

References

1. Varnets Y., Maas U., Dibbl R. *Gorenje*. Physical and chemical aspects, modeling, experiments, formation of polluting substances. — M.: Phizmatlit, 2003.
2. Hakimzjanov G.S., Shokin Y.I. Differential of the scheme on adaptive grids: In 3ch. P.1: Problems for the equations in private derivatives from one spatial variable. — Novosibirsk: NSU, 2005.
3. Zeldovich I.B., Barenblatt G.I., Librovich V.B., Mahviladze G.M. *Mathematical theory of burning and explosion*. — M.: Science, 1980.
4. Verwer J.G., Blom J.G., Sanz-Serna J.M. An adaptive moving grid method for one-dimensional systems of partial differential equations // *J.Comput. Phys.* — 1989. — Vol. 82. — №. 2. — P. 454–486.
5. Hakimzjanov G.S., Shokin Y.I., Barahnin V.B., Shokina N.Y. Numerical modeling of currents of a liquid with superficial waves. — Novosibirsk: Publishing house of the Siberian Branch of the Russian Academy of Science, 2001. — 394 p.

УДК 519.6:551.46

Схема предиктор-корректор на подвижной сетке для расчета распространения фронта пламени II

The predictor-corrector scheme on mobile net for calculation of spreading of flame front II

Алибиев Д.Б.¹, Хахимзянов Г.С.²¹Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: dalibiev@mail.ru);²Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия (E-mail: khak@ict.nsc.ru)

Мақалада жанармайдың жану негізіндегі оттың таралуы нәтижесі сандық модельдеу арқылы көрсетілген. Жанармай жану кезіндегі оттың жазыңқы кескінін жану аймағындағы бейнесінің ақырлы-айырымдық құрылысы предиктор-корректор негізінде анықталған. Жұмыстың ерекшелігі, аппроксимациялық тұтқырлығы сандық есептеуде жану аймағымен араласуына кедергі жасауында. Ұсақ торды қолдану кезінде жану отының таралу жылдамдығы теориялық мәніне өте жақын екенін байқаймыз. Сонымен бірге предиктор-корректор құрылысы бейімделген торда көрсетілген. Оттың таралу процесінің қарапайым математикалық моделінің санау алгоритмі жасалған.

In the article results of computational modeling of process of flame spreading in fuel mixture at basis of the finite-difference predictor-corrector scheme, approximative viscosity of with prevents from rise of numerical oscillation and promotes to receive plain profile of parameters in neighbourhood of flame front. It is shown that estimated speed of flame spreading is near by theoretical meaning at use of small nets, and the predictor-corrector scheme on adaptive net is cited. The algorithm of calculation of process of flame spreading within the bounds of easy mathematical model is composed.

4. Схема предиктор-корректор на адаптивной сетке

4.1 Для того чтобы построить схему на подвижной сетке, надо переписать задачу (30)–(32) в новых координатах (q, t) , связанных с исходными координатами (x, t) гладким преобразованием

$$x = x(q, t); \quad 0 \leq q \leq 1; \quad 0 \leq t \leq T, \quad (43)$$

с положительным якобианом $J(g) = x_q$, которое взаимно-однозначно отображает единичный отрезок $\bar{Q} = [0, 1]$ на область решения $\bar{\Omega} = [0, 1]$. В координатах (q, t) уравнение (30) можно записать в дивергентной и недивергентной формах:

$$(Jv)_t + (f - x_t v)_q = v \left(\frac{v_q}{J} \right)_q + Jg(v); \quad (44)$$

$$v_t + \frac{f_q - x_t v_q}{J} = \frac{v}{J} \left(\frac{v_q}{J} \right)_q + g(v), \quad (45)$$

где $v(q, t) = u(x(q, t), t)$.

