К.Е.Кервенев

О вопросах применения дидактических игр при изучении математики

В статье представлены общие принципы организации и проведения дидактических игр на уроках математики и раскрыта их роль в процессе активизации познавательной деятельности школьников. Также рассмотрены основные виды игр, как «Соревнование художников», «Математическое лото», «Магические квадраты», «Забег по кругу», «Лучший счетчик», «Цветок», «Найди свой ответ». Определены основные условия проведения дидактической игры и требования к их подготовке. Выявлены структура, функции, виды, этапы дидактических игр, формы и способы игровой деятельности, влияющие на тот или иной аспект процесса познания.

K.E.Kervenev

About questions of using didactic games when studying mathematics

In work the general principles of the organization and carrying out didactic games at lessons of mathematics and their role in the course of activization of informative activity of school students are presented. Also main types of games are considered: "Competition of artists", "A mathematical lotto", "Magic squares", "Running around", "The best counter", "the Flower", "Find the answer" the main conditions of carrying out didactic game and the requirement to their preparation are defined. The structure, functions, types, stages of didactic games, forms and ways of the game activity, influencing this or that aspect of process of knowledge are revealed.

УДК 521.1

М.Дж.Минглибаев[1,2], Г.М.Маемерова[1]

[1]*Казахский национальный университет им. аль-Фараби;*
[2]*Астрофизический институт им. В.Г.Фесенкова, Алматы (E-mail: minglibayev@mail.ru)*

Решение неавтономных дифференциальных уравнений задачи трех тел с помощью системы «Mathematica»

Уравнения движения исследуемой задачи получены в оскулирующих элементах апериодического движения по квазиконическому сечению. Вековые части возмущающих функций вычислены в оскулирующих канонических элементах, с помощью системы «Mathematica». Вековые возмущения первого порядка получены методом Пикара.

Ключевые слова: оскулирующие элементы, метод Пикара, вековые возмущения, квазиконическое сечение, метод Гамильтона-Якоби.

Введение. Реальные космические тела нестационарные. Со временем изменяются их массы, размеры, формы и структура распределения масс внутри тел [1–6]. Эти процессы особенно интенсивно происходят в двойных и кратных системах [4]. В связи с этим исследуется задача трех тел с массами, изменяющимися в различных темпах изотропно. Тела предполагаются как материальные точки. На основе теории возмущений, на базе апериодического движения по квазиконическому сечению [5] исследуются вековые возмущения задачи трех тел-точек с переменными массами.

Постановка задачи. Рассмотрим систему взаимогравитирующих трех тел T_0, T_1 и T_2 с переменными массами, изменяющимися изотропно в различных темпах [1,5,6]:

$$m_0 = m_0(t), \quad m_1 = m_1(t), \quad m_2 = m_2(t), \quad \frac{\dot{m}_s}{m_s} \neq \frac{\dot{m}_\sigma}{m_\sigma}, \quad s, \sigma = 0, 1, 2, \quad s \neq \sigma. \tag{1}$$

Репозиторий КарГУ

Уравнения движения в абсолютной системе координат имеют вид:

$$m_i \ddot{\vec{R}}_i^* = grad_{\vec{R}_i^*} U, \qquad i = 0, 1, 2, \tag{2}$$

где

$$U = f\left(\frac{m_0 m_1}{R_{01}^*} + \frac{m_0 m_2}{R_{02}^*} + \frac{m_1 m_2}{R_{12}^*}\right), \qquad R_{ij}^* = \sqrt{(X_j^* - X_i^*)^2 + (Y_j^* - Y_i^*)^2 + (Z_j^* - Z_i^*)^2},$$

$\vec{R}_i^* = \vec{R}_i^*(X_i^*, Y_i^*, Z_i^*)$ — радиус-векторы тел; f — гравитационная постоянная. Рассматриваемая система уравнений (2) при условии (1), в отличие от других схем задачи трех тел с переменными массами, не имеет ни одного известного интеграла. Учитывая, что силовая функция зависит только от взаимных расстояний тел, следуя работе [1], переходим к относительной системе координат с началом в точке T_0 с массой $m_0 = m_0(t)$. Обозначим

$$\vec{R}_i = \vec{R}_i\,(X_i, Y_i, Z_i) = \vec{R}_i^* - \vec{R}_0^*, \qquad i = 1, 2. \tag{3}$$

Уравнения относительного движения имеют классический вид:

$$\ddot{\vec{R}}_i + f(m_0 + m_i)\frac{\vec{R}_i}{R_i^3} = grad_{\vec{R}_i} W_i; \tag{4}$$

$$W_i = f\sum_{j=1}^{2} m_j \left(\frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{X_i X_j + Y_i Y_j + Z_i Z_j}{R_j^3}\right);$$

$$\Delta_{ij} = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2} = R_{ij}^*, \qquad \Delta_{i0} = R_i = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2}.$$

Если мы знаем решения системы дифференциальных уранений (4), то $\ddot{\vec{R}}_0^*$ определяется интегрированием уравнения

$$\ddot{\vec{R}}_0^* = grad_{\vec{R}_0^*}\left[f\left(\frac{m_1}{R_{01}^*} + \frac{m_2}{R_{02}^*}\right)\right],$$

после этого $\vec{R}_1^*, \vec{R}_2^*$ легко определяются из соотношений (3).

