5. *Muratbekov M.* Two-sides estimates of the distribution function of s-values of a class of mixed type differential operators // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2007. — Vol. 52. — №12.
6. *Boymatov K.Kh.* The Theory of divisibility // is GIVEN by SSSR. — 1973. — T. 213. — 5. — P. 1009—1011.
7. *Feigin V.I.* The Noether property of differential operators in $R^n$ // English transl. in Differential Equations. — 1975. — №11. — P. 2231—2235.
8. *Otelbaev M.* Coercive estimates and separation theorems for elliptic equations in $R^n$ // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — 1984. — Issue 3. — P. 213—239.

УДК 517. 984/984.68

# О существовании и единственности решений одного класса сингулярных уравнений смешанного типа

# About existence and unique decisions of one class singular equations of the mixed type

Муратбеков М.Б., Медетбеков Б.М., Игисинов С.Ж.

*Таразский институт Международного казахско-турецкого университета им. А. Ясауи (e-mail: iqisinovsabit@mail.ru)*

Аралас типті сингулярлы дифференциалдық теңдеулердің бір класы қарастырылды. Шенелмеген облыс жағдайында шешімнің бар болуы мен жалғыздығы дәлелденді. Сонымен қатар осы шешімнің бағалары алынып, шешімді құру әдісі көрсетілді.

The class of singular equation of mixed type is considered. For unlimited area the existence and singles of solving is proved. Also estimations of this decisions are received. The method of construction of solving is expounded.



*Формулировка результатов*

Известно, что в случае неограниченной области свойства решений эллиптических уравнений исследованы достаточно полно. В то же время для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа этим вопросам посвящено гораздо меньше работ, а изучение их началось сравнительно недавно [1–4].

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$Lu = k(y)u_{xx} - u_{yy} + a(y)u_x + c(y)u + \lambda u = f(x, y), \quad f(x, y) \in L_2(R^2), \tag{1}$$

где $k(y)$ – кусочно-непрерывная, ограниченная функция, $yk(y) > 0$ при $y \neq 0$ и $k(0) = 0$.

В дальнейшем предположим, что коэффициенты $a(y)$, $c(y)$ удовлетворяют условию

*i)* $|a(y)| \geq \delta_0 > 0,\ c(y) \geq \delta > 0$ – непрерывные функции в $R(-\infty, \infty)$.

**Теорема 1.** Пусть выполнено условие *i*). Тогда для уравнения (1) при любой $f(x, y) \in L_2(R^2)$ существует единственное решение $u(x, y) \in L_2(R^2)$.

**Теорема 2.** Пусть выполнено условие *i*). Тогда для любого решения $u(x, y)$ уравнения справедлива оценка

$$\|u_x\|_2 + \|u_y\|_2 + \left\|\sqrt{c(y)}\,u\right\|_2 \leq c\|f\|_2,$$

где $c > 0$ – постоянное число.

На $C_0^\infty(R^2)$ положим

$$L_0 u = k(y)u_{xx} - u_{yy} + a(y)u_x + c(y)u + \lambda u .$$

Нетрудно проверить, что оператор $L_0$ допускает замыкание, и обозначим его через $L$.

*Вспомогательные леммы и утверждения*

**Лемма 2.1.** Пусть выполнено условие *i)*. Тогда для всех $u \in D(L)$ выполняется неравенство
$$\|Lu\|_2 \ge c\|u\|_2, \ (c > 0).$$

*Доказательство.* Лемма доказывается точно так же, как лемма 1 работы [1].

Далее в этом пункте доказывается существование резольвенты дифференциального оператора
$$l_t u = -u''(y) + (-k(y)t^2 + ita(y) + c(y) + \lambda)u(y)$$
в $L_2(R^2)$. Для этого сначала рассмотрим оператор
$$(l_{t,j} + \lambda E)u = -u'' + (-k(y)t^2 + ita(y) + c(y) + \lambda)u,$$
$(-\infty < t < \infty)$, определенный на множестве функций, удовлетворяющий следующим требованиям:
$$u \in C_0^2(\overline{\Delta}_j), \ u(\Delta^-{}_j) = u(\Delta^+{}_j) = 0.$$
Здесь $\Delta^-{}_j$ и $\Delta^+{}_j$ – правые и левые концы интервалов $\Delta_j = (j-1, j+1)$.

