

## Численное моделирование решения одномерных задач термоупругости при наличии теплового потока, меняющегося по координате линейным и нелинейным законами

Многие элементы конструкций одновременно испытывают воздействия температуры, теплового потока, теплообмена и наружных механических сил с различными амплитудными характеристиками. При таких воздействиях стержневые элементы конструкций могут не выдержать, что приводит к разрушению всей конструкции. Этот вопрос весьма актуален. Статья посвящена построению универсального вычислительного алгоритма, основанного на применении метода конечных элементов. Суть которого – дискретизация нелинейными конечными элементами исследуемой конструкции. Кроме того, определен закон распределения температуры по объему последней, минимизируя который по узловым значениям перемещений, получаем поле упругих, температурных и термоупругих составляющих компонентов деформаций и напряжений.

*Ключевые слова:* теплообмен, алгоритм, закон распределения температуры, деформация.

### Введение

Возьмем стержень с ограничением длины  $L$  (см) постоянным поперечным сечением  $F$  (см<sup>2</sup>), модулем упругости материала стержня  $E$  (кг/см<sup>2</sup>), коэффициентами теплового расширения  $\alpha$  ( $\frac{1}{0C}$ ) и теплопроводности  $K_{xx}$  (Вт/см<sup>0</sup>C). По всей боковой поверхности подведем тепловой поток, меняющийся по координате линейным законом:

$$q(x) = ax + b; 0 \leq x \leq L, \quad (1)$$

$a, b = const$ , (Вт/см<sup>2</sup>). Теплообмен происходит через площади поперечных сечений с окружающими их одинаковыми средами. Здесь коэффициент теплообмена  $h$  (Вт/(см<sup>2</sup>·<sup>0</sup>C)), температура окружающей среды  $T_{OC_i}$  (<sup>0</sup>C) (см. Рис.).

В данной задаче поперечное сечение стержня-круг, радиус которого равен  $r$ , но оно также может быть четырехугольником, многоугольником и т.д. Закон распределения температур представим в виде кривой второго порядка, проходящей через три точки. Тогда, согласно [1 - 3], рассматриваемый стержень – это один конечный элемент с тремя узлами, и закон распределения температуры по длине стержня будет

$$T(x) = \frac{L^2 - 3Lx + 2x^2}{L^2} T_i + \frac{4Lx - 4x^2}{L^2} T_j + \frac{2x^2 - Lx}{L^2} T_k. \quad (2)$$

Здесь  $T_i, T_j, T_k$  - температуры в точках с координатами соответственно  $x = x_i, x = x_j, x = x_k$ . Построим функционал полной тепловой энергии при наличии теплового потока на боковой поверхности стержня (меняющегося по линейному закону) и теплообмена по поперечным сечениям двух концов.

Функционал рассматриваемой задачи будет следующим:

$$Z = \int_V \frac{K_{xx}}{2} \left( \frac{\partial T}{\partial X} \right)^2 dV + \int_{S_{\sigma n}} q(x) T(x) dS + \int_{S_{inc}^i} \frac{h_i}{2} (T - T_{oc})^2 dS + \int_{S_{inc}^k} \frac{h_k}{2} (T - T_{oc})^2 dS, \quad (3)$$