Исходя из уравнений относительного движения (4), получим уравнения движения в координатах Якоби [5, 7]

$$\mu_1 \ddot{\vec{r}}_1 = grad_{\vec{r}_1} U, \qquad \mu_2 \ddot{\vec{r}}_2 = grad_{\vec{r}_2} U - \mu_2(2\dot{\nu}_1 \dot{\vec{r}}_1 + \ddot{\nu}_1 \vec{r}_1), \tag{5}$$

где

$$\mu_1 = \mu_1(t) = \frac{m_1 m_0}{m_0 + m_1} \neq const, \qquad \mu_2 = \mu_2(t) = \frac{m_2(m_1 + m_0)}{m_0 + m_1 + m_2} \neq const,$$

приведенные массы

$$U = f\left(\frac{m_0 m_1}{r_{01}} + \frac{m_0 m_2}{r_{02}} + \frac{m_1 m_2}{r_{12}}\right);$$

$$r_{01}^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = r_1^2, \qquad r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2;$$

$$r_{02}^2 = (x_2 + \nu_1 x_1)^2 + (y_2 + \nu_1 y_1)^2 + (z_2 + \nu_1 z_1)^2;$$

$$r_{12}^2 = (x_2 - \nu_0 x_1)^2 + (y_2 - \nu_0 y_1)^2 + (z_2 - \nu_0 z_1)^2;$$

$$\nu_1 = \nu_1(t) = \frac{m_1}{m_0 + m_1} \neq const, \qquad \nu_0 = \nu_0(t) = \frac{m_0}{m_0 + m_1} \neq const.$$

Исследуем задачу, которая описывается уравнениями движения (5), используя теорию возмущения на базе апериодического движения по квазиконическому сечению [5, 8].

Уравнения движения в оскулирующих элементах. Уравнения (5) запишем в виде

$$\mu_1 \ddot{\vec{r}}_1 = grad_{\vec{r}_1}\left(f\frac{m_1 m_0}{r_1}\right) + b_1 \vec{r}_1 + grad_{\vec{r}_1} R_1;$$

Репозиторий КарГУ

$$\mu_2\ddot{\vec{r}}_2 = grad_{\vec{r}_2}\left(f\,\frac{m_2(m_1+m_0)}{r_2}\right) + b_2\vec{r}_2 + grad_{\vec{r}_2} R_2,$$

где

$$b_1 = b_1(t) = \mu_1\frac{\ddot{\gamma}_1}{\gamma_1},\qquad \gamma_1 = \gamma_1(t) = \frac{m_0(t_0)}{m_0(t)};$$

$$b_2 = b_2(t) = \mu_2\frac{\ddot{\gamma}_2}{\gamma_2},\qquad \gamma_2 = \gamma_2(t) = \frac{m_0(t_0)+m_1(t_0)}{m_0(t)+m_1(t)};$$

$$R_1 = -\frac{1}{2}b_1 r_1^2 + W,\qquad R_2 = -\frac{1}{2}b_2 r_2^2 + W - V;$$

$$W = f\left(\frac{m_0 m_2}{r_{02}} + \frac{m_1 m_2}{r_{12}} - \frac{m_2(m_0+m_1)}{r_2}\right);$$

$$V = \mu_2[(2\dot{\nu}_1\dot{x}_1 + \ddot{\nu}_1 x_1)x_2 + (2\dot{\nu}_1\dot{y}_1 + \ddot{\nu}_1 y_1)y_2 + (2\dot{\nu}_1\dot{z}_1 + \ddot{\nu}_1 z_1)z_2].$$

Обозначим

$$K_1 = \frac{1}{2}\mu_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2),\qquad K_2 = \frac{1}{2}\mu_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2);$$

$$U_1 = f\,\frac{m_1 m_0}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} + \frac{1}{2}b_1(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + R_1;$$

$$U_2 = f\,\frac{m_2(m_0+m_1)}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} + \frac{1}{2}b_2(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) + R_2$$

и перейдем к новым переменным

$$x_i = \gamma_i\rho_i\cos\varphi_i\cos\theta_1,\qquad y_i = \gamma_i\rho_i\cos\varphi_i\sin\theta_i,\qquad z_i = \gamma_i\rho_i\sin\varphi_i,\qquad i = 1, 2.$$

Уравнения движения в переменных

$$\rho_i,\qquad P_{\rho_i} = \frac{\partial K_i}{\partial\dot{\rho}_i} = \mu_i\gamma_i^2\dot{\rho}_i + \mu_i\gamma_i\dot{\gamma}_i\rho_i;$$

$$\varphi_i,\qquad P_{\varphi_i} = \frac{\partial K_i}{\partial\dot{\varphi}_i} = \mu_i\gamma_i^2\rho_i^2\dot{\varphi}_i,\qquad \theta_i,\qquad P_{\theta_i} = \frac{\partial K_i}{\partial\dot{\theta}_i} = \mu_i\gamma_i^2\rho_i^2\cos^2\varphi_i\dot{\theta}_i,\qquad i = 1, 2,$$

