

НАГРУЗКИ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ КАК ВОЗМУЩЕНИЯ

Дженалиев М.Т., д.ф.-м.н., профессор*;

Рамазанов М.И., д.ф.-м.н., профессор **; Исакаев С.А.***, магистрант

* Институт математики и математического моделирования МОН РК

г. Алматы, Республика Казахстан;

** Карагандинский государственный университет им. академика Е.А.Букетова,

Факультет математики и информационных технологий

г. Караганда, Республика Казахстан

В работе рассматриваются краевые задачи для нагруженного дифференциального оператора, которые интерпретируются как возмущения соответствующих дифференциальных операторов. Показано, что нагруженная часть является слабым или сильным возмущением в зависимости от порядка производных в нагруженном слагаемом, а также от многообразия на котором задается след искомого решения.

Ключевые слова: нагруженное дифференциальное уравнение, краевая задача, теория возмущений, устойчивость спектральных свойств.

В настоящее время граничные задачи для нагруженных уравнений образуют достаточно большой раздел общей теории краевых задач дифференциальных уравнений. Наиболее общее определение нагруженного уравнения дано в работе А.М. Нахушева [1].

Заданное в n -мерной области Ω евклидова пространства R^n точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ (матричное или скалярное) уравнение

$$Au(x) = f(x), \quad x \in \Omega \quad (1)$$

называется *нагруженным*, если оно содержит след некоторых операций от искомого решения $u(x)$ на принадлежащих замыканию $\bar{\Omega}$ области Ω многообразиях, размерность которых строго меньше n . Нагруженное уравнение (1) называется нагруженным дифференциальным уравнением в области $\Omega \subset R^n$, если оно содержит, хотя бы одну производную от искомого решения $u(x)$ на принадлежащих многообразиях ненулевой меры.

Такие задачи возникают, как при построении математических моделей процессов естествознания, так и при исследовании чисто математических задач [2-7]. В монографии [2] отмечено, что за последние 35-40 лет появилось значительное число публикаций, проблемно-ориентированных на нагруженные уравнения и об этом свидетельствует, например, то, что на запрос о нагруженных уравнениях на поисковом российском сервере Яндекс нашлось 163 тысячи ответов, на поисковом международном сервере Yahoo – 699 тысяч ответов. Значительную роль в развитии теории нагруженных уравнений играет и то, что нагруженные уравнения могут выступать как один из способов введения обобщенных решений широких классов уравнений в частных производных и как эффективный метод поиска приближенных решений краевых задач для дифференциальных уравнений.

Вопросы корректной разрешимости, которые являются основополагающими в теории краевых задач для уравнений в частных производных остаются таковыми же и для краевых задач для нагруженных уравнений. Но, наличие нагруженного оператора не всегда позволяет напрямую применять методы исследований, хорошо развитые при исследованиях обычных (не нагруженных) уравнений. Все это подчеркивает как теоретическую, так и практическую **актуальность** любого исследования различных граничных задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Очевидно, что наличие нагруженного слагаемого ведет к новым еще не исследованным проблемам в теории граничных задач, поэтому возникает необходимость построения новых методов решения развивающейся теории нагруженных дифференциальных уравнений.

Граничные задачи для нагруженных дифференциальных операторов можно интерпретировать как функционально-дифференциальный оператор, имеющий вид

$$Lu + \lambda Nu = f, \quad (2)$$

где L - дифференциальная, а N - нагруженная части.

В монографии [3] нагруженные дифференциальные уравнения интерпретируются как слабые или сильные возмущения дифференциальных уравнений, то есть нагруженное слагаемое $-\lambda Nu$ в уравнении (2) рассматривается как *возмущение*.

Теория возмущений, как известно, возникла в рамках одной из старейших областей прикладной математики - небесной механике. После открытия закона всемирного тяготения оказалось возможным описывать планетарные движения на основе фундаментальных физических законов, так если рассматриваются только Солнце и одна планета, то она движется по эллипсу, в фокусе которого находится Солнце. Однако в реальности происходит несколько иное движение, так как каждая планета оказывает воздействие на другие планеты своим гравитационным полем и поэтому возмущает, то есть изменяет, их движение. Поэтому, теория возмущений изначально была связана с разработкой различных способов учета таких изменений, то есть исследователь берет в основу анализа невозмущенное решение, которое соответствует эллиптическому движению как начальное приближение, и затем соответствующим образом корректирует это решение, вычисляя силы, с которыми планеты влияют на невозмущенное движение друг друга.

В настоящее время задачи, стоящие перед теорией возмущений, гораздо шире, чем ее применения в небесной механике, но основная идея сохранилась. Исследование начинается с невозмущенной или порождающей задачи, решение которой рассматривается как приближение более сложной задачи, отличающейся наличием дополнительных членов в уравнениях. Затем строятся следующие приближения, уточняющие это решение, обычно в форме степенных рядов (или их модификаций).