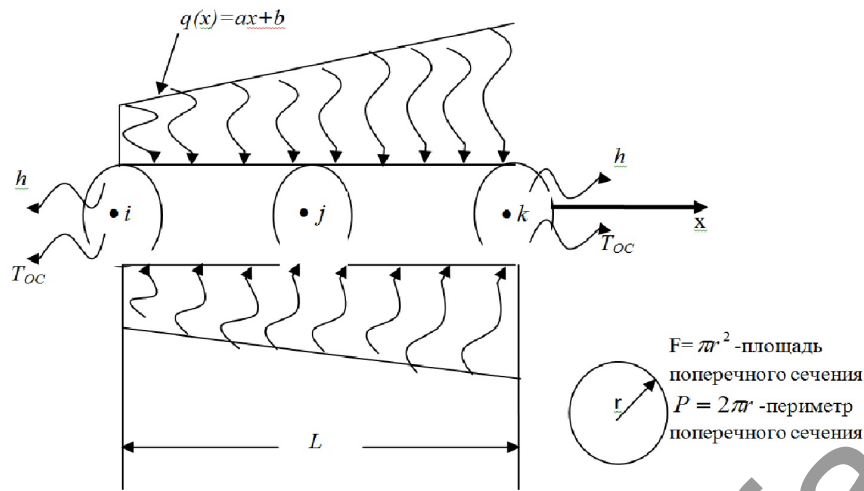


Рисунок. Расчетный рисунок задачи

где  $V$  - объем стержня;  $S_{N\delta n}$  - площадь боковой поверхности стержня;  $S_i = S_k = F$  - площади поперечных концов двух концов стержня.

В выражении (3) каждый интеграл рассмотрим по отдельности. Согласно [4], интеграл первого функционала имеет вид

$$Z_1 = \int_V \frac{K_{xx}}{2} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dV = \frac{FK_{xx}}{6L} (7T_j^2 - 16T_iT_j + 2T_jT_k - 16T_jT_k + 16T_j^2 + 7T_k^2), \quad (4)$$

второго -

$$\begin{aligned} Z_2 &= \int_{S_{nbn}} q(x)T(x)dS = P \int_0^L q(x)T(x)dx = \\ &= P \int_0^L (ax + b) \left( \frac{L^2 - 3Lx + 2x^2}{L^2} \cdot T_i + \frac{4Lx - 4x^2}{L^2} \cdot T_j + \frac{2x^2 - Lx}{L^2} \cdot T_k \right) dx = \\ &= \frac{P}{L^2} \int_0^L [(aL^2x^2 + 3aLx^3 + 2ax^3 + bL^2 - 3bLx + 2bx^2) T_i + (4aLx^2 - 4ax^3 + 4bLx - 4bx^2) T_j + \\ &+ (2aLx^3 - aLx^2 - bLx) T_k] dx = \frac{P}{L^2} \left[ \left( \frac{aL^2x^2}{2} - aLx^3 + \frac{ax^4}{2} + bL^2x - \frac{3bLx^2}{2} + \frac{2bx^3}{3} \right) T_i \right]_0^L + \\ &+ \frac{P}{L^2} \left[ \left( \frac{4aLx^3}{3} - ax^4 + 2bLx^2 - \frac{4bx^3}{3} \right) T_j + \left( \frac{ax^4}{2} - \frac{aLx^3}{3} + \frac{2bx^3}{3} - \frac{bLx^2}{2} \right) T_k \right]_0^L = \\ &= \frac{PL^3}{L^2} \left[ \frac{3aL - 6aL + 3aL + 6b - 9b + 4b}{6} T_i + \frac{4aL - 3aL + 6b - 4b}{3} T_j + \frac{3aL - 2aL + 4b - 3b}{6} T_k \right] = \\ &= PL \left[ \frac{b}{6} T_i + \frac{\alpha L + 2b}{3} T_j + \frac{\alpha L + b}{6} T_k \right], \quad (5) \end{aligned}$$

третьего -

$$Z_3 = \int_{S_{inc}^i} \frac{h_i}{2} (T - T_{OC})^2 dS = \frac{Fh}{2} (T_i - T_{OC})^2 \quad (6)$$

и четвертого -

$$Z_4 = \int_{S_{inc}^k} \frac{h_k}{2} (T - T_{OC})^2 dS = \frac{Fh}{2} (T_k - T_{OC})^2. \quad (7)$$