можно написать в следующей форме:

$$\dot{\rho}_i = \frac{\partial H_i}{\partial P_{\rho_i}},\qquad \dot{P}_{\rho_i} = -\frac{\partial H_i}{\partial\rho_i} + \frac{\dot{\mu}_i}{\mu_i}P_{\rho_i};$$

$$\dot{\varphi}_i = \frac{\partial H_i}{\partial P_{\varphi_i}},\qquad \dot{P}_{\varphi_i} = -\frac{\partial H_i}{\partial\varphi_i} + \frac{\dot{\mu}_i}{\mu_i}P_{\varphi_i};$$

$$\dot{\theta}_i = \frac{\partial H_i}{\partial P_{\theta_i}},\qquad \dot{P}_{\theta_i} = -\frac{\partial H_i}{\partial\theta_i} + \frac{\dot{\mu}_i}{\mu_i}P_{\theta_i};$$

соответственно

$$H_i = \frac{1}{2\mu_i\gamma_i^2}\left[\left(P_{\rho_i} - \mu_i\gamma_i\dot{\gamma}_i\rho_i\right)^2 + \frac{P_{\varphi_i}^2}{\rho_i^2} + \frac{P_{\theta_i}^2}{\rho_i^2\cos^2\varphi_i}\right] - U_i^*;$$

$$U_1^* = f\,\frac{m_1 m_0}{\gamma_1\rho_1} + \frac{1}{2}(b_1\gamma_1^2 + \mu_1\dot{\gamma}_1^2)\rho_1^2 + R_1;$$

$$U_2^* = f\,\frac{m_2(m_0+m_1)}{\gamma_2\rho_2} + \frac{1}{2}(b_2\gamma_2^2 + \mu_2\dot{\gamma}_2^2)\rho_2^2 + R_2.$$

Вводя новые импульсы

$$P_{\rho_i} = \psi_i\tilde{P}_{\rho_i},\qquad P_{\varphi_i} = \psi_i\tilde{P}_{\varphi_i},\qquad P_{\theta_i} = \psi_i\tilde{P}_{\theta_i},\qquad \psi_i = \psi_i(t) = \frac{\mu_i}{\mu_{i0}} = \frac{\mu_i(t)}{\mu_i(t_0)},$$

Репозиторий КарГУ

напишем уравнения движения в канонической форме

$$\dot{\rho}_i = \frac{\partial \tilde{H}_i}{\partial \tilde{P}_{\rho_i}}, \qquad \dot{\varphi}_i = \frac{\partial \tilde{H}_i}{\partial \tilde{P}_{\varphi_i}}, \qquad \dot{\theta}_i = \frac{\partial \tilde{H}_i}{\partial \tilde{P}_{\theta_i}};$$
$$\dot{\tilde{P}}_{\rho_i} = -\frac{\partial \tilde{H}_i}{\partial \rho_i}, \qquad \dot{\tilde{P}}_{\varphi_i} = -\frac{\partial \tilde{H}_i}{\partial \varphi_i}, \qquad \dot{\tilde{P}}_{\theta_i} = -\frac{\partial \tilde{H}_i}{\partial \theta_i}, \tag{6}$$

где

$$\tilde{H}_i = \tilde{H}_{i0} + \tilde{H}_{i1}; \tag{7}$$

$$\tilde{H}_{10} = \frac{\psi_1}{2\mu_1\gamma_1^2}\left[\left(\tilde{P}_{\rho_1} - \frac{\mu_1\gamma_1\dot{\gamma}_1}{\psi_1}\rho_1\right)^2 + \frac{\tilde{P}_{\varphi_1}^2}{\rho_1^2} + \frac{\tilde{P}_{\theta_1}^2}{\rho_1^2\cos^2\varphi_1}\right] -$$
$$- f\frac{m_1 m_0}{\psi_1\gamma_1\rho_1} - \frac{1}{\psi_1}(b_1\gamma_1^2 + \mu_1\dot{\gamma}_1^2)\rho_1^2;$$
$$\tilde{H}_{20} = \frac{\psi_2}{2\mu_2\gamma_2^2}\left[\left(\tilde{P}_{\rho_2} - \frac{\mu_2\gamma_2\dot{\gamma}_2}{\psi_2}\rho_2\right)^2 + \frac{\tilde{P}_{\varphi_2}^2}{\rho_2^2} + \frac{\tilde{P}_{\theta_2}^2}{\rho_2^2\cos^2\varphi_2}\right] - \tag{8}$$
$$- f\frac{m_2(m_0 + m_1)}{\psi_2\gamma_2\rho_2} - \frac{1}{\psi_2}(b_2\gamma_2^2 + \mu_2\dot{\gamma}_2^2)\rho_2^2;$$

$$\tilde{H}_{11} = -\frac{1}{\psi_1}R_1, \qquad \tilde{H}_{21} = -\frac{1}{\psi_2}R_2. \tag{9}$$

