

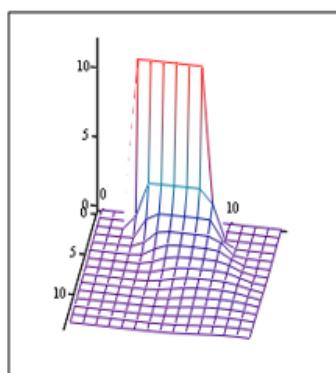
Параметры расчетной сетки для построения изолиний

$$n = 15 \quad m = 15 \quad i := 1..n - 1$$

$$j := 0..m - 1 \quad x_i := 100 \cdot i \quad y_j := 100 \cdot j$$

Матрица безразмерных концентраций

$$QA_{i,j} := \frac{Qp(x_i, y_j)}{PDK}$$



QA

Fig 3: Results of modeling air pollution from traffic flow

Thus, the Mathcad system is a powerful tool for modeling physical processes. This package allows you to visualize processes and phenomena occurring in the material world.

References

- [1] Kholodnov V. A., Dyakonov V. P., Fonar V. V., Kulishenko R. Yu., Ananchenko I. V., System analysis and decision making. Computing technology in the Mathcad computer mathematics system, St. Petersburg, SPbGTI (TU), 2013, 154 p.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТРУКТУРЫ КОМПОЗИТОВ И ОСОБЕННОСТИ ИХ УПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Байшагиров Х.Ж.¹, Ермаганбетова С.К.²

^{1,2}Кокшетауский университет им. Ш.Уалиханова, г. Кокшетау, Казахстан

¹E-mail: bayshagir@mail.ru

²E-mail: bayshagir@mail.ru

До недавнего времени исследование композитных тел проводилось на основе метода «гомогенизации» неоднородных тел путем введения осредненных по всему объему тела или по элементарному макрообъему физических параметров. Но такие однородные или

«квазиоднородные» математические модели не охватывают ряд особенностей деформирования композиционного тела, так как среда является существенно неоднородной уже на локальном уровне. Действительно, в последние десятилетия получило развитие создание композитных тел на основе нанотехнологий, поэтому актуальны математические модели, более подробно описывающие поведение компонентов на структурном уровне.

В монографии «Двухкомпонентная теория упругости неоднородных сред» [1] предложен вариант структурной теории упругих композитов, когда в каждом элементарном макрообъеме (математической точке) определены два поля осредненных напряжений, смещений и т.д., соответствующих отдельным компонентам композита – наполнителю и матрице. В монографии вводятся и определяются также параметры их взаимодействия.

Все это выводит математическую модель на более высокий уровень познания. Действительно, по законам диалектики, новые количества (удвоение компонентов в точке) приводят к новому качеству. При этом компоненты с разными, порой противоположными свойствами, при взаимодействии проявляют свойства (закон единства и борьбы противоположностей), не описываемые в рамках предыдущих моделей. Ниже представлены основы структурной теории двухкомпонентных тел и ряд результатов.

1. Основные соотношения и параметры двухкомпонентной модели.

Переход от классических моделей [2, 3] к двухкомпонентному подходу схематично можно представить следующим образом [1, 4]. Пусть d – характерный размер неоднородности структуры (диаметр волокна), l – характерный размер элементарного макрообъема, L – характерный размер неоднородности изучаемого напряженно-деформированного состояния (Рис.1, Рис.2).