Зная (4)-(7), интегрированный вид (3) будет следующим:

$$Z = \frac{FK_{xx}}{6L} (7T_i^2 - 16T_iT_j + 2T_iT_k - 16T_jT_k + 16T_j^2 + 2T_k^2) + \frac{PL}{6} [bT_i + (2\alpha L + 4b)T_j + (\alpha L + b)T_k] + \frac{Fh_i}{2} (T_i - T_{OC_i})^2 + \frac{Fh_k}{2} (T_k - T_{OC_k})^2. \quad (8)$$

Минимизируя последний функционал по узловым значениям температуры, имеем систему алгебраических уравнений относительно  $T_i, T_j, T_k$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial Z}{\partial T_j} = 0; \Rightarrow \frac{7FK_{xx} + 3FLh}{3L} T_j - \frac{8FK_{xx}}{3L} T_j + \frac{FK_{xx}}{3L} T_k = FhT_{OC} - \frac{PbL}{6}; \\ \frac{\partial Z}{\partial T_j} = 0; \Rightarrow \frac{8FK_{xx}}{3L} T_i - \frac{16FK_{xx}}{3L} T_j + \frac{8FK_{xx}}{3L} T_k = \frac{PL}{6} (2\alpha L + 4b); \\ \frac{\partial Z}{\partial T_k} = 0; \Rightarrow \frac{FK_{xx}}{3L} T_i - \frac{8FK_{xx}}{3L} T_j + \frac{7FK_{xx} + 3LFh}{3L} T_k = FhT - \frac{PL}{6} (\alpha L + b). \end{cases} \quad (9)$$

Найдя значения  $T_i, T_j, T_k$ , согласно (2), построим распределение поля температур  $T = T(x)$  по длине стержня. Далее решим задачи следующих типов:

1. Один конец стержня жестко зашпелен, другой свободен, тогда под воздействием подведенного теплового потока и теплообмена его удлинение будет

$$\Delta L_T = \int_0^L \alpha T(x) dx. \quad (10)$$

2. При зашпелении обоих концов стержня в нем возникают сжимающее усилие и напряжение. Это статически неопределенная задача. Величина возникающего сжимающего усилия определяется из равенства суммы укорачивания от воздействия сжимающего усилия  $\Delta L_R$  и удлинения возникающего теплового воздействия  $\Delta L_T$  нулю

$$\Delta L_R + \Delta L_T = 0. \quad (11)$$

$\Delta L_R$  определяется по закону Гука:

$$\Delta L_R = \frac{RL}{EF}. \quad (12)$$

Подставляя (10) и (12) в (11), получим

$$\frac{RL}{EF} + \int_0^L \alpha T(x) dx = 0;$$

$$R = -\frac{EF}{L} \int_0^L \alpha T(x) dx. \quad (13)$$

Отсюда определим термоупругое напряжение в жесткозашемленном двумя концами стержне по закону Гука:

$$\sigma = \frac{R}{F} = -\frac{E}{L} \int_0^L \alpha T(x) dx. \quad (14)$$

Рассмотрим пример:

$$a = -20, b = -15, L = 7,5; r = 1; F = \pi r^2; P = 2\pi r; E = 2 \cdot 10^6;$$

$$K_x x = 72; T_{OC} = 40; \alpha = 125 \cdot 10^{-7}.$$

Тепловой поток, изменяющийся по линейному закону, будет равен  $g(x) = -20x - 15$  ( $Bm/cm^2$ ) и решение системы (9) следующее:

$$T_i = 98,57(^{\circ}C), T_j = 121,297(^{\circ}C), T_k = 108,8688(^{\circ}C).$$

Согласно (2) закон распределения поля температур по длине рассматриваемого стержня имеет вид

$$T(x) = \frac{L^2 - 3Lx + 2x^2}{L^2} \cdot 98,57 + \frac{4Lx - 4x^2}{L^2} \cdot 121,297 + \frac{2x^2 - Lx}{L^2} \cdot 108,6888. \quad (15)$$

