

УДК 517.9

Н.А.Абиев

Таразский государственный университет им. М.Х.Дулати, Тараз

**АСИМПТОТИКА ВЕТВЯЩЕГОСЯ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ  
СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ**

*Бірінші ретті дербес туындылы сингулярлы қозғалған сызықты емес дифференциалдық теңдеулер жүйесінің тармақтанатын периоды шешімі үшін оның бар болуы және асимптотикалық жіктелінуі зерттелген.*

*Problems on existence and asymptotic expansion of branching periodic solution for the system of first order singularly perturbed nonlinear differential equations by the partial derivatives are investigated.*

Теория ветвления периодических решений для различных классов одномерных сингулярно-возмущенных уравнений и их систем была разработана в работах [1–4]. В работе [5] эти исследования были частично обобщены на случай системы сингулярно-возмущенных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. В настоящей работе рассматривается следующая система нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром  $\varepsilon$  при частных производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} &= \varepsilon f(t, x, u(t, x), z(t, x)), \\ \varepsilon \left( \frac{\partial z(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial z(t, x)}{\partial x} \right) + az(t, x) &= \varepsilon g(t, x, u(t, x), z(t, x)), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $a \neq 0$  — вещественное число;  $(t, x) \in \Omega$ ; функции  $f(t, x, u, z)$  и  $g(t, x, u, z)$  предполагаются непрерывно дифференцируемыми на множестве  $\Omega_3 = [0, T] \times R^3$  и периодическими.

Далее удобно ввести пространство  $C_{(2)}(\Omega)$ , элементами которого являются пары  $w(t, x) = (u(t, x), z(t, x))$  периодических функций, определенных и непрерывных в области  $\Omega$ . Норму в этом пространстве определяем формулой  $\|w\|_{C_{(2)}(\Omega)} = \max\{\|u\|, \|z\|\}$ .

Тогда при всех  $(t, x) \in \Omega$  имеют место неравенства:

$$\begin{aligned} \|f(t, x, u_2, z_2) - f(t, x, u_1, z_1)\| &\leq M_1 \max\{\|u_2 - u_1\|, \|z_2 - z_1\|\}, \\ \|g(t, x, u_2, z_2) - g(t, x, u_1, z_1)\| &\leq M_2 \max\{\|u_2 - u_1\|, \|z_2 - z_1\|\}, \end{aligned}$$

где  $M_1, M_2$  — положительные конечные постоянные.

Систему (1) заменим другой системой:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} &= \varepsilon f(t, x, u, z) - \frac{\varepsilon}{T} \int_0^T f(s, x - t + s, u(s, x - t + s), z(s, x - t + s)) ds, \\ \varepsilon \left( \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x} \right) + az(t, x) &= \varepsilon g(t, x, u, z), \end{aligned} \quad (2)$$

равносильной с ней только для тех  $u, z$ , для которых тождественно выполняется равенство:

$$\int_0^T f(s, x - t + s, u(s, x - t + s), z(s, x - t + s)) ds = 0. \quad (3)$$

**Лемма 1.** Система (2) эквивалентна следующей системе интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \varphi(x-t) + \varepsilon \int_0^t f(s, x-t+s, u, z) ds - \frac{t\varepsilon}{T} \int_0^T f(s, x-t+s, u, z) ds, \\ z(t, x) &= \frac{1}{\varepsilon \{\exp(aT/\varepsilon) - 1\}} \int_t^{t+T} \exp(-a(t-s)/\varepsilon) \varepsilon g(s, x-t+s, u, z) ds, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\varphi$  — произвольная непрерывная функция.

Утверждение об эквивалентности систем (2) и (4) доказывается непосредственной проверкой.

**Лемма 2.** Пусть  $w = (u, z) \in C_{(2)}(\Omega)$  — периодическая функция. Тогда функция  $w^{(1)} = (u_1, z_1) = Fw$ , определенная с помощью соотношений

$$\begin{aligned} u_1(t, x) &= \varphi(x-t) + \varepsilon \int_0^t f(s, x-t+s, u, z) ds - \frac{t\varepsilon}{T} \int_0^T f(s, x-t+s, u, z) ds, \\ z_1(t, x) &= \frac{1}{\varepsilon \{\exp(aT/\varepsilon) - 1\}} \int_t^{t+T} \exp(-a(t-s)/\varepsilon) \varepsilon g(s, x-t+s, u, z) ds, \end{aligned}$$

также является периодической функцией класса  $C_{(2)}(\Omega)$ .