На этапе предиктора производится расщепление уравнения (45) на два уравнения, первое из которых описывает конвективный перенос, а во втором учитывается диффузионный процесс и источник член. Уравнение переноса [1]

$$v_t + \frac{f_q - x_t v_q}{J} = 0 \quad (46)$$

аппроксимируется в полуцелых узлах равномерной сетки $\bar{Q}_h = \{q_j = jh, j = 0, \dots, N\}$;

$$\frac{v_{j+1/2}^* - \frac{1}{2}(v_j^n + v_{j+1}^n)}{\tau_{j+1/2}^*} + \left(\frac{f_q - x_t v_q}{J} \right)_{j+1/2}^n = 0, \quad (47)$$

где $\tau_{j+1/2}^* = \frac{\tau}{2}(1 + \theta_{j+1/2}^n)$; τ – шаг по времени; $h = \frac{1}{N}$ – шаг сетки \bar{Q}_h ; N – количество узлов сетки;

$$x_{t, j+1/2}^n = \frac{x_{t, j}^n + x_{t, j+1}^n}{2}, \quad x_{t, j}^n = \frac{x_j^{n+1} - x_j^n}{\tau}, \quad J_{j+1/2}^n = x_{q, j+1/2}^n,$$

x_j^n – узлы неравномерной подвижной сетки $\bar{\Omega}_h$, являющейся образом при отображении (43) сетки \bar{Q}_h .

Второе уравнение

$$v_t = \frac{v}{J} \left(\frac{v_q}{J} \right)_q + g(v)$$

аппроксимируется в целых узлах

$$\frac{v_j^* - \frac{1}{2}(v_{j+1/2}^* + v_{j-1/2}^*)}{\frac{\tau}{2}} = \frac{v}{J_j h} \left(\frac{v_{q, j+1/2}^*}{J_{j+1/2}^n} - \frac{v_{q, j-1/2}^*}{J_{j-1/2}^n} \right) + g \left(\frac{v_{j-1/2}^* + v_{j+1/2}^*}{2} \right), \quad (48)$$

где

$$J_j^n = \frac{J_{j-1/2}^n + J_{j+1/2}^n}{2}.$$

На шаге корректор аппроксимируется уравнение (44) в дивергентной форме

$$\frac{(Jv)_j^{n+1} - (Jv)_j^n}{\tau} + (f^* - x_t v^*)_{q, j} = \frac{v}{h} \left(\frac{v_{q, j+1/2}^*}{J_{j+1/2}^n} - \frac{v_{q, j-1/2}^*}{J_{j-1/2}^n} \right) + J_j^* g(v_j^*), \quad (49)$$

где

$$J_j^n = \frac{J_j^n + J_j^{n+1}}{2}.$$

Для сокращения записи в формулах (47)–(49) использованы обозначения $\phi_{q, j+1/2}$ для разностных производных в полуцелых узлах от сеточных функций ϕ_j , определенных в целых узлах, и для производных в целых узлах $\psi_{q, j}$ от функций $\psi_{j+1/2}$, определенных в полуцелых узлах, например:

$$v_{q, j+1/2}^n = (v_{j+1}^n - v_j^n) / h, \quad f_{q, j}^* = (f_{j+1/2}^* - f_{j-1/2}^*) / h.$$

Из вида уравнения (85) следует, что, кроме предикторных величин $v_j^*, v_{j+1/2}^*$, необходимо вычислить еще одну предикторную величину — поток $f_{j+1/2}^*$. Умножая уравнение (46) на $a(v) = f_v(v)$, приходим к следующему уравнению для потока f :

$$f_t + \frac{a(f_q - x_t v_q)}{J} = 0,$$

которое будем аппроксимировать аналогично (47)

$$\frac{f_{j+1/2}^* - \frac{1}{2}(f_j^n + f_{j+1}^n)}{\tau_{j+1/2}^*} + \left(\frac{a(f_q - x_t v_q)}{J} \right)_{j+1/2}^n = 0. \quad (50)$$