При первом виде задачи, согласно (10), определим величину удлинения стержня:

$$\begin{aligned} \Delta L_T &= \int_0^L \alpha T(x) dx = \\ &= \frac{\alpha}{L^2} \left[ \left( L^2 x - \frac{3Lx^2}{2} + \frac{2x^3}{3} \right) \cdot 98,57 + \left( 2Lx^2 - \frac{4x^3}{3} \right) \cdot 121,297 + \left( \frac{2x^3}{3} - \frac{Lx^2}{2} \right) \cdot 108,86888 \right] = \\ &= \frac{\alpha L^3}{L^2} \left[ \left( \frac{6-9+4}{6} \right) \cdot 98,57 + \left( \frac{6-4}{3} \right) \cdot 121,297 + \left( \frac{4-3}{6} \right) \cdot 108,86888 \right] = \\ &= 115,4378\alpha L = 0,0108. \end{aligned}$$

При втором типе, согласно (13), величина сжимающего усилия равна

$$R = -\frac{EF}{L} \int_0^L \alpha T(x) dx = -9061,867.$$

Тогда соответственно (14) сжимающееся термонапряжение равно

$$\sigma = \frac{R}{F} = -2885,945.$$

Теперь на боковую поверхность подведем тепловой поток, меняющийся нелинейным (квадратичным) законом:

$$q(x) = ax^2 + bx + c; \quad 0 \leq x \leq L, \quad a, b, c = const. \quad (16)$$

Здесь интегрированный функционал (3) будет равен

$$Z = \frac{FK_{xx}}{6L} (7T_i^2 - 16T_i T_j + 2T_i T_k - 16T_j T_k + 16T_j^2 + 2T_k^2) +$$

$$\begin{aligned}
& + PL \left[ \frac{10c - \alpha L^2}{60} T_i + \frac{3\alpha L^2 + 5bl}{15} T_j + \frac{9\alpha L^2 + 10bL + 10c}{60} T_k \right] + \\
& + \frac{Fh_i}{2} (T_i - T_{OC_i})^2 + \frac{Fh_k}{2} (T_k - T_{OC_k})^2.
\end{aligned} \tag{17}$$

Минимизируем функционал по узловым значениям температур и получим

$$\begin{cases} \frac{\partial Z}{\partial T_i} = 0; \Rightarrow \frac{7FK_{xx} + 3FLh}{3L} T_i - \frac{8FK_{xx}}{3L} T_j + \frac{FK_{xx}}{3L} T_k = FhT_{OC} - \frac{PL}{\pi^3} \left( \frac{10c - \alpha L^2}{60}; \right) \\ \frac{\partial Z}{\partial T_j} = 0; \Rightarrow \frac{8FK_{xx}}{3L} T_i - \frac{16FK_{xx}}{3L} T_j + \frac{8FK_{xx}}{3L} T_k = \frac{PL}{6} \left( \frac{2\alpha L^2 + 5bL + 10c}{15} \right); \\ \frac{\partial Z}{\partial T_k} = 0; \Rightarrow \frac{FK_{xx}}{3L} T_i - \frac{8FK_{xx}}{3L} T_j + \frac{7FK_{xx} + 3LFh}{3L} T_k = \\ = FhT_{OC} - \frac{PL}{6} \left( \frac{9\alpha L^2 + 10bL + 10c}{60} \right). \end{cases} \tag{18}$$

Решив систему, определим  $T_i, T_j, T_k$  и по ним соответственно (2) значение температуры в любой точке стержня. Используя соотношения (10),(13),(14), можно решить задачи двух типов, часто встречающиеся на практике. Например, в рассмотренном выше примере при

$$q(x) = \frac{600}{L^2} x^2 - \frac{600}{L}, \quad T_i = T_k = 115, T_j = 138,$$

