

К ВОПРОСУ О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ОТКЛОНЕНИЕМ АРГУМЕНТА

Жанбусинова Б.Х., Космакова М.Т., Шаяхметова Б.К., Шаукенова К.С.

Карагандинский государственный университет им. академика Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан

E-mail: bagdat.60@mail.ru

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка с отклонением аргумента

$$\frac{dx}{dt} = p(t)x(\lambda t) + q(t) \quad (1)$$

где $p(t), q(t) \in C(-\infty, +\infty)$, $p(t + \frac{\omega}{\lambda}) = p(t)$, $q(t + \frac{\omega}{\lambda}) = q(t)$, $\omega > 0$.

Для того, чтобы решение $x(t)$ было периодическим необходимо и достаточно, чтобы $x(0) = x(\omega)$.

Найдем общее решение уравнения (1), сделав предварительно замену переменной $\lambda t = s$, $\frac{dx}{dt} = \lambda \frac{dx}{ds}$, тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\lambda} p\left(\frac{s}{\lambda}\right)x(s) + \frac{1}{\lambda} q\left(\frac{s}{\lambda}\right),$$

общим решением которого будет

$$x(s) = \left[\frac{1}{\lambda} \int_0^s q\left(\frac{u}{\lambda}\right) \exp\left(-\frac{1}{\lambda} \int_0^u p\left(\frac{\tau}{\lambda}\right) d\tau\right) du + C \right] \exp\left(\frac{1}{\lambda} \int_0^s p\left(\frac{u}{\lambda}\right) du\right).$$

В силу эквивалентных преобразований общее решение уравнения (1) имеет аналогичный вид

$$x(t) = \left[\frac{1}{\lambda} \int_0^t q\left(\frac{u}{\lambda}\right) \exp\left(-\frac{1}{\lambda} \int_0^u p\left(\frac{\tau}{\lambda}\right) d\tau\right) du + C \right] \exp\left(\frac{1}{\lambda} \int_0^t p\left(\frac{u}{\lambda}\right) du\right).$$

В дальнейшем для краткости записи будем обозначать через $E(t) = \exp\left(\frac{1}{\lambda} \int_0^t p\left(\frac{u}{\lambda}\right) du\right)$.

Используя условие периодичности решения $x(0) = x(\omega)$, найдем постоянную C :

$$C = \frac{E(\omega)}{\lambda(1 - E(\omega))} \int_0^\omega q\left(\frac{u}{\lambda}\right) E(u) du.$$

Таким образом, периодическое решение уравнения (1) имеет вид

$$x(t) = \left[\frac{1}{\lambda} \int_0^t q\left(\frac{u}{\lambda}\right) E^{-1}(u) du + \frac{E(\omega)}{\lambda(1 - E(\omega))} \int_0^\omega q\left(\frac{u}{\lambda}\right) E(u) du \right] E(t). \quad (2)$$

Теорема 1. Дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом вида (1):

а) имеет единственное периодическое решение (2), если $\int_0^\omega p\left(\frac{t}{\lambda}\right) dt \neq 0$;

б) не имеет периодических решений, если $\int_0^\omega p\left(\frac{t}{\lambda}\right) dt = 0$ и $\int_0^\omega q\left(\frac{t}{\lambda}\right) E(t) dt \neq 0$;

в) имеет множество периодических решений, если $\int_0^\omega p\left(\frac{t}{\lambda}\right) dt = 0$ и $\int_0^\omega q\left(\frac{t}{\lambda}\right) E(t) dt = 0$

Список использованных источников

1. Трикоми Ф. Численно-аналитические методы исследования периодических решений.- Киев: Вища шк., 1976
2. Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Мартынюк Д.И. Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами.- Киев: Наук. Думка, 1984.