К.Жетписов, Н.С.Токмагамбетов, Н.Зайтхан

Построение математической модели системы дидактических единиц методом индукции

В статье рассмотрена методика построения системы дидактических единиц как квазиупорядоченное множество. Методом индукции построена и изучена математическая модель системы дидактических единиц для раздела алгебры «Группы». Построены ориентированный граф и матрицы смежности, системы инцидентности дидактических единиц для раздела алгебры «Группы». Таким образом, дано полное описание состава логических связей и зависимости связей между дидактическими единицами.

K.Zhetpisov, N.S.Tokmagambetov, N.Zaytkhan

Construction of the mathematical model of the system of didactic units by induction

In this paper, the technique of construction of the system of didactic units as quasi-ordered set is considered. By induction the mathematical model of the didactic units for the section of algebra «Group» is constructed and is studied. We have constructed the directed graph and the adjacency matrix, systems of incidence of didactic units for the section of algebra, «the Group». Thus a full description of the composition of logical connections and the description of the dependence of the connections between the didactic units are given.

References

1 Skornyakov L.A. *The elements of structure's Theory*, Moscow: Nauka, 1970, p. 148.

2 Ore O. *Theory of graphs*, Moscow: Nauka, 1968, p. 352.

3 Kurosh A.G. *The course of higher algebry*, Moscow: Nauka, 1975, p. 431.

4 Goncharov S.S., Drobotun B.N., Nikitin A.A. *Methodical aspects of studing of algebraic systems on the higher educational institution* / Was transl. by Zhetpisov K., Tusipov Zh.: A Monogr, Karagandy: Publ. house CNTI, 2012, p. 202.

УДК 517.927.25

Н.С.Иманбаев, А.С.Муратов, З.Абдулсаматқызы

Международный казахско-турецкий университет им. Х.А.Ясави, Туркестан (E-mail: Imanbaevnur@mail.ru)

О базисности систем, связанных с нагруженными дифференциальными уравнениями второго порядка

В статье исследованы базисные свойства нагруженного дифференциального уравнения второго порядка. Установлены устойчивость и неустойчивость базисных свойств корневых функций. Получены сведения об устойчивости и неустойчивости базисных свойств системы корневых функций при образовании базиса Рисса. Доказано биортогональное разложение в ряд Фурье по системе собственных и присоединённых функций невозмущённой спектральный задачи Самарского-Ионкина.

Ключевые слова: нагруженное уравнение, корневые функции, всюду плотное, собственные значения, кратность, сопряжённость.

Вопрос о базисности корневых функций оператора с общими интегральными краевыми условиями положительно решен в [1], где доказана базисность Рисса со скобками при условии регулярности по Биркгофу [2] краевых условий невозмущённой задачи, а при дополнительном предположении усиленной регулярности — базисность Рисса. Задача Самарского-Ионкина для оператора кратного дифференцирования является регулярным краевым условием, но не усиленно регулярным краевым условием. Поэтому для такой задачи неприменимы результаты [1] и требуется дополнительное исследование.

Известно, что система собственных функций оператора, заданного формально самосопряженным дифференциальным выражением, с произвольными самосопряженными краевыми условиями, обеспечивающими дискретный спектр, образует ортонормированный базис пространства. Во многих работах исследовался вопрос о сохранении свойств базисности при некотором (слабом в определенном смысле) возмущении исходного оператора.

Из [1] следует, что система собственных и присоединённых функций (СиПФ) возмущенной задачи Самарского-Ионкина для оператора кратного дифференцирования полна и минимальна в $L_2(0, 1)$.