Если $R_1 = R_2 = 0,$ то уравнения (6)–(9) определяют невозмущенное движение и интегрируются методом Гамильтона-Якоби [5, 8]. Причем постоянные интегрирования

$$\alpha_{1i}, \quad \alpha_{2i}, \quad \alpha_{3i}, \quad \beta_{1i}, \quad \beta_{2i}, \quad \beta_{3i}, \quad i = 1,2, \tag{10}$$

есть аналоги соответствующих элементов Якоби в классической задаче двух тел постоянной массы. При $H_{i1} = 0,$ $(R_i = 0)$ каждая система уравнений (6)–(7) определяет апериодическое движение по квазиконическому сечению [5]

$$r_i = \gamma_i(t)\rho_i, \qquad \rho_i = \frac{p_i}{1 + e_i\cos\upsilon_i}, \qquad \upsilon_i = u_i - \omega_i, \qquad i = 1,2;$$

$$p_i = a_i(1 - e_i^2), \qquad \dot{\rho}_i = \dot{\rho}_i(t) = \frac{1}{\mu_{i0}\gamma_i^2(t)}\cdot\frac{\tilde{\beta}_i}{\sqrt{p_i}}e_i\sin\upsilon_i, \qquad \dot{u}_i = \frac{1}{\mu_{i0}\gamma_i^2(t)}\cdot\frac{\tilde{\beta}_i\sqrt{p_i}}{\rho_i^2};$$

$$\tilde{\beta}_1^2 = f\cdot\mu_1(t_0)m_1(t_0)m_0(t_0), \qquad \tilde{\beta}_2^2 = f\cdot\mu_2(t_0)m_2(t_0)[m_0(t_0) + m_1(t_0)];$$

$$tg\frac{\upsilon_i}{2} = \frac{\sqrt{1+e_i}}{\sqrt{1-e_i}}tg\frac{E_i}{2}, \qquad e_i < 1, \qquad E_i - e_i\sin E_i = M_i;$$

$$M_i = n_i\left[\varphi_i(t) - \varphi_i(\tau_i)\right],\ n_i = \frac{\tilde{\beta}_i}{\mu_{i0}a_i^{3/2}},$$

где $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ — первообразные функции $\gamma_1^{-2}(t)$ и $\gamma_2^{-2}(t)$ соответственно. Величины

$$a_i, \quad e_i, \quad \omega_i, \quad \Omega_i, \quad i_i, \quad \varphi_i(\tau_i) \tag{11}$$

элементы орбиты — аналоги соответствующих кеплеровских элементов и они связаны с выражением (10) по формулам:

$$-2\alpha_{1i} = \frac{\tilde{\beta}_i^2}{\mu_{i0}a_i}, \quad \alpha_{2i} = \tilde{\beta}_i\sqrt{p_i}, \quad \alpha_{3i} = \tilde{\beta}_i\sqrt{p_i}\cos i_i;$$
$$\beta_{1i} = -\varphi_i(\tau_i), \qquad \beta_{2i} = \omega_i, \qquad \beta_{3i} = \Omega_i. \tag{12}$$

Координаты и скорости двух тел с приведенными массами $\mu_1(t), \mu_2(t)$ в системе координат Якоби могут быть записаны в следующем виде:

Репозиторий КарГУ

$$x_i = \gamma_i \rho_i \left[\cos u_i \cdot \cos \Omega_i - \sin u_i \cdot \sin \Omega_i \cdot \cos i_i \right];$$
$$y_i = \gamma_i \rho_i \left[\cos u_i \cdot \sin \Omega_i + \sin u_i \cdot \cos \Omega_i \cdot \cos i_i \right]; \qquad (13)$$
$$z_i = \gamma_i \rho_i \left[\sin u_i \cdot \sin i_i \right], \qquad r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2;$$

$$\dot{x}_i = \left(\frac{\dot{\gamma}_i}{\gamma_i} + \frac{\dot{\rho}_i}{\rho_i} \right) x_i + \gamma_i \rho_i \dot{u}_i \cdot \left[-\sin u_i \cdot \cos \Omega_i - \cos u_i \cdot \sin \Omega_i \cdot \cos i_i \right];$$
$$\dot{y}_i = \left(\frac{\dot{\gamma}_i}{\gamma_i} + \frac{\dot{\rho}_i}{\rho_i} \right) y_i + \gamma_i \rho_i \dot{u}_i \cdot \left[-\sin u_i \cdot \sin \Omega_i + \cos u_i \cdot \cos \Omega_i \cdot \cos i_i \right]; \qquad (14)$$
$$\dot{z}_i = \left(\frac{\dot{\gamma}_i}{\gamma_i} + \frac{\dot{\rho}_i}{\rho_i} \right) z_i + \gamma_i \rho_i \dot{u}_i \cdot \left[\cos u_i \cdot \sin i_i \right].$$