Как отмечает Т. Като в своей монографии [4], различные разделы математики, называемые теорией возмущений, основаны на изучении систем (задач) слабо отклоняющихся от некоторой простой (идеальной) системы (задачи), которая допускает корректное и полное изучение. При этом отмечается, что одним из основных направлений теории возмущений является обобщенная теория возмущений спектра, устойчивость спектральных свойств оператора.

Краевые задачи вида (1), в некоторых случаях являются корректными в естественных классах функций, то есть в этом случае, нагруженное слагаемое интерпретируется как *слабое* возмущение. Если же нарушается единственность решения краевой задачи (1), то в этом случае нагрузку можно интерпретировать как *сильное* возмущение [3], [9], [10]. При этом оказывается, что характер нагрузки - возмущения (слабое или сильное возмущение) зависит как от порядка производных, входящих в нагруженную (возмущенную) часть оператора (2), так и от того, на каком многообразии задается след искомой функции. Эти факты можно продемонстрировать на первой краевой задаче для нагруженного уравнения параболического типа.

Пусть $R_+ = (0, \infty)$. Рассмотрим в области $Q = \{(x, t), x \in R_+, t \in R_+\}$ следующую краевую задачу:

$$Lu + \lambda Nu = f \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \Big|_{x=\alpha(t)} = f(x, t); \\ u(x, 0) = 0, u(0, t) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где $f(x, t)$, $\alpha(t)$ - заданные функции, $k \geq 0$ - целое число, $\lambda \in C$ - комплексный параметр.

Обращая дифференциальную часть в граничной задаче (3), её можно редуцировать к соответствующему интегральному уравнению Вольтерра второго рода [3],[6]. Главная часть ядра этого интегрального уравнения будет иметь вид

$$K_k(t, \tau) = \frac{b}{(t - \tau)^{k - \frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{d^2}{t - \tau}\right),$$

где b, d - некоторые постоянные отличные от нуля, поэтому будет справедлива следующая оценка:

$$|K_k(t, \tau)| \leq C \frac{b}{d^{2k+1}} \left(\frac{2k+1}{2e}\right)^{k+\frac{1}{2}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Таким образом, если доопределить ядро $K_k(t, \tau)$ при $\tau = t$:

$$K_k(t, t) = 0,$$

То оно будет непрерывной и ограниченной функцией при $0 \leq \tau \leq t < +\infty$, т.е. соответствующее интегральное уравнение будет иметь единственное решение $\forall \lambda \in C$.

Таким образом, если нагрузка задаётся на линии $x = a$ ($a = const, a > 0$), то граничная задача (3) будет иметь единственное решение в естественных классах при любом значении k . Значит в этом

случае нагрузку $\lambda Nu = \lambda \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \Big|_{x=a}$ в уравнении (3) можно считать слабым возмущением, хотя само уравнение является существенно нагруженным [3], так как порядок производной в нагруженном слагаемом может быть выше порядка дифференциальной части.

Если же нагруженное слагаемое задается на некоторой линии $x = \alpha(t) \neq const$, то картина существенно меняется. В случае $\alpha(0) \neq 0$ картина остается прежней, то есть граничная задача (3) будет корректной в классе ограниченных, непрерывных функций.

В работах [3], [5] показано, что если в дифференциальном уравнении (3) нагруженное слагаемое – значения искомой функции или ее производных первого порядка на многообразии $x = \alpha(t) = t^\omega$, то соответствующие краевые задачи являются корректными в естественных классах функций, то есть нагруженное слагаемое – *слабое* возмущение.

Если же нагруженным слагаемым является значение производной второго порядка искомой функции на многообразии $x = \alpha(t) = t^\omega$, то корректность задачи (3) зависит от показателя ω . В случае $\omega \geq \frac{1}{2}$ нарушается единственность решения первой краевой задачи (3), то есть в этом случае нагрузку можно интерпретировать как *сильное* возмущение [3], [9], [10] и соответствующая задача становится *нетривальной*. При этом, если $\omega > \frac{1}{2}$, то однородная задача

$$Lu + \lambda Nu = f \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=\alpha(t)} = 0; \\ u(x, 0) = 0, u(0, t) = 0, \end{cases}$$

для любых значениях $\lambda, |\lambda| > 1$ будет иметь ненулевые решения, причем их количество растет с возрастанием $|\lambda|$. Если же $\omega = \frac{1}{2}$, то $\forall \lambda$, для которых $\text{Re} \lambda > 0$ являются спектром, причем кратность каждого собственного значения равна 1. В случае $\omega < \frac{1}{2}$, если решение краевой задачи (3) существует, то оно единственно, но для существования этого решения необходимо выполнения дополнительных условий [3].

Известно, что базовые уравнения линейных математических моделей многих процессов на фрактальных структурах являются нагруженными дифференциальными уравнениями дробного порядка. Дифференциальные уравнения с частными производными дробного порядка – обобщения уравнений с частными производными целочисленного порядка имеют большое практическое значение, например, такие уравнения, являются математическими моделями различных процессов и явлений в средах с фрактальной структурой. При описании процессов в системах, для которых необходимо учитывать нелокальные свойства по времени и пространству, необходим аппарат дробного интегро-дифференцирования [11]. При этом существенно то, что в рамках математического аппарата интегро-дифференцирования дробного порядка удастся, не только более глубоко осознать известные данные, но и получить принципиально новые результаты.