**Лемма 2.2.** Пусть выполнено условие *i*). Тогда при $\lambda > 0$ существует непрерывный обратный оператор $(l_{t,j} + \lambda E)^{-1}$, определенный в пространстве, и справедливы следующие оценки:

а) $\left\|\left(l_{t,j} + \lambda E\right)^{-1}\right\|_{2\to 2} \le \dfrac{c}{\lambda^{1/2}}$, б) $\left\|\dfrac{d}{dy}\left(l_{t,j} + \lambda E\right)^{-1}\right\|_{2\to 2} \le \dfrac{c}{\lambda^{1/4}}$;

в) $\|(l_t + \lambda E)u\|_2 \ge |t|\delta_0\|u\|_2, \ u \in D(l_t), \ t \ne 0$ а при $t = 0$ $\|(l_t + \lambda E)u\|_2 \ge \delta_0\|u\|_2$;

г) $\|(l_t + \lambda E)u\|_2 \ge \left(\|u'\|_2 + \left\|\sqrt{c(y)}u\right\|_2 + \left\|\sqrt{|t|a(y)}\cdot u\right\|_2\right), \ u \in D(l_t), \ t \ne 0,$

где $c > 0$ – постоянное число, не зависящее от $u$ и $t$.

*Доказательство.* Повторяя выкладки и рассуждения, использованные в работах [1–4], получаем доказательство леммы 2.2.

Возьмем набор $\{\varphi_j\}$ неотрицательных функций из $C_0^\infty(R)$ таких, что
$$\sum_j \varphi_j^2 \equiv 1, \ \mathrm{supp}\,\varphi_j \in \Delta_j, \ \sum_j \Delta_j = R.$$
Через $K$ обозначим оператор, определенный равенством
$$Kf = \sum_j \varphi_j (l_{t,j} + \lambda E)^{-1}\varphi_j f, \ f \in L_2(R).$$

**Лемма 2.3.** Пусть выполнено условие *i*). Тогда для любой функции $f \in C_0^\infty(R)$ справедливо следующее равенство:
$$\left(l_{t,j} + \lambda E\right)^{-1} Kf = f + B_\lambda f, \tag{2.1}$$
где
$$B_\lambda f = Kf = \sum_j \varphi_j{}'' (l_{t,j} + \lambda E)^{-1}\varphi_j f + 2\sum_j \varphi_j{}' \frac{d}{dy}(l_{t,j} + \lambda E)^{-1}\varphi_j f$$
(суммы без указания пределов берутся по всем целым $j$).

*Доказательство.* Пусть $f \in C_0^\infty(R)$, и рассмотрим действия оператора $K$ на $f$:
$$Kf = \sum_j \varphi_j (l_{t,j} + \lambda E)^{-1}\varphi_j f, \ f \in L_2(R). \tag{2.2}$$
Так как $f \in C_0^\infty(R)$, то сумма (2.2) конечна. Поэтому следующие вычисления законны:
$$(l_{t,j} + \lambda E)Kf = f + \sum_j \varphi_j''(l_{t,j} + \lambda E)^{-1}\varphi_j f + 2\sum_j \varphi_j' \frac{d}{dy}(l_{t,j} + \lambda E)^{-1}\varphi_j f.$$
Здесь учитывалось, что $\sum_j \varphi_j^2 \equiv 1$. Лемма 2.3 доказана.

**Лемма 2.4.** Пусть выполнено условие *i*). Тогда найдется $\lambda > 0$ такое, что $\|B_\lambda\| < 1$.

*Доказательство.* Проведем оценку нормы оператора $B_\lambda$

$$\|B_\lambda f\|_2^2 = \sum_j \int_{j-1}^{j+1} \left| \sum_{j-1}^{j+1} \varphi_j{}'' (l_{t,j} + \lambda E)^{-1} \varphi_j f + 2\varphi_j{}' \frac{d}{dy} (l_{t,j} + \lambda E)^{-1} \varphi_j f \right|^2 dy .$$

Здесь мы воспользовались тем, что на $\overline{\Delta}_j = [j-1, j+1]$ только $\varphi_{j-1}, \varphi_j, \varphi_{j+1} \neq 0$. Отсюда и в силу неравенства Гельдера получаем, что

$$\|B_\lambda f\|_2^2 \le 24 c_0 \sum_j \left( \left\| (l_{t,j} + \lambda E)^{-1} \varphi_j f \right\|_2^2 + \left\| \frac{d}{dy} (l_{t,j} + \lambda E)^{-1} \varphi_j f \right\|_2^2 \right),$$

где $c_0 = \max\left\{ |\varphi_j''|, |\varphi_j'| \right\}$. Из последнего неравенства, пользуясь леммой 2.2, имеем

$$\|B_\lambda f\|_2^2 \le 24 c_0 \cdot c \left( \frac{1}{\lambda^{1/2}} + \frac{1}{\lambda^{1/4}} \right) \|f\|_2^2 . \tag{2.3}$$

Последнее неравенство при достаточно больших положительных $\lambda$ доказывает лемму.