Для завершения описания предлагаемой схемы осталось указать способ вычисления сеточных функций $a_{j+1/2}^n$ и $\theta_{j+1/2}^n$. В случае нелинейного уравнения переноса ($v=0, g=0$ в уравнении (30)) доказательство свойства монотонности схемы предиктор-корректор существенно опирается [2] на следующее равенство для производных от сеточных функций f и v :

$$f_{q,j+1/2}^n = (av_q)_{j+1/2}^n, \quad (51)$$

аналогичное равенству $f_q = a(v)v_q$ для функций непрерывного аргумента. Аппроксимация

$$a_{j+1/2}^n = \begin{cases} \frac{f_{j+1}^n - f_j^n}{v_{j+1}^n - v_j^n}, & \text{если } v_{j+1}^n \neq v_j^n; \\ a(v_j^n), & \text{если } v_{j+1}^n = v_j^n \end{cases} \quad (52)$$

гарантирует выполнение условия (51) для рассмотренной здесь схемы предиктор-корректор, аппроксимирующей уравнение конвекции-диффузии (30), и позволяет записать уравнения (47), (50) с конвективной частью, в которую входят лишь разностные производные $v_{q,j+1/2}^n$ от решения:

$$\frac{v_{j+1/2}^* - \frac{1}{2}(v_j^n + v_{j+1}^n)}{\tau_{j+1/2}^*} + \left(\frac{\bar{a}v_q}{J} \right)_{j+1/2}^n = 0; \quad (53)$$

$$\frac{f_{j+1/2}^* - \frac{1}{2}(f_j^n + f_{j+1}^n)}{\tau_{j+1/2}^*} + \left(\frac{a\bar{a}v_q}{J} \right)_{j+1/2}^n = 0, \quad (54)$$

где $\bar{a}_{j+1/2}^n = a_{j+1/2}^n - x_{t,j+1/2}^n$. Эти производные определяют поведение сеточной функции θ . Известно [2], что в случае нелинейного уравнения переноса схема предиктор-корректор имеет второй порядок аппроксимации и при выполнении условия (51) сохраняет монотонность численного решения, если функция $\theta_{j+1/2}^n$ определяется через производные $v_{q,j+1/2}^n$ следующим образом:

$$\theta_k^n = \begin{cases} 0 & \text{при } |\tilde{g}_k^n| \leq |\tilde{g}_{k-s}^n|, \quad \tilde{g}_k^n \cdot \tilde{g}_{k-s}^n \geq 0; \\ \theta_{0,k}^n \left(1 - \frac{\tilde{g}_{k-s}^n}{\tilde{g}_k^n} \right) & \text{при } |\tilde{g}_k^n| > |\tilde{g}_{k-s}^n|, \quad \tilde{g}_k^n \cdot \tilde{g}_{k-s}^n \geq 0; \\ \theta_{0,k}^n & \text{при } \tilde{g}_k^n \cdot \tilde{g}_{k-s}^n < 0, \end{cases} \quad (55)$$

где $k = j + 1/2, s = \text{sgn} \bar{a}_{j+1/2}^n, \aleph = \frac{\tau}{h}, \tilde{g}_{j+1/2}^n = \left| \bar{a}_{j+1/2}^n \right| \left(1 - Cr_{j+1/2}^n \right) v_{q,j+1/2}^n, \theta_{0,j+1/2}^n = \frac{1}{Cr_{j+1/2}^n} - 1, Cr_{j+1/2}^n \equiv \frac{\aleph \left| \bar{a}_{j+1/2}^n \right|}{J_{j+1/2}^n} < 1$.

Поэтому далее и для уравнения конвекции-диффузии (30) мы будем использовать функцию θ , заданную по формуле (55).

4.2 Приведем результаты тестирования описанной схемы на задаче (30)–(32) с точным решением (33). Расчеты проводились с функцией θ , вычисляемой по формуле (55). Как и прежде, $k_{zan} = 0,5; v = 2 \cdot 10^{-4}$. Управляющую функцию $w(x) > 0$ берем в соответствии с методом эквираспределения. Можно ожидать, что погрешность численного решения будет велика в области, где велика производная решения, поэтому выбираем

$$w(x) = 1 + \alpha |u_x|.$$

На рисунке 8 показаны графики точного и численного решений на сетке с количеством узлов $N = 100$. В этом случае подбираем коэффициент при произвольной управляющей функции $\alpha = 0,05$.