Как указано выше, если дифференциальный порядок нагруженного слагаемого есть производная целого порядка на многообразии $x = t$, то единственность решения соответствующей задачи нарушалась, начиная со второго порядка (наличие сплошного спектра, количество собственных функций растет с возрастанием $|\lambda|$) [3], [9], [10]. Дальнейшей целью нашей работы является выяснение характера нагрузки дробного порядка β , при $1 < \beta < 2$ в вопросах разрешимости первой краевой задачи для уравнения теплопроводности.

Литература:

1. Нахушев А.М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка // Дифференциальные уравнения. 1976. Т.12, №1. С.103-108.
2. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012. 232 с.
3. Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И. Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. Алматы: Ғылым, 2010. 334 с.
4. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.
5. Есбаев А.Н., Жанболова А.К., Петерс С.Н. О первой краевой задаче для слабо-нагруженного параболического уравнения // Вестник КарГУ. Математика серии. - 2012. - № 4 (68). - С. 31-37.
6. Токова А.А. Об одной краевой задаче для модельного нагруженного дифференциального уравнения параболического типа // Известия Кабардино - Балкарского Научного центра РАН. - 2004. - № 2(12). - С. 119 - 120
7. Дикинов Х.Ж., Керефов А.А., Нахушев А.М. Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения теплопроводности // Дифференц. уравнения. 1976. - Т.12. - № 1. - С. 177 - 179
8. Akhmanova D.M., Kosmakova M.T., Ramazanov M.I., Tuimebayeva A.E. On the solutions of the homogeneous mutually conjugated Volterra integral equations // Вестник Карагандинского университета. Сер. Математика. 2013. № 2 (70). С. 153–158.
9. Ахманова Д.М., Дженалиев М.Т., Рамазанов М. И. Об особом интегральном уравнении Вольтерра второго рода со спектральным параметром // Сибирский математический журнал, 2011. - Т. 52. - № 1. - С.3-14.
10. Амангалиева М.М., Ахманова Д.М., Дженалиев М.Т., Рамазанов М. И. Краевые задачи для спектрально-нагруженного оператора теплопроводности с приближением линии загрузки в нуль или бесконечность // Дифференциальные уравнения. - 2011. - Vol. 47. - № 2. - С. 231-243.
11. Псху А.В. Уравнение в частных производных дробного порядка. М.:Наука, 2005. 199 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЗМА КАТОДНОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ МЕДЬ-ЖЕЛЕЗО-СЕРАСОДЕРЖАЮЩЕГО МИНЕРАЛА НА ТВЕРДЫХ ЭЛЕКТРОДАХ

Доспаев М.М., д.т.н., гнс*; Фигуринене И.В.**, к.х.н., доцент;
 Доспаев Д.М., магистр технических наук***; Сыздыкова Б.Б., магистрант***
 *Химико-металлургический институт им. Ж.Абишева;
 **Карагандинский государственный медицинский университет;
 ***Карагандинский государственный технический университет
 г. Караганда, Республика Казахстан

Прямое флотационное обогащение окисленных медных руд является неэффективным, т.к. не позволяет извлекать медь в концентрат с высокими показателями. В этой связи часто применяется комбинированная схема с предварительным кислотным выщелачиванием меди [1-3]. К наиболее перспективным методам подготовки руд относится предварительная электролитическая поляризация рудной пульпы, позволяющая направленно изменять поверхностные свойства минералов без добавления реагентов или со значительным сокращением их расхода [4-10].

Известные способы переработки упорных сульфидно-окисленных медных руд и концентратов, содержащих халькопирит [11-13], обычно заключаются в комбинировании выщелачивания различными кислотами и флотации, что приводит к потерям минералов и является неэффективным.

Для решения данной проблемы большое внимание уделяется разработке новых методов переработки халькопиритсодержащего сырья. Авторами [14] предложен способ, по которому медный концентрат, основным медьсодержащим минералом в котором является халькопирит, подвергают предварительной термической активации при 280-300°C, затем проводят электрохимическое выщелачивание активированного концентрата для извлечения меди в раствор. В литературе имеется ряд работ [15-18], посвященных катодному восстановлению халькопирита (CuFeS₂). Обсуждая природу восстановления сульфидов меди авторы [17] предполагают два механизма: в нейтральных растворах - электронный; в щелочных растворах - с участием частиц взвеси сульфидов и ионов металлов. В работе [7] показано, что электрохимическая подготовка пульпы, содержащей халькопирит, способствует селективному разделению минералов при флотации.

Как следует из приведенного литературного обзора, в мировой практике научные исследования по халькопириту ведутся в направлениях термического разложения, химического и электрохимического выщелачивания с целью отделения меди из указанного минерала. Обращает