**Доказательство.** Проверим её периодичность по  $t$ :

$$\begin{aligned} u_1(t+T, x) &= \varphi(x-t-T) + \varepsilon \int_0^{t+T} f(s, x-t-T+s, u(s, x-t-T+s), z(s, x-t-T+s)) ds - \\ &\quad - \frac{t\varepsilon}{T} \int_0^T f(s, x-t-T+s, u(s, x-t-T+s), z(s, x-t-T+s)) ds - \\ &\quad - \varepsilon \int_0^T f(s, x-t-T+s, u(s, x-t-T+s), z(s, x-t-T+s)) ds = \\ &= \varphi(x-t) + \varepsilon \int_0^{t+T} f(s, x-t+s, u(s, x-t+s), z(s, x-t+s)) ds - \\ &\quad - \frac{t\varepsilon}{T} \int_0^T f(s, x-t+s, u(s, x-t+s), z(s, x-t+s)) ds - \varepsilon \int_0^{t+T} f(s, x-t+s, u(s, x-t+s), z(s, x-t+s)) ds - \\ &\quad - \varepsilon \int_{t+T}^T f(s, x-t+s, u(s, x-t+s), z(s, x-t+s)) ds = \\ &= \varphi(x-t) - \frac{t\varepsilon}{T} \int_0^T f(s, x-t+s, u(s, x-t+s), z(s, x-t+s)) ds - \\ &\quad - \varepsilon \int_{t+T}^T f(s, x-t+s, u(s, x-t+s), z(s, x-t+s)) ds = \\ &= \varphi(x-t) - \frac{t\varepsilon}{T} \int_0^T f(s, x-t+s, u(s, x-t+s), z(s, x-t+s)) ds - \\ &\quad - \varepsilon \int_t^0 f(\gamma+T, x-t+\gamma+T, u(\gamma+T, x-t+\gamma+T), z(\gamma+T, x-t+\gamma+T)) d\gamma = \\ &= \varphi(x-t) - \frac{t\varepsilon}{T} \int_0^T f(s, x-t+s, u(s, x-t+s), z(s, x-t+s)) ds + \\ &\quad + \varepsilon \int_0^t f(\gamma, x-t+\gamma, u(\gamma, x-t+\gamma), z(\gamma, x-t+\gamma)) d\gamma = u_1(t, x), \\ z_1(t+T, x) &= \frac{1}{\varepsilon \{\exp(aT/\varepsilon) - 1\}} \int_{t+T}^{t+2T} \exp(-a(t+T-s)/\varepsilon) \times \\ &\quad \times \varepsilon g(s, x-t-T+s, u(s, x-t-T+s), z(s, x-t-T+s)) ds = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\varepsilon \{ \exp(aT/\varepsilon) - 1 \}} \int_t^{t+T} \exp(-a(t-\mu)/\varepsilon) \times \varepsilon g(\mu+T, x-t+\mu, u(\mu+T, x-t+\mu), z(\mu+T, x-t+\mu)) d\mu = \\
&= \frac{1}{\varepsilon \{ \exp(aT/\varepsilon) - 1 \}} \int_t^{t+T} \exp(-a(t-\mu)/\varepsilon) \times \varepsilon g(\mu, x-t+\mu, u(\mu, x-t+\mu), z(\mu, x-t+\mu)) d\mu = z_1(t, x).
\end{aligned}$$

Периодичность по  $x$  и непрерывность функции  $w^{(1)} = (u_1, z_1)$  очевидна.

Пусть  $M = \max \{ 2TM_1, |a|^{-1}M_2 \}$ .

Ввиду конечности  $M$  найдется  $\varepsilon_1 > 0$  такое, что  $\varepsilon_1 M \leq \alpha < 1$ .