Видимо, что в этом случае схема дает очень хорошее приближение. Второй опыт проводится на сетке с $N = 40$, при этом наиболее близкими численное и точное решения были при $\alpha = 0,5$.

Таким образом, использование адаптивной сетки помогло добиться очень точных результатов при сохранении монотонности численного решения, причем схема на подвижной сетке позволяет уменьшить количество узлов практически на порядок по сравнению с равномерной сеткой.

5. Алгоритм расчета процесса распространения пламени в рамках простейшей математической модели

5.1 Численное моделирование становится все более важным элементом исследования процессов горения и проектирования различных устройств, использующих процесс горения. Химически реагирующий поток будет полностью описан, если в каждой точке области, занятой им, и в каждый момент времени известны давление p , плотность ρ , температура T , скорость потока u и концентрация каждого компонента. Эти параметры потока могут изменяться в пространстве и во времени, причиной чего являются конвекция, химические реакции, молекулярный перенос (теплопроводность, диффузия, вязкость). Поэтому математическая модель процесса горения должна учитывать каждый из перечисленных процессов [3].

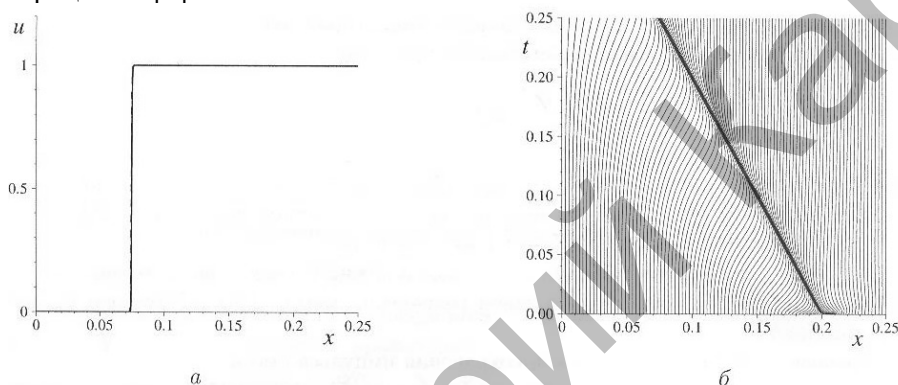


Рис. 8. *а* — графики точного (сплошная линия) и численного (штриховая линия) решений в момент времени $t=0,25$, полученные на адаптивной сетке, $N=100$; *б* — траектории узлов сетки

Процессы молекулярного переноса, т.е. диффузия, теплопроводность и вязкость, имеют в своей основе одно явление: соответствующие физические свойства распространяются в среде за счет движения молекул рассматриваемой среды. Диффузия представляет собой перенос массы за счет градиентов концентрации, вязкость — перенос импульса за счет градиентов скорости, теплопроводность — перенос энергии за счет градиентов температуры.

В технике горение, как правило, используется в поточных системах. Горючие и окислитель непрерывно подаются в камеру сгорания, а из нее отводятся продукты горения — горячий газ. В соответствии с этим ставится математическая постановка задачи о горении двухкомпонентной горючей смеси (воздух + метан) в канале постоянного сечения ($0 \leq x \leq l$), открытом с обоих концов. Через левое (входное) сечение канала смесь подается с постоянной скоростью u_0 , температурой T_0 и концентрацией горючего Y_0 . Вблизи выходного сечения располагается зона горения ($x_2 \leq x \leq l$) с адиабатической температурой горения смеси T_q и нулевой концентрацией горючего. В силу малой концентрации горючего теплофизические параметры смеси полагаются постоянными, равными их значению во входном сечении канала. Система уравнений, описывающая одномерное движение, реагирующее на нестандартное течение, имеет следующий вид [2]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0; \quad (56)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p)}{\partial x} = 0; \quad (57)$$

$$\frac{\partial \rho T}{\partial t} + \frac{\partial \rho u T}{\partial x} = \frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{Q_p Y W}{c_p}; \quad (58)$$

$$\frac{\partial \rho Y}{\partial t} + \frac{\partial \rho u Y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho D \frac{\partial Y}{\partial x} \right) - \rho Y W, \quad (59)$$

где u — скорость газа; Y — массовая концентрация горючего в смеси; ρ, T, p — плотность, температура, давление газа соответственно, при этом

$$p = \frac{\rho R_0 T}{M} = \rho R T, \quad (60)$$

R_0 — универсальная газовая постоянная ($R_0 = 8314.3$ [Дж / (Кмоль К)]); M — молекулярный вес смеси (для рассматриваемой двухкомпонентной смеси $M = 28$ [кг / Кмоль]), $R = R_0 / M$. Другие обозначения будут пояснены позже.