При $R_1 \neq 0 \ (H_{11} \neq 0)$, $R_2 \neq 0 \ (H_{12} \neq 0)$ уравнения (6)–(9) в системе переменных (10) как уравнения возмущенного имеют вид:

$$\dot{\alpha}_{1k} = \frac{\partial \tilde{R}_1}{\partial \beta_{1k}}, \qquad \dot{\beta}_{1k} = -\frac{\partial \tilde{R}_1}{\partial \alpha_{1k}};$$
$$\dot{\alpha}_{2k} = \frac{\partial \tilde{R}_2}{\partial \beta_{2k}}, \qquad \dot{\beta}_{2k} = -\frac{\partial \tilde{R}_2}{\partial \alpha_{2k}}, \qquad k = 1, 2, 3,$$

где

$$\tilde{R}_i = \frac{1}{\psi_i} R_i(t, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{13}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \beta_{21}, \beta_{22}, \beta_{23}), \qquad i = 1, 2.$$

Тогда можно ввести различные канонические переменные, такие как аналоги канонических элементов Делоне

$$L_i, \quad G_i, \quad H_i, \quad l_i, \quad g_i, \quad h_i, \quad i = 1, 2,$$

посредством формул

$$-2\alpha_{1i} = \frac{\tilde{\beta}_i^4}{\mu_{i0} L_i^2}, \qquad \alpha_{2i} = G_i, \qquad \alpha_{3i} = H_i; \qquad (15)$$
$$\beta_{1i} = \frac{l_i}{n_i} - \varphi_i(t), \qquad \beta_{2i} = g_i, \qquad \beta_{3i} = h_i.$$

Для наших исследований предпочтительны аналоги второй системы элементов Пуанкаре.

Уравнения возмущенного движения в аналогах второй системы элементов Пуанкаре. Аналоги второй системы элементов Пуанкаре [5, 7]:

$$\Lambda_i, \quad \lambda_i, \quad \xi_i, \quad \eta_i, \quad p_i, \quad q_i, \quad i = 1, 2, \qquad (16)$$

определяются следующими формулами:

$$\Lambda_i = L_i, \ \lambda_i = l_i + g_i + h_i;$$
$$\xi_i = \sqrt{2(L_i - G_i)} \cos(g_i + h_i), \ \ \eta_i = -\sqrt{2(L_i - G_i)} \sin(g_i + h_i); \qquad (17)$$
$$p_i = \sqrt{2(G_i - H_i)} \cos h_i, \ \ q_i = -\sqrt{2(G_i - H_i)} \sin h_i.$$

Согласно формулам (12), (15) элементы Пуанкаре связаны с апериодическим движением по квазиконическому сечению (13)–(14). Уравнения возмущенного движения имеют вид:

$$\dot{\Lambda}_i = \frac{\partial R_i^*}{\partial \lambda_i}, \qquad \dot{\xi}_i = \frac{\partial R_i^*}{\partial \eta_i}, \qquad \dot{p}_i = \frac{\partial R_i^*}{\partial q_i};$$
$$\dot{\lambda}_i = -\frac{\partial R_i^*}{\partial \Lambda_i}, \quad \dot{\eta}_i = -\frac{\partial R_i^*}{\partial \xi_i}, \quad \dot{q}_i = -\frac{\partial R_i^*}{\partial p_i}, \quad i = 1, 2.$$

Рассмотрим нерезонансный случай и, осредняя возмущающие функции по λ_i, получим уравнения вековых возмущений

$$\dot{\Lambda}_1 = 0, \qquad \dot{\Lambda}_2 = 0;$$

Репозиторий КарГУ

$$\dot{\xi}_i = \frac{\partial R_{i\,век}}{\partial \eta_i}, \qquad \dot{p}_i = \frac{\partial R_{i\,век}}{\partial q_i};$$
$$\dot{\eta}_i = -\frac{\partial R_{i\,век}}{\partial \xi_i}, \quad \dot{q}_i = -\frac{\partial R_{i\,век}}{\partial p_i}, \quad i = 1, 2, \tag{18}$$

где $R_{1век}$, $R_{2век}$ — соответствующие вековые части следующих выражений:

$$R_1^* = \frac{1}{\gamma_1^2(t)} \cdot \frac{\tilde{\beta}_1^4}{2\mu_{10} L_1^2} + \frac{1}{\psi_1}\left[-\frac{b_1}{2}\gamma_1^2\rho_1^2 + f\left(\frac{m_0 m_2}{r_{02}} + \frac{m_1 m_2}{r_{12}} - \frac{m_2(m_0+m_1)}{\gamma_2\rho_2} \right) \right];$$

$$R_2^* = \frac{1}{\gamma_2^2(t)} \cdot \frac{\tilde{\beta}_2^4}{2\mu_{20} L_2^2} + \frac{1}{\psi_2}\left[-\frac{b_2}{2}\gamma_2^2\rho_2^2 + f\left(\frac{m_0 m_2}{r_{02}} + \frac{m_1 m_2}{r_{12}} - \frac{m_2(m_0+m_1)}{\gamma_2\rho_2} \right) \right] -$$
$$-\frac{\mu_2}{\psi_2}\left[(2\dot{\nu}_1\dot{x}_1 + \ddot{\nu}_1 x_1)x_2 + (2\dot{\nu}_1\dot{y}_1 + \ddot{\nu}_1 y_1)y_2 + (2\dot{\nu}_1\dot{z}_1 + \ddot{\nu}_1 z_1)z_2 \right].$$