**Лемма 2.5.** Пусть выполнено условие *i*). Тогда оператор $\left(l^-{}_t + \lambda E\right)$ при достаточно больших $\lambda > 0$ непрерывно обратим и справедливо неравенство

$$\left(l_t^- + \lambda E\right)^{-1} = K(E - B_\lambda)^{-1} . \tag{2.4}$$

*Доказательство.* Оператор $(E - B_\lambda)$ ограничен со своим обратным. Поэтому множество $M = \left\{ \varphi = (E - B_\lambda) f : f \in C_0^\infty(R) \right\}$ плотно в $L_2(R)$. Из равенства (2.4) при $\varphi = (E - B_\lambda) f, f \in C_0^\infty(R)$ получаем, что $K(E - B_\lambda)^{-1} \varphi \in D(l_t^-)$ и $\left(l_t^- + \lambda E\right) K(E - B_\lambda)^{-1} \varphi = \varphi$. Отсюда имеем, что $y = K(E - B_\lambda)^{-1} f$ является решением уравнения $\left(l_t^- + \lambda E\right) y = f$. Единственность следует из леммы 2.2, лемма 2.5 доказана.

**Лемма 2.6.** Пусть выполнены условия леммы 2.5, и пусть $\lambda > 0$ такое, что $\|B_\lambda\| < 1$. Тогда справедлива оценка

$$\left\| \rho(y) |t|^\alpha \left(l_t + \lambda E\right)^{-1} \right\|_2^2 \le c(\lambda) \sup_j \left\| \rho(y) |t|^\alpha \varphi_j \left(l_{t,j} + \lambda E\right)^{-1} \right\|_2^2 , \tag{2.5}$$

где $\alpha = 0{,}1$, $\rho(y)$ — непрерывная функция в $R$.

*Доказательство.* Из представления (2.5) видно, что оператор $\rho(y)|t|^\alpha \left(l_t + \lambda E\right)^{-1}$ ограничен (или неограничен) вместе с оператором $\rho(y)|t|^\alpha K(E - B_\lambda)^{-1}$. Поэтому будем заниматься оценкой нормы последнего оператора $\rho(y)|t|^\alpha K(E - B_\lambda)^{-1}$. Для любого $f \in L_2(R)$ имеем

$$\left\| \rho(y) |t|^\alpha \left(l_t + \lambda E\right)^{-1} f \right\|_2^2 = \left\| \rho(y) |t|^\alpha K(E - B_\lambda)^{-1} f \right\|_2^2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_j \rho(y) |t|^\alpha \varphi_j \left(l_{t,j} + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j (E - B_\lambda)^{-1} f \right|^2 dy \le$$

$$\le \sum_j \int_{j-1}^{j+1} \left| \sum_j \rho(y) |t|^\alpha \varphi_j \left(l_{t,j} + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j (E - B_\lambda)^{-1} f \right|^2 dy .$$

Нетрудно проверить, что на $\Delta_j = (j-1, j+1)$ только $\varphi_{j-1}, \varphi_j, \varphi_{j+1} \neq 0$. Учитывая это, в силу неравенства Гельдера имеем

$$\left\| \rho(y) |t|^\alpha \left(l_t + \lambda E\right)^{-1} f \right\|_2^2 \le 12 \cdot c(\lambda) \sup_j \left\| \rho(y) |t|^\alpha \varphi_j \left(l_{t,j} + \lambda E\right)^{-1} \right\|_2^2 \cdot \|f\|_2^2 .$$

Лемма 2.6 доказана.

**Лемма 2.7.** Пусть выполнены условия леммы 2.6. Тогда справедливы следующие оценки:

а) $\left\| \left(l_t + \lambda E\right)^{-1} \right\|_{2\to 2} \le c_1 < \infty$; б) $\left\| it \left(l_t + \lambda E\right)^{-1} \right\|_{2\to 2} \le c_2 < \infty$;

в) $\left\| \frac{d}{dy}\left(l_t + \lambda E\right)^{-1} \right\|_{2\to 2} \le c_3 < \infty$ .