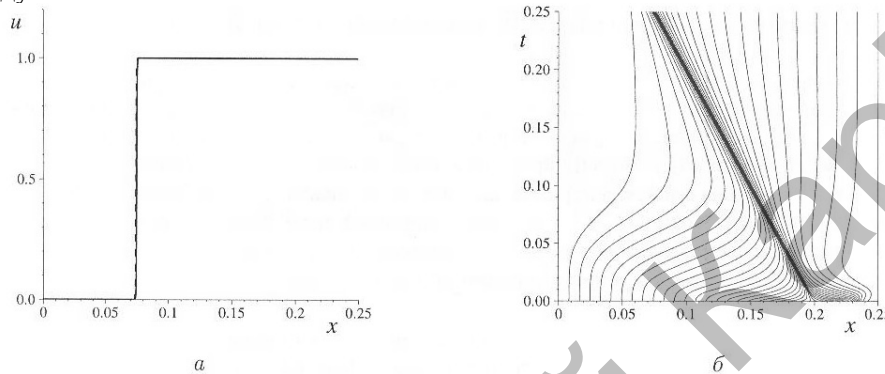


Рис. 9. *а* — графики точного (сплошная линия) и численного (штриховая линия) решений в момент времени $t = 0,25$, полученные на адаптивной сетке, $N = 40$; *б* — траектории узлов сетки

Поскольку химические реакции не создают и не уничтожают массу, то она сохраняется, и уравнение (56) выражает собой закон сохранения массы. Называется оно уравнением неразрывности (рис. 9).

Уравнение (57) описывает закон сохранения импульса смеси. Масса горючего изменяется за счет его сгорания. Уравнение (59) описывает изменение массы горючего через концентрацию горючего. Оно включает в себя член $\partial \rho u Y / \partial x$, отвечающий за конвективный перенос горючего, и диффузионный член с коэффициентом диффузии D . Из экспериментальных данных следует, что число Льюиса $Le = \lambda / D \rho c_p$ можно положить равным единице. Тогда

$$\rho D = \frac{\lambda}{c_p}, \quad (61)$$

где λ [Дж / (смК)] — коэффициент теплопроводности смеси; c_p [Дж / (кгК)] — удельная теплоемкость смеси при постоянном давлении (количество тепла, необходимое для нагревания при постоянном давлении единичной массы смеси на один градус). Последний член в уравнении (59) отвечает за расходование горючего во время химической реакции горения. Здесь W — скорость обобщенной одностадийной химической реакции горения углеводородного топлива (метана), которая сильно зависит от температуры. Эта температурная зависимость может быть описана законом Аррениуса [4]:

$$W = k_w e^{-\frac{E}{R_0 T}}, \quad (62)$$

где k_w — предэкспоненциальный множитель; E — энергия активации. Смысл предэкспоненциального множителя заключается в том, что он примерно равен скорости реакции, если энергия активации мала или температура очень высока. Энергия активации соответствует энергии связи в молекуле, т.е. энергию активации можно отождествить с энергией, которую необходимо иметь сталкивающимся молекулам, чтобы разрушить химические связи реагирующих веществ.

И наконец, уравнение (58) описывает изменение температуры смеси за счет конвективного переноса, теплопроводности и горения смеси. В источниковый член, описывающий изменение температуры при горении, входит коэффициент Q , называемый тепловым эффектом реакции и определяемый по формуле

$$Q = \frac{T_g - T_0}{Y_0} c_p, \quad (63)$$

где T_g — адиабатическая температура горения смеси, т.е. температура, получающаяся при сгорании смеси при условии, что потерями тепла в окружающую среду можно пренебречь.