Одной из особенностей возмущенной задачи Самарского-Ионкина для оператора кратного дифференцирования является то, что

$$l(u) \equiv -u''(x) = \lambda u(x), \quad 0 < x < 1; \tag{a}$$

$$U_1(u) \equiv u'(0) - u'(1) = 0; \tag{b}$$

$$U_2(u) \equiv u(0) = \int_0^1 \overline{p(x)} u(x)dx, \quad p(x) \in L_2(0,1), \tag{c}$$

сопряженная к ней, будет спектральной задачей для нагруженного дифференциального уравнения $[3]$:

$$-V''(x) + P(x)V'(0) = \lambda V(x), \quad 0 < x < 1; \tag{1}$$

$$V'(1) = 0, \quad V(0) - V(1) = 0. \tag{2}$$

Вопросы базисности корневых функций нагруженных дифференциальных операторов были изучены в работах И.С.Ломова [4, 5]. Ему удалось распространить метод спектральных разложений В.А.Ильина [6] на случай нагруженных дифференциальных операторов. В [7, 8] были изучены базисные свойства корневых функций нагруженных дифференциальных операторов второго порядка, которые являются несамосопряженными возмущениями самосопряженной периодической задачи.

Если $p(x) \equiv 0$, то задача (a), (b), (c) называется задачей Самарского-Ионкина [9].

Хорошо известно, что система собственных функций оператора, заданного формально самосопряженным дифференциальным выражением, с произвольными самосопряженными краевыми условиями, обеспечивающими дискретный спектр, образует ортонормированный базис пространства L_2. Во многих работах исследовался вопрос о сохранении свойств базисности при некотором (слабом в определенном смысле) возмущении исходного оператора.

В настоящей работе мы рассматриваем возмущение несамосопряженной задачи, а именно спектральную задачу нагруженного дифференциального уравнения (1) – (2).

Считая $V'(0)$ некоторой независимой константой, общее решение дифференциального нагруженного уравнения (1) представимо в виде:

$$V(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} + V'(0) \cdot \int_0^x P(\xi) \cdot \frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-\xi)d\xi}{\sqrt{\lambda}}. \tag{3}$$

Отсюда, удовлетворяя (3) краевым условиям (2), затем полагая, что $x = 0$, имеем $V'(0) = C_2$ и получаем систему из двух уравнений, которая представима в виде:

$$\begin{cases} C_1 \cdot \left[1 - \cos\sqrt{\lambda}\right] - C_2 \left[\dfrac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + \displaystyle\int_0^1 P(\xi) \frac{\sin\sqrt{\lambda}(1-\xi)}{\sqrt{\lambda}} d\xi\right] = 0; \\ C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} - C_2 \left[\cos\sqrt{\lambda} + \displaystyle\int_0^1 P(\xi) \cdot \cos\sqrt{\lambda}(1-\xi)d\xi\right] = 0. \end{cases}$$

Несложными вычислениями получаем, что характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ спектральной задачи (1)–(2) представляется в виде:

$$\Delta(\lambda) = \left[1 - \cos\sqrt{\lambda}\right] \cdot \left(1 - \int_0^1 P(\xi)\cos\sqrt{\lambda}(1-\xi)d\xi\right) + \sin\sqrt{\lambda} \cdot \int_0^1 P(\xi)\sin\sqrt{\lambda}(1-\xi)d\xi. \tag{4}$$

При $P(x) = 0$ получим характеристический определитель задачи Самарского-Ионкина $\Delta_0(\lambda) = 1 - \cos\sqrt{\lambda}.$ Число $\lambda_0^0 = 0$ является простым корнем, а $u_0(x) = +\sqrt{3}x$ — соответствующей собственной функцией. Остальные собственные значения задачи Самарского-Ионкина являются двукратными: $\lambda_k^0 = (2k\pi)^2$, $k = 1,2,3,...$, а $u_{k0}^0 = \sqrt{2}\sin 2k\pi x$ — соответствующая им собственная функция; $u_{k1}^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} x\cos 2k\pi x$ — присоединенная функция.

С учётом условия биортогональности $(u_{k1}^0, V_{k1}^0) = 1$ имеем $V_{k1}^0 = 4\sqrt{2}\cos 2k\pi x$ — собственную и $V_{k0}^0 = 2\sqrt{2}(1-x)\sin 2k\pi x$ — присоединенную функции сопряженной задачи к задаче Самарского-Ионкина [3].