*Доказательство.* Согласно лемме 2.6

$$\left\|\left(l_t + \lambda E\right)^{-1}\right\|_{2\to 2} \le c(\lambda)\sup_j \left\|\varphi_j\left(l_{t,j} + \lambda E\right)^{-1}\right\|_{2\to 2} \le c(\lambda)\sup_j \left\|\left(l_{t,j} + \lambda E\right)^{-1}\right\|_{2\to 2}.$$

Отсюда и из леммы 2.2 получаем, что

$$\left\|\left(l_t + \lambda E\right)^{-1}\right\|_{2\to 2} < c < \infty .$$

Далее в силу леммы 2.4 имеем

$$\left\|it\left(l_t + \lambda E\right)^{-1}\right\|_{2\to 2} \le c(\lambda)\sup_j \left\|it\varphi_j\left(l_{t,j} + \lambda E\right)^{-1}\right\|_{2\to 2} \le c(\lambda)\sup_j \left\|it\left(l_{t,j} + \lambda E\right)^{-1}\right\|_{2\to 2} \le c_2 .$$

Точно так же, пользуясь леммой 2.3, находим

$$\left\| \frac{d}{dy}\left(l_t + \lambda E\right)^{-1} \right\|_{2\to 2} \le c_3 < \infty .$$

Лемма 2.7 доказана.

*Доказательство теорем 1-2*

Применяя преобразования Фурье по $x$ к уравнению (1), получаем:

$$(l_t + \lambda E)\tilde{u} = -\tilde{u}_{yy} + (-k(y)t^2 + ita(y) + c(y) + \lambda)\tilde{u} = \tilde{f} , \tag{3.1}$$

где

$$\tilde{u} = F_{x\to t}u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,y)e^{-ixt}dx ;$$

$$\tilde{f} = F_{x\to t}u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-ixt}dx .$$

Отсюда нетрудно заметить, что задача о решении уравнения (1) перейдет в задачу о решении уравнения (3.1). Следовательно, по лемме 2.5

$$\tilde{u} = \left(l_t + \lambda E\right)^{-1}\tilde{f} = K\left(E + B\right)^{-1} f \tag{3.2}$$

дает решение уравнения (3.1).

Теперь, используя обратный оператор $F^{-1}$, имеем

$$u(x,y) = F^{-1}\tilde{u} = F^{-1}\left(l_t + \lambda E\right)^{-1}\tilde{f} . \tag{3.3}$$

Из (3.3), используя свойства преобразования Фурье, получаем, что

$$\|u\|_2^2 = < F_{t\to x}^{-1}\left(l_t + \lambda E\right)^{-1}\tilde{f}, F_{t\to x}^{-1}\left(l_t + \lambda E\right)^{-1}\tilde{f} > =$$

$$= \left\|\left(l_t + \lambda E\right)^{-1}\tilde{f}\right\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\left\|\left(l_t + \lambda E\right)^{-1}\tilde{f}(t,y)\right\|^2 dt \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{\infty}\left\|\left(l_t + \lambda E\right)^{-1}\right\|_{2\to 2}^2 \cdot \left\|\tilde{f}(t,y)\right\|_2^2 dt \le \sup_t \left\|\left(l_t + \lambda E\right)^{-1}\right\|_2^2 \cdot \|f\|_2^2 .$$

Отсюда в силу леммы находим

$$\|u\|_2 \le c_1\|f\|_2 , \tag{3.4}$$

где $c_1 > 0$ – постоянное число.

Найдем $u_x$:

$$u_x = F^{-1}(it)\left(l_t + \lambda E\right)^{-1}\tilde{f}(t,y) .$$

Далее мы имеем

$$\|u_x\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|u_x|^2 dxdy = < F_{t\to x}^{-1}(-it)\left(l_t + \lambda E\right)^{-1}\tilde{f}(t,y), F_{t\to x}^{-1}(-it)\left(l_t + \lambda E\right)^{-1}\tilde{f}(t,y) > \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{\infty} \left\| -it\left(l_t + \lambda E\right)^{-1} \right\|_{2\to 2}^2 \cdot \left\| \tilde{f}(t,y) \right\|_2^2 dt \le \sup_{t\in R} \left\| -it\left(l_t + \lambda E\right)^{-1} \right\|_{2\to 2}^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \left| \tilde{f}(t,y) \right|^2 dy \right) dt =$$

$$= \sup_{t\in R} \left\| -it\left(l_t + \lambda E\right)^{-1} \right\|_{2\to 2}^2 \cdot \left\| f \right\|_2^2 .$$

Откуда в силу леммы 2.4

$$\left\| u_x \right\|_2^2 \le c_2^2 \left\| f \right\|_2^2 . \qquad (3.5)$$

Здесь $c_2 > 0$ – постоянное число.