Разложение возмущающей функции. Для вычисления вековых частей возмущенных функций необходимо вычислить вековую часть следующих величин:

$$F_{век} = \left[\frac{m_0 m_2}{r_{02}} + \frac{m_1 m_2}{r_{12}} - \frac{m_2(m_0+m_1)}{\gamma_2\rho_2} \right]_{век} = \left[\frac{m_1 m_2}{r_{12}} \right]_{век};$$

$$F_{\rho век} = \left[\frac{b_1\gamma_1^2}{2\psi_1}\rho_1^2 + \frac{b_2\gamma_2^2}{2\psi_2}\rho_2^2 \right]_{век};$$

$$V_{век} = \frac{\mu_2}{\psi_2}[(2\dot{\nu}_1\dot{x}_1 + \ddot{\nu}_1 x_1)x_2 + (2\dot{\nu}_1\dot{y}_1 + \ddot{\nu}_1 y_1)y_2 + (2\dot{\nu}_1\dot{z}_1 + \ddot{\nu}_1 z_1)z_2]_{век}.$$

Предположим, что элементы e_i, i_i достаточно малые. Таким образом, можно разложить возмущающую функцию в ряд по малым параметрам e_i, i_i и учитывать только члены второго порядка включительно. В отличие от двух планетные задачи трех тел массы $m_1(t)$, $m_2(t)$ не предполагаются малыми.

В аналогах второй системы элементов Пуанкаре вековые выражения для $R_{1век}$, $R_{2век}$ имеют вид:

$$R_{1век} = \frac{1}{\gamma_1^2(t)} \cdot \frac{\tilde{\beta}_1^4}{2\mu_{10}\Lambda_1^2} + \frac{1}{\psi_1}\left[-\frac{b_1}{2}\frac{\gamma_1^2\mu_0^2}{\Lambda_1^4}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{\xi_1^2+\eta_1^2}{\Lambda_1}\right) + F_{век} \right]; \tag{19}$$

$$R_{2век} = \frac{1}{\gamma_2^2(t)} \cdot \frac{\tilde{\beta}_2^4}{2\mu_{20}\Lambda_2^2} + \frac{1}{\psi_2}\left[-\frac{b_2}{2}\frac{\gamma_2^2\mu_0^2}{\Lambda_2^2}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{\xi_2^2+\eta_2^2}{\Lambda_2}\right) + F_{\sec} \right] - V_{век}, \tag{20}$$

где

$$V_{век} = \frac{9\Lambda_1\Lambda_2\mu_2\gamma_2(p_1p_2+q_1q_2)(2\dot{\gamma}_1\dot{\nu}_1+\gamma_1\ddot{\nu}_1)}{16\mu_{10}\mu_{20}\psi_2\sqrt{p_1^2+q_1^2}\sqrt{p_2^2+q_2^2}}\sqrt{(\eta_1^2+\xi_1^2)(\eta_2^2+\xi_2^2)}\sqrt{(4\Lambda_1-\eta_1^2-\xi_1^2)(4\Lambda_2-\eta_2^2-\xi_2^2)};$$

$$F_{век} = \left[\frac{m_1 m_2}{r_{12}} \right]_{век}. \tag{21}$$

Вычисление $F_{век}$ требует много времени и большой работы. Значение формулы (21) получено с помощью системы аналитических вычислений «Mathematica» [9]. Эти выражения очень громоздкие и труднообозримые, следовательно, запишем конечное выражение в виде:

$$F_{\sec} = \sum_{i=1}^{534}\Pi_i^*(t)P_i(э_k) + \sum_{j=1}^{3}\tilde{\Pi}_j(\Lambda_1,\Lambda_2,t),$$

где $э_k = э_k\ (\xi_1, \eta_1, p_1, q_1, \xi_2, \eta_2, p_2, q_2)$. Подставляя уравнения (19)–(20) в (18), получим

$$\dot{\xi}_1 = \Pi_1(t)\eta_1 + \Pi_2(t)\eta_2; \quad \dot{\eta}_1 = \Pi_1(t)\xi_1 + \Pi_2(t)\xi_2;$$
$$\dot{\xi}_2 = \Pi_3(t)\eta_1 + \left[\Pi_4(t) + \Phi_1(t, э_k)\right]\eta_2; \quad \dot{\eta}_2 = \Pi_3(t)\xi_1 + \left[\Pi_4(t) + \Phi_1(t, э_k)\right]\xi_2; \tag{22}$$

Репозиторий КарГУ

$$\dot{p}_1 = \Pi_5(t)q_1 + \Pi_6(t)q_2; \quad \dot{q}_1 = \Pi_5(t)p_1 + \Pi_6(t)p_2;$$
$$\dot{p}_2 = \Pi_8(t)q_1 + \left[\Pi_7(t) + \Phi_2(t, э_k)\right]q_2; \quad \dot{q}_2 = \Pi_8(t)p_1 + \left[\Pi_7(t) + \Phi_2(t, э_k)\right]p_2; \tag{23}$$