Тогда область применимости теории эффективных модулей определяется выражением [1]:

$$d \ll l \ll L \quad (1)$$

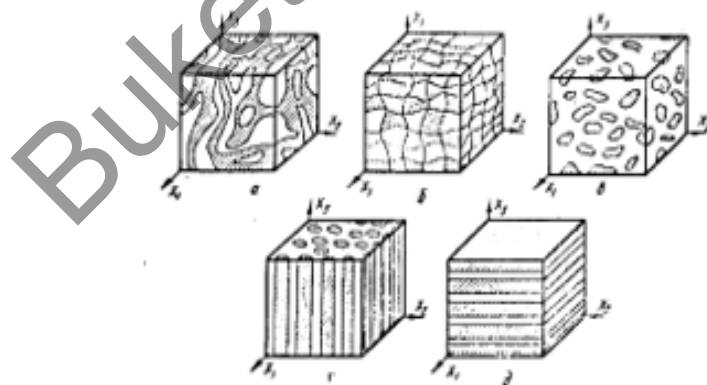


Рис. 1: Характерные виды микроструктуры элементарного макрообъема (макроточки) двухфазных смесей
а, б, в – зернистые структуры; г – однонаправленная волокнистая структура; д – слоистая структура.

Факторы осреднения в модели можно представить на плоскости с помощью Рис.2.

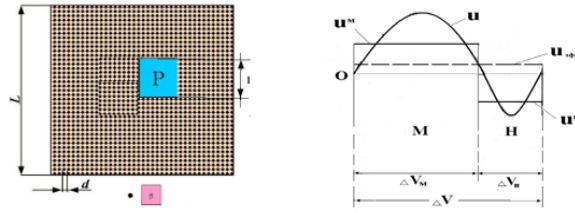


Рис. 2: Характерные размеры (2а) неоднородной структуры, а также профили (2б) перемещений компонентов в пределах макроточки (элементарного макрообъема V), P – макроточка, p – микроточка

Согласно двухкомпонентному подходу [1, 4], смещение по квазиоднородной и двухкомпонентной моделям связаны формулой:

$$u = \frac{1}{\Delta V} \int_V u dV = V^H u^H - V^M u^M \quad (2)$$

Здесь u – истинное перемещение. Элементарный макрообъем V состоит из объема V^H и V^M , занятых наполнителем и матрицей, соответственно ($\Delta V = \Delta V^H + \Delta V^M$), u^H, u^M, V^H, V^M – перемещения и относительное содержание наполнителя и матрицы.

При этом очевидно, что соотношение типа (1) сохраняется и для двухкомпонентного подхода $d \ll l \ll L$. Пусть кинематические соотношения для деформаций линейны:

$$e_{ij}^x = 0.5(u_{i,j}^x + u_{j,i}^x), \quad i, j = 1, 2, 3; \quad \kappa = \text{н,м} \quad (3)$$

где e_u^H, u_i^M – компоненты векторов осредненных смещений наполнителя и матрицы. Уравнения движения элементарного макрообъема [1] имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j}^H + X_i^H &= \rho_{11} \ddot{u}_i^H + b_{ij}(u_j^H - u_j^M) \\ \sigma_{ij,j}^M + X_i^M &= \rho_{22} \ddot{u}_i^M - b_{ij}(u_j^H - u_j^M) \end{aligned} \quad (4)$$

где $\sigma_{ij}^H, \sigma_{ij}^M$ – компоненты тензоров средних напряжений в наполнителе и в матрице, X_i^H, X_i^M – средние объемные силы, b_{ij} – параметры взаимодействия, обусловленного средними взаимными перемещениями компонентов композиции ($b_{ij} = 0$ при ij),

Физические соотношения для двухкомпонентного упругого тела имеют вид [1]:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^H &= c_{ijmn}^H e_{mn}^H + c_{ijmn}^a e_{mn}^M \\ \sigma_{ij}^M &= c_{ijmn}^a e_{mn}^H + c_{ijmn}^M e_{mn}^M \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^H &= c_{ijmn}^H e_{mn}^H + c_{ijmn}^a e_{mn}^M - \beta_{ij}^H T^H - \beta_{ij}^{1a} T^M \\ \sigma_j^M &= c_{ijmn}^a e_{mn}^H + c_{ijmn}^M e_{mn}^M - \beta_{ij} 2a T^H - \beta_{ij}^M T^M \end{aligned} \quad (6)$$

В (5), (6) постоянные c_{ijmn}^H, c_{ijmn}^M являются обычными упругими характеристиками анизотропного наполнителя и анизотропной матрицы. Параметры «жесткости сцепления» c_{ijmn}^a характеризуют влияние деформации одного из компонентов на напряжения в другом.

