.U., Chokin K.Sh., Masyagin B.E.* Calculation the trajectories of charged particles in the electrostatic nonuniform field // Proceedings of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. — 2000. — № 2. — P. 72–78.
17. *Golikov Yu.K., Solovyov K.V.* New analytical representation of the multipole electromagnetic structures // Applied Physics. — 2006. — No. 6. — P. 5–8.
18. *Zashkvara V.V., Tyndyk N.N.* Axisymmetric electrostatic multipoles and their application // Journal of Technical Physics. — 1991. — Vol. 61. — No. 4. — P. 148–157.
19. *Ashimbaeva B.U., Chokin K.Sh., Saulebekov A.O.* Focusing Properties of a mirror analyzer with hexapole cylindrical field // Journal of Electron Spectroscopy and Related Phenomena. — 2005. — 143. — P. 29–32.
20. *Ashimbaeva B.U., Chokin K.Sh. and Saulebekov A.O.* Focusing properties of the electrostatic mirror with hexapole cylindrical field // Applied Physics. — 2008. — No. 2. — P. 74–78.
21. *Zashkvara V.V., Korsunsky M.I., Kosmachev O.C.* The focusing properties of electrostatic mirror with a cylinder field // Journal of Technical Physics. — 1966. — Vol. 36. — No. 1. — P. 132–138.