Функцию $P(x)$ представим в виде биортогонального разложения в ряд Фурье по системе собственных и присоединенных функций сопряжённой задачи $\{V_{k0}^0, V_{k1}^0\}$ [9]:

$$P(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k0} V_{k0}^0 + \sum_{k=0}^{\infty} a_{k0} V_{k1}^0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k0} 2\sqrt{2}(1-x)\sin 2k\pi x + \sum_{k=0}^{\infty} a_{k1} \cdot 4\sqrt{2} \cdot \cos 2k\pi x.$$

Тогда, после вычисления, из (4) имеем $\Delta_1(\lambda) = \Delta_0(\lambda) \cdot A(\lambda)$, где

$$A(\lambda) = \left[1 + 4\sqrt{2}\pi \sum_{k=1}^{\infty} a_{k0} \frac{k}{\lambda - (2k\pi)^2}\right]. \tag{5}$$

Таким образом, доказана

Теорема 1. Характеристический определитель спектральной задачи (1) – (2) для нагруженного дифференциального уравнения представим в виде (5), где $\Delta_0(\lambda)$ — характеристический определитель спектральной задачи Самарского-Ионкина; a_{k0} — коэффициенты Фурье биортогонального разложения функции $P(x)$ [10] по системе СиПФ сопряженной спектральной задачи Самарского-Ионкина.

Функция $A(\lambda)$ из (5) имеет полюса первого порядка в точках $\lambda = \lambda_k^0$, а функция $\Delta_0(\lambda)$ имеет нули второго порядка в этих же точках. Поэтому функция $\Delta_1(\lambda)$ является целой функцией переменного λ.

Из формулы (5) имеем две серии собственных значений спектральной задачи (1) – (2) для нагруженного дифференциального уравнения:

$$\lambda_k^{(1)} = \lambda_k^0 = (2k\pi)^2; \quad \lambda_k^{(2)} = \left[2k\pi + a_{k0}\left(\sqrt{2} + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right)\right]^2.$$

Если существует такой номер N, что $a_{k0} = 0, \forall k > N$, тогда формула (5) принимает вид:

$$\Delta_1(\lambda) = \Delta_0(\lambda)\left[1 + 4\sqrt{2}\pi \sum_{k=1}^{N} a_{k0} \cdot \frac{k}{\lambda - (2k\pi)^2}\right].$$

Заметим, что $\forall k > N$, $\Delta_1(\lambda_k^0) = 0$, т.е. все собственные значения $\lambda_k^0, k > N$ спектральной задачи Самарского-Ионкина являются собственными значениями нагруженного дифференциального уравнения (1), краевыми условиями (2) и сохраняется кратность собственных значений $\lambda_k^0, k > N$.

Из условия ортогональности $\overline{P(x)} \perp V_{j0}^0, \overline{P(x)} \perp V_{j1}^0$ при всех $j > N$ следует, что в этом случае

$$\int_0^1 P(x) \cdot V_{j0}^0(x)\,dx = \int_0^1 P(x) V_{j1}^0(x)\,dx = 0.$$

Поэтому собственные V_{j1}^0 и присоединенные V_{j0}^0 функции нагруженного дифференциального уравнения (1) краевыми условиями (2) и система СиПФ задачи Самарского-Ионкина отличаются друг от друга лишь по конечному числу первых членов. Итак, имеет место следующая

Теорема 2. Множество *B* функций $P(x)\in L_2(0,1)$, для которых система СиПФ спектральной задачи (1) – (2) для нагруженного дифференциального уравнения образует базис Рисса в $L_2(0,1)$, всюду плотно в $L_2(0,1)$. Множество $L_2(0,1)\setminus B$ также всюду плотно в $L_2(0,1)$.

Следствие. Множество функций $P(x)\in L_2(0,1)$, таких что система СиПФ возмущенной спектральной задачи Самарского-Ионкина для оператора кратного дифференцирования не образует даже обычного базиса в $L_2(0,1)$, является плотным в $L_2(0,1)$.