где

$$\Pi_1(t) = \frac{-24\Lambda_2^4\mu_{10}^4\mu_1\gamma_1\ddot{\gamma}_1 + f\Lambda_1^4 m_1 m_2\{12k_1\Lambda_1^2[k_1\Lambda_1^2 C_0\mu_{20}^2 - \Lambda_2^2\mu_{10}\mu_{20}(B_0 + k_2C_1)] + k_2\Lambda_2^4\mu_{10}^2[3k_2(10C_0 - 3C_2) - 4B_1]\}}{16\Lambda_1^5\Lambda_2^4\mu_{10}^2\psi_1};$$

$$\Pi_2(t) = -\frac{fk_2m_1m_2\{6(k_1^3\Lambda_1^4\mu_{20}^2 + k_2^2\Lambda_2^4\mu_{10}^2)(6C_0 - C_2) - k_1\Lambda_1^2\Lambda_2^2\mu_{10}\mu_{20}[2k_1(B_2 + 18B_0) + 3k_2C_1(4 + 3k_1)]\}}{32k_1^2\Lambda_1^{5/2}\Lambda_2^{5/2}\mu_{10}\mu_{20}\psi_1};$$

$$\Pi_3(t) = -\frac{fk_2m_1m_2\{6(k_1^3\Lambda_1^4\mu_{20}^2 + k_2^2\Lambda_2^4\mu_{10}^2)(6C_0 - C_2) - k_1\Lambda_1^2\Lambda_2^2\mu_{10}\mu_{20}[2k_1(B_2 + 18B_0) + 3k_2C_1(4 + 3k_1)]\}}{32k_1^2\Lambda_1^{5/2}\Lambda_2^{5/2}\mu_{10}\mu_{20}\psi_2};$$

$$\Pi_4(t) = \frac{-24k_1^4\Lambda_1^4\mu_{20}^4\mu_2\gamma_2\ddot{\gamma}_2 + fk_2\Lambda_2^4 m_1m_2\{12k_2\Lambda_2^2[k_2^2\Lambda_2^2C_0\mu_{10}^2 - k_1^2\Lambda_1^2\mu_{10}\mu_{20}(B_0 + k_2C_1)] - k_1^4\Lambda_1^4\mu_{20}^2[4B_1 + 3k_2(3C_2 - 10C_0)]\}}{16\Lambda_1^5\Lambda_2^4k_1^4\mu_{20}^2\psi_2};$$

$$\Pi_5(t) = -\frac{fk_2B_1m_1m_2}{8\Lambda_1\psi_1}, \quad \Pi_6(t) = \frac{fk_2B_1m_1m_2}{8\sqrt{\Lambda_1}\sqrt{\Lambda_2}\psi_1}, \quad \Pi_7(t) = -\frac{fk_2B_1m_1m_2}{8\Lambda_2\psi_2}, \quad \Pi_8(t) = \frac{fk_2B_1m_1m_2}{8\sqrt{\Lambda_1}\sqrt{\Lambda_2}\psi_2};$$

$$\Phi_1(t, э_k) = \frac{2(\eta_2^2 - 2\Lambda_2 + \xi_2^2)V_{\sec}}{(\eta_2^2 + \xi_2^2)(4\Lambda_2 - \eta_2^2 - \xi_2^2)}, \; \Phi_2(t, э_k) = \frac{(p_1q_2 - q_1p_2)V_{\sec}}{(p_2^2 + q_2^2)(p_1p_2 + q_1q_2)}.$$

Выражения

$$A_0 = \frac{4\mu_0}{\Lambda_2^2\pi}F(\alpha), \quad A_1 = \frac{4\mu_0}{\Lambda_2^2\alpha\pi}[F(\alpha) - E(\alpha)], \quad A_2 = \frac{2}{3}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)A_1 - \frac{1}{3}A_0;$$

$$B_0 = \frac{(1+\alpha^2)\alpha}{(1-\alpha^2)^2}A_0 - \frac{2\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2}A_1, \quad B_1 = \frac{2\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2}A_0 - \frac{(1+\alpha^2)\alpha}{(1-\alpha^2)^2}A_1, \quad B_2 = \frac{(1+\alpha^2)\alpha}{(1-\alpha^2)^2}A_0 - \frac{2(1+\alpha^2)^2 - 6\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2}A_1;$$

$$C_0 = \frac{(3 + 10\alpha^2 + 3\alpha^4)\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2}A_0 - \frac{2\alpha^2(1+\alpha+\alpha^3)}{(1-\alpha^2)^2}A_1, \quad C_1 = \frac{8\alpha^3(1+\alpha^2)}{3(1-\alpha^2)^4}A_0 - \frac{\alpha^2(1+14\alpha^2+\alpha^4)}{3(1-\alpha^2)^4}A_1;$$

$$C_2 = \frac{(1 + 22\alpha^2 + \alpha^4)\alpha^2}{3(1-\alpha^2)^4}A_0 - \frac{2\alpha^2(1 + 5\alpha^2 + 5\alpha^4 + \alpha^6)}{3(1-\alpha^2)^4}A_1 -$$