и, согласно (2), закон распределения поля температур будет равен

$$T(x) = \frac{L^2 - 3Lx + 2x^2}{L^2} \cdot 115 + \frac{4Lx - 4x^2}{L^2} \cdot 138, 39 + \frac{2x^2 - Lx}{L^2} \cdot 115.$$

При первом типе задачи удлинение стержня составит

$$\Delta L_T = \alpha L \left( \frac{115 + 4 \cdot 138, 39 + 115}{6} \right) = 0, 0122.$$

При втором типе, согласно (13), величина сжимающего усилия  $R = -10251, 576$ , согласно (14), величина термонапряжения  $\sigma = -3264, 83$ . Возникающее здесь напряжение очень большое и выдержать его могут стержни, сделанные из специальных сплавов, иначе конструкции могут разрушиться. В связи с этим задача расчета прочности элементов конструкции с учетом воздействующих источников тепла очень актуальна.

#### Список литературы

- 1 Ноздрев В.Ф. Курс термодинамики. — М.: Просвещение, 1967. — 365 с.
- 2 Зенкович О. Метод конечных элементов в технике. — М.: Мир, 1975. — 541 с.
- 3 Сегелинд Л. Применение метода конечных элементов. — М.: Мир, 1979. — 568 с.
- 4 Кудайкулов А.К., Амиртаев К.Б., Тулеуова Р.У., Токуллиев Б.М., Утебаев У.Б. Установившееся термоупругое состояние, жестко-заделанное двумя концами стержня при нагревании обоих концов // Поиск. — 2007. — № 3. — С. 305–310.

Р.У.Тулеуова

## **Координатасы сызықтық және сызықтық емес заңдар бойынша өзгеретін жылу ағыны берілген жағдайдағы жылусерпінділіктің бір өлшемді есептерінің шешімдерін сандық модельдеу**

Құрылымдардың көптеген элементтері бір мезгілде температура, жылу ағыны, жылу алмасу және әр түрлі амплитудалық сипаттамалары бар сыртқы механикалық күштер әсерінде болады. Құрылымдардың өзек элементтері мұндай әсерлерге шыдамай, түгел құрылымының бұзылуына әкелуі мүмкін. Бұл мәселе - өзектілердің бірі. Мақала шекті элементтер әдісіне негізделген әмбебап есептеу алгоритмін құруға арналған. Жұмыста қарастырылып отырған құрылымды сызықты емес шекті элементтермен дискреттеуге болады. Жылжудың түйіндік мәндеріне сәйкес минималдық нәтижесінде құрылымның көлеміне сәйкес температураның таралу заңы анықталды. Сонымен қатар ақау мен кернеудің серпінді, температуралық және жылу серпінділік құрама компоненттерінің өрістері зерттелді.

R.U.Tuleuova

## **Numerical simulation of one-dimensional problems of thermoelasticity in the presence of heat flux, changing the coordinate linear and non-linear laws**

Many elements of the constructions at the same time experiencing the effects of temperature, heat flow, heat exchange and external mechanical forces different amplitude characteristics. At our impacts of rod elements of constructions cannot sustain that leads to disruption of the entire structure. This question is highly relevant. This work consists in constructing universal computing algorithm based on the application of the finite element method. Essence of the given method consists in sampling non-linear finite element study design. Determined by the law of the temperature distribution on the volume of construction, which minimizes on key values moving, get a field of elastic, temperature and thermal stress of the components of strain and stress.

### References

- 1 Nozdrev V.F. *Thermodynamics course*, Moscow: Prosveshenie, 1967, 365 p.
- 2 Zenkovich O. *Finite Element Method in the technique*, Moscow: Mir, 1975, 541 p.
- 3 Segelind L. *Application of finite element method*, Moscow: Mir, 1979, 568 p.
- 4 Kudaykulov A.K., Amirtaev K.B., Tuleuova R.U., Tokulliev B.M., Utebayev U.B. *Poisk*, 2007, 3, p. 305–310.