Схема доказательства. Очевидно, что множество функций $P(x)\in L_2(0,1)$, представимых в виде ряда

$$P(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_{k0}V_{k0}^{0}+\sum_{k=0}^{\infty}a_{k0}V_{k1}^{0}=\sum_{k=1}^{\infty}a_{k0}2\sqrt{2}(1-x)\sin 2k\pi x+\sum_{k=0}^{\infty}a_{k1}\cdot 4\sqrt{2}\cdot\cos 2k\pi x,$$

коэффициенты которого асимптотически (т.е., начиная с некоторого номера) обладают свойством $a_{k0}\neq 0,\ a_{k1}\neq 0$, будет плотным в $L_2(0,1)$. Поэтому для доказательства достаточно показать, что для таких функций $P(x)\in L_2(0,1)$ система СиПФ возмущенной спектральной задачи Самарского-Ионкина для оператора кратного дифференцирования не образует обычного базиса, в силу того, что не выполняется условие равномерной минимальности $\lim\limits_{j\to\infty}\left\|u_j^1\right\|\cdot\left\|\mathrm{v}_j^1\right\|=\infty$ [11], где

$$u_j^1(x)=\sqrt{2}\cos(2j\pi x)-\left[\frac{1}{\sqrt{2}j\pi}-\frac{2}{\overline{a}_{j0}}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{k=1,k\neq j}^{\infty}\overline{a}_{k0}\frac{k}{j^2-k^2}\right)\right]\sin(2j\pi x);$$

$$\mathrm{v}_j^1(x)=\sqrt{2}\cos(2j\pi x).$$

Список литературы

1 *Шкаликов А.А.* О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями. [Текст] / А.А. Шкаликов // Вестн. МГУ. Сер. Математика и механика. — 1982. — № 6. — С. 12–21.

2 *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. [Текст] / М.А. Наймарк // М.: Наука, 1969. — С. 66, 67.

3 *Иманбаев Н.С.* Об интегральном возмущении краевого условия спектральной задачи Самарского-Ионкина. [Текст] / Н.С. Иманбаев // Вестн. ЕНУ им. Л.Н.Гумилева. — 2012. — № 2 (87). — С. 5–9.

4 *Ломов И.С.* Свойство базисности корневых векторов нагруженных дифференциальных операторов второго порядка [Текст] / И.С.Ломов // Дифференциальные уравнения. — 1991. — Т. 27. — № 1. — С. 80–94.

5 *Ломов И.С.* Теорема о безусловной базисности корневых векторов нагруженных дифференциальных операторов второго порядка. [Текст] / И.С.Ломов // Дифференциальные уравнения. — 1991. — Т. 27. — № 9. — С. 1550–1563.

6 *Ильин В.А.* О связи между видами краевых условий и свойствами базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом разложений по корневым функциям несамосопряженного дифференциального оператора. [Текст] / В.А.Ильин // Дифференциальные уравнения. — 1994. — Т. 30. — № 9. — С. 1516–1529.

7 *Иманбаев Н.С., Садыбеков М.А.* Базисные свойства корневых функций нагруженных дифференциальных операторов второго порядка. [Текст] / Н.С.Иманбаев // Докл. НАН РК. — 2010. — № 2. — С. 11–14.

8 *Иманбаев Н.С., Садыбеков М.А.* Об устойчивости свойства базисности одного типа задач на собственные значения при нелокальном возмущении краевого условия. [Текст] / М.А.Садыбеков // Уфимский математический журнал. — 2011. — Т. 3. — № 2. — С. 28–33.

9 *Ильин В.А., Крицков Л.В.* Свойства спектральных разложений, отвечающих несамосопряженным операторам. [Текст] / В.А.Ильин // Функциональный анализ. Итоги науки и техники. Сер. Соврем. мат. и ее прил. // Темат. обзор. — Т. 96. — М.: ВИНИТИ, 2006. — С. 5–105.