коэффициенты Лапласа [7]; $F(\alpha)$ — эллиптический интеграл первого рода; $E(\alpha)$ — эллиптический интеграл второго рода, a

$$\alpha = \alpha(t) = \alpha_0 m_{00}\cdot\frac{m_1}{m_0(m_0 + m_1)}; \quad \alpha_0 = \frac{a_{10}}{a_{20}} = const; \quad m_{00} = m_0(t_0); \quad m_{10} = m_1(t_0);$$

$$k_1 = k_1(t) = m_{00}\cdot\frac{m_1}{m_0(m_0 + m_1)}; \quad k_2 = k_2(t) = \frac{m_1}{m_0}\cdot\frac{m_{00}}{m_{00} + m_{10}}.$$

Используя метод Пикара, получим решения уравнений (22)–(23) в виде:

$$э_k(t) = э_k(t_0) + \int_{t_0}^{t}\Pi_i^{**}(t, э_k(t_0))dt, \tag{24}$$

где $\Pi_i^{**}(t, э_k)$ — правые части этих уравнений; $э_k$ — элементы ξ_i, η_i, p_i, q_i и $э_{k0}$ — их значения в начальный момент времени.

Заключение. Решения (24) позволяют анализировать эволюцию аналогов эксцентриситетов e_1, e_2, наклонностей i_1, i_2, аргумента перицентров ω_1, ω_2 и движения долготы восходящих узлов Ω_1, Ω_2, долготы перицентров π_1, π_2. Аналитические выражения этих элементов имеют вид:

$$e_i^2 = \frac{\xi_i^2 + \eta_i^2}{\Lambda_i}, \quad \sin^2 i_i = \frac{p_i^2 + q_i^2}{\Lambda_i}, \quad i = 1, 2;$$

$$\Omega_i = -arctg\frac{q_i}{p_i}, \quad \pi_i = -arctg\frac{\eta_i}{\xi_i}, \quad \omega_i = \pi_i - \Omega_i.$$

Репозиторий КарГУ

Полученные приближенные общие аналитические решения дают возможность сделать аналитический и численный анализ проблемы в абсолютной системе координат. В частности, можно исследовать движение центра масс, который будет реализован в следующей статье.

Работа частично финансирована МОН РК. Грант № 0688/ГФ научно-технических программ и проектов Комитета науки (2012–2014 гг.).

References

1 *Omarov T.B.* The dynamics of gravitating systems of Metagalaxy. — Almaty: Nauka, 1975.

2 *Omarov T.B.* (Editor). Non-Stationary Dynamical Problems in Astronomy. — New-York: Nova Science Publ. Inc., 2002.

3 *Bekov A.A., Omarov T.B.* The theory of Orbits in Non-Stationary Stellar Systems // Astron. and Astrophys. Transactions. — 2003. — Vol. 22. — P. 145.

4 *Lukyanov L.G.* Dynamical evolution of the orbits of stars in close binary systems with conservative mass exchange // Astron. Journal. — 2008. — № 8 (85). — P. 755–768.

5 *Minglibayev M.Zh.* Dynamics of nonstationary gravitating systems. — Almaty: Publ. Kazakh National University, 2009. — 209 p.

6 *Lukyanov L.G.* The equations of the motion of many-body problem with variable masses // Astron. Journal. — Is. 1. — 1983. —№ 60. — P.181–194.

7 *Charlier C.L.* Celestial mechanics. — Moscow: Nauka, 1966. — 628 p.

8 *Minglibaev M.Zh.* To the canonical perturbation theory in celestial mechanics of the bodies with variable masses // Proceedings of the Astroph. Inst. AN KazSSR. — Vol. 50. — Almaty: Gylym, 1992. — P. 71–78.

9 *Prokopenya A.N.* Solution of physical problems with the use of MATHEMATICA. — Brest: BSTU Publishing, 2005. — 260 p.

М.Дж.Минглибаев, Г.М.Маемерова

Үш дене мәселесінің автономды емес дифференциалдық теңдеулерін «Mathematica» жүйесімен шешу

Қарастырылып жатқан мәселенің қозғалыс теңдеулері квазиконустық қима бойымен апериодтық қозғалыстың оскулярлы элементтері арқылы алынды. Ұйытқушы функциялардың ғасырлық бөліктері канондық оскулярлы элементтерде «Mathematica» жүйесінің көмегімен есептелді. Бірінші ретті ғасырлық ұйытқулар Пикар тәсілімен алынды.

M.DZh. Minglibayev, G.M.Mayemerova

The solution of non-autonomous differential equations of the three body problem using system «Mathematica»

The motion equations of the investigated problem are obtained in the osculating elements of an aperiodic motion at the quasiconic section. Secular parts of the perturbing functions are calculated in terms of the osculating canonical elements with the use of the system «Mathematica». Full first-order secular perturbations are obtained by the method of Picard.

Репозиторий КарГУ