Величины $\beta_{ij}^H, \beta_{ij}^{1a}, \beta_{ij}^{2a}, \beta_{ij}^M$ определяют [1] через: параметры $c_{ijmn}^H, c_{ijmn}^M, c_{ijmn}^a$, коэффициенты линейного расширения a_{ij}^H, a_{ij}^M материалов и коэффициент влияния $a_{ij}^a; T^H, T^M$ - температуры в компонентах.

Краевые задачи [1]:

I краевая задача – на S заданы смещения: $u_i^H = f_i^H; u_i^M = f_i^M$ (7)

II краевая задача – на S заданы усилия: $\sigma_{ij}^H n_j = P_i^H; \sigma_{ij}^M n_j = P_i^M$ (8)

III краевая смешанная задача – на части поверхности S_u заданы перемещения $u^k = \frac{1}{\Delta V_k} \int_{V_k} u dV$ (9) а на части поверхности $S_\sigma (S_\sigma + S_u = S)$ заданы усилия.

Очевидно, что вследствие взаимодействия разноименных полей, соответствующих компонентам, величины f_i^H, f_i^M а также P_i^H, P_i^M должны быть связаны между собой.

Для трех экспериментально легко реализуемых, простейших напряженно-деформированных состояний была установлена функциональная зависимость [1]:

$$c_{ijmn}^a = c_{ijmn}^a(c_{ijmn}^{ahb}, c_{ijmn}^H, c_{ijmn}^M, V^H, V^M) \quad (10)$$

На основе сформулированных [1] основных энергетических теорем несвязанной и связанной термоупругости вариационными методами решены задачи по колебаниям и растяжению стержня в поле центробежных сил.

2. Особенности колебаний стержней

Полученное частотное уравнение, описывающее свободные поперечные колебания армированных стержней, удобно представить в форме [1]:

$$(\Omega^2 - \Omega_1^2)(\Omega^2 - \Omega_2^2) - B(\Omega^2 - 1) = 0 \quad \text{или} \quad \Omega^2 = 1 + \frac{1}{B}(\Omega^2 - \Omega_1^2)(\Omega^2 - \Omega_2^2) \quad (11)$$

где Ω - безразмерная частота, B – безразмерный параметр взаимодействия компонентов [1].

Из биквадратного уравнения (11) следует, что каждая форма колебаний реализуется при двух разных частотах. То есть, двухкомпонентная теория описывает «раздвоение» частот, когда каждый компонент колеблется согласно своим инерционным параметрам.

При $B \gg 1$ получим формулу [1] для технических частот свободных изгибных колебаний

$$f_n = \frac{k_n^2}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{I_2[(\lambda^H + 2\mu^H)v^H + c_{1111}^a + (\lambda^M + 2\mu^M)v^M + \gamma\omega^2]}{S(p_{11} + p_{22})}} \quad (12)$$

В Таблице 1 приведены значения частот по двухкомпонентной (12) и квазиоднородной теориям (13).

Частота, Гц	1	2	3
Экспериментальн.	122	770	2100
По формуле (12)	124	775	2170
По формуле (13)	125	795	2220

Таблица 1: Расчетные и экспериментальные собственные частоты

Отсюда видно, что наша модель дает более близкие к экспериментальным данным результаты, чем классические модели. Следуя Мандельштаму Л.И. [5], введем выражение:

$$F(\eta) = \lambda_1 \eta^2 + \lambda_2 \eta + \lambda_3, \quad \text{где} \quad \omega^2 = \eta, \quad \lambda_1 > 0, \quad \lambda_3 \geq 0. \quad (13)$$

Тогда абсциссы точек, в которых данная парабола пересекает ось ω , равны корням уравнения $(\omega^2 A - a)(\omega^2 B - b) - h^2$ или (11), т.е. квадратам частот искомым колебаний в соответствии с рисунком 3. Эта картина полностью повторяет результаты для колебания дискретных тел с 2 степенями свободы [5] и качественно согласуется с ними.