Аналогично найдем $u_y$:

$$u_y = F^{-1} \frac{\partial}{\partial y} \left(l_t + \lambda E\right)^{-1} \tilde{f}(t,y) .$$

Тогда можно записать, что

$$\left\| u_y \right\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left| u_y \right|^2 dxdy =< F_{t\to x}^{-1} \frac{\partial}{\partial y} \left(l_t + \lambda E\right)^{-1} \tilde{f}(t,y), F_{t\to x}^{-1} \frac{\partial}{\partial y} \left(l_t + \lambda E\right)^{-1} \tilde{f}(t,y) >=$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial}{\partial y} \left(l_t + \lambda E\right)^{-1} \tilde{f}(t,y) \right|^2 dy \right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \frac{\partial}{\partial y} \left(l_t + \lambda E\right)^{-1} \tilde{f}(t,y) \right\|_2^2 dt \le \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \frac{\partial}{\partial y} \left(l_t + \lambda E\right)^{-1} \right\|_{2\to 2}^2 \cdot \left\| \tilde{f}(t,y) \right\|_2^2 dt \le$$

$$\le \sup_{t\in R} \left\| \frac{\partial}{\partial y} \left(l_t + \lambda E\right)^{-1} \right\|_{2\to 2}^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \tilde{f}(t,y) \right\|_2^2 dt = \sup_{t\in R} \left\| \frac{\partial}{\partial y} \left(l_t + \lambda E\right)^{-1} \right\|_{2\to 2}^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \left| \tilde{f}(t,y) \right|^2 dt \right) dy \le$$

$$\le \sup_{t\in R} \left\| \frac{\partial}{\partial y} \left(l_t + \lambda E\right)^{-1} \right\|_{2\to 2}^2 \cdot \left\| f \right\|_2^2 .$$

Отсюда и из леммы 2.7 имеем

$$\left\| u_y \right\|_2^2 \le c_3^2 \left\| f \right\|_2^2 , \qquad (3.6)$$

где $c_3 > 0$ – постоянное число, не зависящее от $u$ и $f$.

Находим также $\left\| \sqrt{c(y)} u \right\|$:

$$\left\| \sqrt{c(y)} u \right\|_2^2 ==< \sqrt{c(y)} F_{t\to x}^{-1} \left(l_t + \lambda E\right)^{-1} \tilde{f}, \sqrt{c(y)} F_{t\to x}^{-1} \left(l_t + \lambda E\right)^{-1} \tilde{f} > .$$

Так как преобразование Фурье не зависит от $y$, то справедливо равенство

$$\left\| \sqrt{c(y)} u \right\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sqrt{c(y)} \left(l_t + \lambda E\right)^{-1} \tilde{f}(t,y) \right|^2 dy \right) dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \sqrt{c(y)} \left(l_t + \lambda E\right)^{-1} \tilde{f}(t,y) \right\|_2^2 dt \le \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \sqrt{c(y)} \left(l_t + \lambda E\right)^{-1} \right\|_2^2 \cdot \left\| \tilde{f}(t,y) \right\|_2^2 dt .$$

Таким образом, учитывая лемму 2.4, имеем

$$\left\| \sqrt{c(y)} u \right\|_2^2 \le \sup_{t\in R} \left\| \sqrt{c(y)} \left(l_t + \lambda E\right)^{-1} \right\|_{2\to 2}^2 \cdot \left\| f \right\|_2^2 ;$$

$$\left\| \sqrt{c(y)} u \right\|_2^2 \le c_4^2 \cdot \left\| f \right\|_2^2 . \qquad (3.7)$$

Теорема 2 полностью доказана.

## References


1. *Muratbekov M.B.* // Differential equations. — 1991. — T. 27. — №16. — P. 2127–2137.
2. *Kal'menov T.Sh., Muratbekov M.B.* Spectral characteristic of the operator mixed type. — Almaty: Gylym, 1997. — 80 p.
3. *Muratbekov M.B., Ahmedzhanov M.A.* // Mathematical journal. — 2005. — T. 5. — №2(16). — P. 57–65.
4. *Muratbekov M.B., Otelbaev M.O.* // Notify high school. Ser. mathem. — 1989. — №3. — P. 44–47.