5.2 В настоящем параграфе мы рассмотрим упрощенную модель горения, уравнения которой получаются в предположении постоянства давления, плотности и пренебрежения скоростью газа. Тогда с учетом равенства (61) получаем следующие уравнения:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{c_p \rho_0} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{QYW}{c_p}; \quad (64)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\lambda}{c_p \rho_0} \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - YW. \quad (65)$$

В начальный момент времени температура и концентрация полагаются постоянными

$$T(x, 0) = T_0; \quad Y(x, 0) = Y_0. \quad (66)$$

Преобразуем уравнения (64), (65), введя новые зависимые и независимые переменные. Пусть $\bar{Y} = Y/Y_0$. Тогда уравнения примут вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{c_p \rho_0} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{QY_0}{c_p} \bar{Y}W; \quad (67)$$

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial t} = \frac{\lambda}{c_p \rho_0} \frac{\partial^2 \bar{Y}}{\partial x^2} - \bar{Y}W. \quad (68)$$

Если ввести новую переменную $\bar{x} = x / \sqrt{\frac{\lambda}{c_p \rho_0}}$, то

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial \bar{x}^2} \frac{\lambda}{c_p \rho_0}; \quad \frac{\partial^2 \bar{Y}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \bar{Y}}{\partial \bar{x}^2} \frac{\lambda}{c_p \rho_0}.$$

Тогда получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial \bar{x}^2} + \frac{QY_0}{c_p} \bar{Y}W; \quad (69)$$

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \bar{Y}}{\partial \bar{x}^2} - \bar{Y}W. \quad (70)$$

Введем новую функцию для температуры $\bar{T} = T / \frac{QY_0}{c_p}$ и приходим к окончательному виду уравнения приближенной модели (где опущена черта над переменными):

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \bar{Y}W; \quad (71)$$

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \bar{Y}}{\partial \bar{x}^2} - \bar{Y}W. \quad (72)$$

Здесь $W = k_w e^{-\frac{E}{R_0 T}}$.

Далее функцию W будем брать в виде, приведенном в статье [4]:

$$W = 3.52 \cdot 10^6 \cdot e^{-4/T},$$

оттуда же возьмем начальные данные

$$T(x, 0) = 0,2; \quad Y(x, 0) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (73)$$

Краевые условия будем брать следующим образом. На левом краю

$$T(0, t) = 0,2; \quad Y(0, t) = 1; \quad t \geq 0 \quad (74)$$

и на правом краю

$$T(1, t) = \mu_t(t) = \begin{cases} 0,2 + \frac{t}{0,0002}; & t \leq 0,0002; \\ 1,2, & t \geq 0,0002; \end{cases} \quad \frac{\partial Y}{\partial x}(1, t) = 0; \quad t \geq 0. \quad (75)$$

5.3 Опишем численный алгоритм для решения поставленной задачи. Поскольку уравнения (71), (72) аналогичны скалярному уравнению (30), в котором $f \equiv 0$, то для численного решения будем использовать разностную схему, описанную в §3, аппроксимирующую систему (71), (72), записанную в векторном виде [5]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g, \quad (76)$$

где

$$u = \begin{pmatrix} T \\ Y \end{pmatrix}; \quad g = \begin{pmatrix} Y W \\ -Y W \end{pmatrix}.$$

Первое уравнение шага предиктор с учетом того, что $f \equiv 0$, запишется в следующем виде:

$$u_{j+1/2}^* = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_j^n). \quad (77)$$

Второе уравнение шага предиктор имеет вид

$$\frac{u_j^* - \frac{1}{2}(u_{j-1/2}^* + u_{j+1/2}^*)}{\frac{\tau}{2}} = \frac{u_{j-1}^* - 2u_j^* + u_{j+1}^*}{h^2} + g\left(\frac{u_{j-1/2}^* + u_{j+1/2}^*}{2}\right). \quad (78)$$

На этапе корректор имеем следующее уравнение:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \frac{u_{j-1}^* - 2u_j^* + u_{j+1}^*}{h^2} + g(u_j^*), \quad (79)$$

в котором определяются искомые величины u_j^{n+1} , определенные в целых узлах x_j .