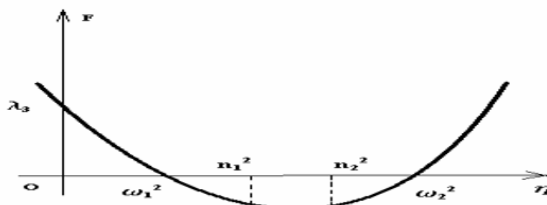


Рис. 3: Расположение искомым и парциальных частот

Отсюда следует, что нашу структурную модель можно также понимать, как теорию двух упругих взаимодействующих континуумов.

3. Исследование напряженно-деформированного состояния двухкомпонентных тел при растяжении

Рассмотрен естественно-закрученный армированный стержень, имитирующий вращающуюся лопатку компрессора [Рис. 4]. Под действием центробежных сил в теле возникают напряжения, неравномерно распределенные по ширине стержня.

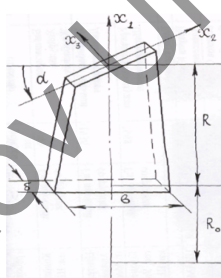


Рис. 4: Естественно-закрученный стержень

Как показано на Рисунке 5, несмотря на общее растягивающее воздействие, в области левой и правой кромок композиционного стержня в наполнителе формируются напряжения сжатия. Этот эффект объясняет наблюдаемые в практике случаи краевых расслоений, местных потерь устойчивости и других локальных разрушений, не охватываемых классическими моделями.

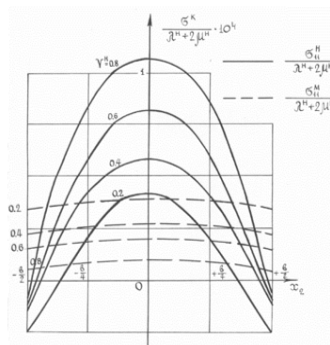


Рис. 5: Распределение напряжений в компонентах стержня

Список литературы

- [1] Байшагиров Х.Ж., Каримбаев Т.Д. Двухкомпонентная теория упругости неоднородной среды – Монография. Караганда, 2016. – 270 с.
- [2] Браутман Л., Крок Р. Композиционные материалы. // Машиностроение, 1978. – Т.1-8. 250 с.
- [3] Милейко С.Т., Работнов Ю.Н. Механика волокнистых композитов. // Успехи механики, «Advances in Mechanics». – 1980. – Т.3, вып. 1. – с. 3-55.
- [4] Хорошун Л.П., Тыднюк В.З. Задачи динамики двухфазных упругих тел // Прикладная механика. – 1979. – Т.ХУ, № 2. – с. 35-40.
- [5] Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний. – М.:Наука, 1972. – 470 с.

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА БЕННИ-ЛЮКА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С НЕЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИЕЙ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯ

Рахмонов Фарход Дустмуродович¹

¹Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан,

¹E-mail: : farxod_frd@bk.ru

Представляют большой интерес с точки зрения приложений уравнения типа Бенни-Люка [1-90] и приложений интегро-дифференциальные уравнения типа Буссинеска [10-12].

Исследуется классическая разрешимость нелокальной обратной краевой задачи для дифференциального уравнения типа Бенни-Люка высокого четного порядка. В многомерной области $\Omega = (t, x) | 0 < t < T, 0 < x < l$ рассматривается уравнение следующего вида

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \varepsilon(t) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_{i=1}^m (-1)^k \frac{\partial^{2k}}{\partial x_i^{2k}} - \omega(t) \sum_{i=1}^m \left((-1)^k \frac{\partial^{2k}}{\partial x_i^{2k}} + \varepsilon(t) \frac{\partial^{4k}}{\partial x_i^{4k}} \right) \right] U(t, x) =$$