**Лемма 3.** При всех  $\varepsilon$ , удовлетворяющих условию  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ , оператор  $F$  будет сжимающим.

**Доказательство.** Пусть

$$\max \{ 2T \| f(t, x, 0, 0) \| + \| \varphi \|, |a|^{-1} \| g(t, x, 0, 0) \| \} = R_0 = \text{const}.$$

Шар  $\| w \|_{C_{(2)}(\Omega)} = \max \{ \| u \|, \| z \| \} \leq \frac{1}{1-\alpha} R_0$  оператором  $F$  отображается в себя. Действительно, пусть  $\bar{w} = (\bar{u}, \bar{z}) = Fw$ .

Тогда

$$\begin{aligned}
|\bar{u}(t, x)| &\leq 2T\varepsilon \| f(t, x, u, z) - f(t, x, 0, 0) \| + 2T\varepsilon \| f(t, x, 0, 0) \| + \| \varphi \| \leq \\
&\leq 2TM_1\varepsilon \| w \|_{C_{(2)}(\Omega)} + 2T\varepsilon \| f(t, x, 0, 0) \| + \| \varphi \|, \\
|\bar{z}(t, x)| &\leq \varepsilon ( \| g(t, x, u, z) - g(t, x, 0, 0) \| + \| g(t, x, 0, 0) \| ) \times \frac{1}{\varepsilon |e^{aT/\varepsilon} - 1|} \int_t^{t+T} e^{-a(t-s)/\varepsilon} ds \leq \\
&\leq |a|^{-1} M_2 \varepsilon \| w \|_{C_{(2)}(\Omega)} + |a|^{-1} \varepsilon \| g(t, x, 0, 0) \|.
\end{aligned}$$

Следовательно, при всех  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедливо неравенство

$$\| \bar{w} \|_{C_{(2)}(\Omega)} = \max \{ \| \bar{u} \|, \| \bar{z} \| \} \leq \varepsilon M \| w \|_{C_{(2)}(\Omega)} + R_0 \leq \frac{1}{1-\alpha} R_0.$$

Возьмем теперь любые неравные между собой функции  $w^{(1)} = (u_1, z_1)$  и  $w^{(2)} = (u_2, z_2)$  из шара

$$\| w \|_{C_{(2)}(\Omega)} \leq \frac{1}{1-\alpha} R_0.$$

Тогда для  $\bar{w}^{(1)} = Fw^{(1)}$  и  $\bar{w}^{(2)} = Fw^{(2)}$  имеем:

$$\begin{aligned}
|\bar{u}_2(t, x) - \bar{u}_1(t, x)| &\leq 2\varepsilon T \| f(t, x, u_2, z_2) - f(t, x, u_1, z_1) \| \leq 2\varepsilon TM_1 \| w^{(2)} - w^{(1)} \|_{C_{(2)}(\Omega)}, \\
|\bar{z}_2(t, x) - \bar{z}_1(t, x)| &\leq \varepsilon \| g(t, x, u_2, z_2) - g(t, x, u_1, z_1) \| \times \frac{1}{\varepsilon |e^{aT/\varepsilon} - 1|} \int_t^{t+T} e^{-a(t-s)/\varepsilon} ds \leq \\
&\leq \varepsilon |a|^{-1} M_2 \| w^{(2)} - w^{(1)} \|_{C_{(2)}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Из этих неравенств следует, что

$$\| \bar{w}^{(2)} - \bar{w}^{(1)} \|_{C_{(2)}(\Omega)} = \max \{ \| \bar{u}_2 - \bar{u}_1 \|, \| \bar{z}_2 - \bar{z}_1 \| \} \leq \varepsilon M \| w^{(2)} - w^{(1)} \|_{C_{(2)}(\Omega)} \leq \alpha \| w^{(2)} - w^{(1)} \|_{C_{(2)}(\Omega)}.$$

Таким образом, при всех  $\varepsilon$  таких, что  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ , оператор  $F$  будет сжимающим. Лемма 3 доказана. Приходим к следующей теореме существования и единственности:

**Теорема 1.** При каждой фиксированной функции  $\varphi$ , при выполнении условий (3) и  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  система (4) имеет единственное непрерывное и периодическое решение  $w^* = (u^*, z^*)$  такое, что

$$\| w^* \|_{C_{(2)}(\Omega)} \leq \frac{1}{1-\alpha} R_0.$$

В общем случае, как видим из доказанной теоремы, решение системы (4) не единственно или, как еще говорят, возможны ветвления ее решения. Пусть пара функций  $(\varphi_0, 0)$  удовлетворяет тождеству (3). Представим теперь решение системы (1) в виде

$$u(t, x, \varepsilon) = \varphi_0(x-t) + \varepsilon \xi(t, x, \varepsilon), \quad z(t, x, \varepsilon) = \varepsilon \eta(t, x, \varepsilon).$$

Подставляя это в эквивалентную систему (2) и приравнявая члены при одинаковых степенях малого параметра, получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial x} &= f(t, x, \varphi_0(x-t) + \varepsilon \xi(t, x), \varepsilon \eta(t, x)) - \\ &- \frac{1}{T} \int_0^T f(s, x-t+s, \varphi_0(x-t) + \varepsilon \xi(s, x-t+s), \varepsilon \eta(s, x-t+s)) ds, \\ \varepsilon \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + a \eta &= g(t, x, \varphi_0(x-t) + \varepsilon \xi(t, x), \varepsilon \eta(t, x)). \end{aligned} \quad (5)$$

Повторяя схему преобразований, проделанных выше для системы (2), систему (5) можно эквивалентно преобразовать в систему интегральных уравнений. Далее можно доказать, что система (5) имеет единственное периодическое решение  $\chi$ , состоящее из пары  $(\xi, \eta)$ , для которого верна оценка

$$\|\chi\|_{C_2(\Omega)} = \max_{0 \leq t \leq T} \max_{x \in R} \sup \{ |\xi(t, x)|, |\eta(t, x)| \} \leq \frac{1}{1-\alpha} C_0,$$

где  $C_0 = \max \{ 2T \|f(t, x, \varphi_0(x-t), 0)\|, |a|^{-1} \|g(t, x, \varphi_0(x-t), 0)\| \}$ .

Следовательно, имеет место следующая теорема:

**Теорема 2.** Пусть  $u(t, x) = \varphi_0(x-t)$ ,  $z(t, x) \equiv 0$  — одно из бесчисленных периодических решений вырожденной системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad az = 0,$$

удовлетворяющее тождеству  $\int_0^T f(s, x-t+s, \varphi_0(x-t), 0) ds \equiv 0$ . Тогда для ветвящегося периодического решения возмущенной системы (2) имеют место асимптотические оценки:

$$\|u(t, x, \varepsilon) - \varphi_0(x-t)\| \leq \frac{1}{1-\alpha} C_0 \varepsilon,$$

$$\|z(t, x, \varepsilon)\| \leq \frac{1}{1-\alpha} C_0 \varepsilon.$$

#### Список литературы

1. Алымкулов К. О периодических решениях неавтономных систем дифференциальных уравнений // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии. — Фрунзе: Илим, 1968. — Вып. 5. — С. 177–182.
2. Алымкулов К. О построении периодического решения одного класса дифференциальных уравнений в частных производных // Там же. — Фрунзе: Илим, 1974. — Вып. 10. — С. 92–95.
3. Иманалиев М.И., Алымкулов К. Асимптотические методы в теории ветвления периодических решений сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных уравнений // Изв. АН Киргиз. ССР. Сер. физ.-техн. и мат. науки. — 1972. — № 3. — С. 13–23.
4. Иманалиев М.И., Алымкулов К. Асимптотические методы в теории ветвления периодических решений сингулярно-возмущенных систем дифференциальных уравнений // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии. — Фрунзе: Илим, 1973. — Вып. 9. — С. 138–167.
5. Иманалиев М.И., Абиев Н.А. О существовании ветвящегося периодического решения и его асимптотике для одной системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. — Бишкек: Илим, 1999. — Вып. 28. — С. 8–18.