10 *Sadybekov M.A., Imanbaev N.S.* On the Basis Property of Root Functions of a Periodic Problem with an Integral Perturbation of the Boundary Condition. [Текст] / M.A. Sadybekov // Differential Equations. — 2012. — Vol. 48. — № 6. — P. 896–900.

11 *Харди Г.Г., Литтльвуд Дж.Е., Полиа Г.* Неравенства. [Текст] / Г.Г. Харди. — М.: Высш. шк., 1948. — С. 66.

Н.С.Иманбаев, Ә.С.Мұратов, З.Абдулсаматқызы

Екінші ретті жүктелген дифференциалдық теңдеумен байланысты жүйенің базистік қасиеттері туралы

Мақалада жүктелген екінші ретті дифференциалдық оператордың меншікті және тіркелген функцияларының базистік қасиеттері зерттелген. Түбірлік функциялар жүйесінің Рисс базисін құрған жағдайындағы базистіліктің орнықтылығы мен орнықсыздығы туралы мәліметтер алынған. Сыртқы әсері жоқ Самарский-Ионкиннің спектралды есебінің меншікті және тіркелген функциялар жүйесі бойынша биортогоналды Фурье қатарына жіктелуі дәлелденген.

N.S.Imanbayev, A.S.Muratov, Z.Abdulsamatkyzy

About the basic of systems associated with the loaded second order differential equations

In this article the basic properties of the loaded second order differential equation are investigated. Stability and instability of basic of root functions properties are set. Information about the stability and instability the basic properties of system of the root function in the formation of the Riesz basis is got. Biorthogonal expansion of Fourier series in eigen functions and associated functions of the unperturbed Samarsky-Ionkin spectral problem is proved.

References

1 Shkalikov A.A. *About a base of own functions of ordinary differential operators with integrated regional conditions* // Bull. Moscow State University. Mathematics and mechanics, 1982, № 6, p. 12–21.

2 Najmark M.A. *Linear differential operators*, Moscow: Science, 1969, p. 66, 67.

3 Imanbaev N.S. *About integrated indignation of regional condition of Samarsky-Ionkin spectral problem* // Bull. of L.N.Gumilev Eurasian National University: 2012, № 2 (87), p. 5–9.

4 Lomov I.S. *Property of base of root vectors of the second order loaded differential operators, Differential equations,* 1991, vol. 27, № 1, p. 80–94.

5 Lomov I.S. *The theorem of an unconditional basis of root vectors of the loaded differential operators of the second order, Differential equations*: 1991, vol. 27, № 9, p. 1550–1563.

6 Il'in V.A. *About connection between types of regional conditions and properties of basis and equiconvergence with trigonometric number of decomposition at root functions of not self-conjugate differential operator, Differential equations*: 1994, vol. 30, № 9, p. 1516–1529.

7 Imanbaev N.S., Sadybekov M.A. *Basic properties of root functions of the loaded differential operators of the second order*. National Academy of Science of the Republic of Kazakhstan, 2010, № 2, Reports, p. 11–14.

8 Imanbaev N.S., Sadybekov M.A. *About stability of property of base of tasks one type on own values at not local indignation of regional condition* // Ufa mathematical journal, 2011, vol. 3, № 2, p. 28–33.

9 Ilyin V.A., Kritskov L.V. *Properties of spectral expansions corresponding to non-selfadjoint operators: Results of science and technology.* A series of lies. Math. and its applications. Actual situation review. Vol. 96, Moscow: VINITI, 2006, p. 5–105.

10 Sadybekov M.A., Imanbaev N.S. *On the Basis Property of Root Functions of a Periodic Problem with an Integral Perturbation of the Boundary Condition* // Differential Equations, 2012, vol. 48, № 6, p. 896–900.

11 Hardy G.G., Littlewood J.Y., Polya G. *Inequalities*, Moscow: High school, 1948, p. 66.