Краевые и начальные условия для разностной задачи записываются в следующем виде:

$$T_0^n = 0, 2; \quad Y_0^n = 1; \quad T_N^n = \mu_l(t^n); \quad \frac{Y_N^n - Y_{N-1}^n}{h} = 0;$$

$$T_j^0 = 0, 2; \quad Y_j^0 = 1; \quad j = 0, \dots, N.$$

5.4 Приведем результаты расчетов для представленной схемы на равномерной сетке. Шаг по времени выбирался согласно формуле $\tau = k_{\text{зан}} h$. В расчетах использовалось значение $k_{\text{зан}} = 0,005$.

На рисунке 10 а приведен график численного решения на сетке с количеством узлов $N = 1600$ для двух моментов времени. Получили удовлетворительные результаты. В начальный момент присутствуют небольшие осцилляции в области горения, но со временем они разглаживаются.

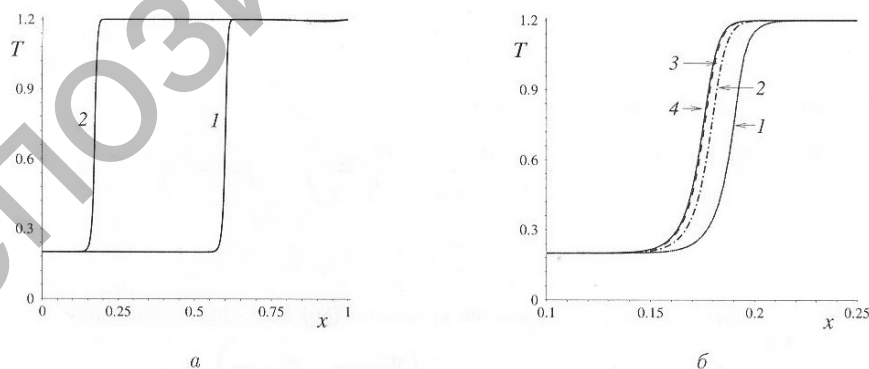


Рис. 10. а — графики численного решения в момент времени $t = 0,003$ и $t = 0,006$, полученные на равномерной сетке с числом узлов $N = 1600$; б — графики численного решения в момент времени $t = 0,006$, полученные на различных равномерных сетках: 1 – $N = 400$; 2 – $N = 800$; 3 – $N = 1600$; 4 – $N = 3200$; б) представлены результаты расчетов, полученные на разных сетках. Здесь наглядно видно, что при увеличении числа узлов равномерной сетки наблюдается сходимость

5.5 На адаптивной сетке алгоритм для системы двух уравнений будем строить согласно случаю с одним уравнением (§4). Запишем уравнения (76) в координатах (q, t) , которые по-прежнему связаны с исходными координатами (x, t) гладким преобразованием

$$x = x(q, t); \quad 0 \leq q \leq 1; \quad 0 \leq t \leq T,$$

с положительным якобианом $J(q) = x_q$, которое в нашем случае взаимнооднозначно отображает единичный отрезок $\bar{Q} = [0, 1]$. В новых координатах дивергентная и недивергентная формы уравнения (76) будут выглядеть так:

$$(Jv)_t - (x_t v)_q = \left(\frac{v_q}{J} \right)_q + Jq(v); \quad (80)$$

$$v_t - \frac{x_t v_q}{J} = \frac{1}{J} \left(\frac{v_q}{J} \right)_q + g(v), \quad (81)$$

где $v(q, t) = u(x(q, t), t)$.

На первом этапе предиктора уравнение конвективного переноса

$$v_t - \frac{x_t v_q}{J} = 0 \quad (82)$$

аппроксимируется в полужелтых узлах равномерной сетки $\bar{Q}_h = \{q_j = jh, j = 0, \dots, N\}$:

$$\frac{v_{j+1/2}^* - \frac{1}{2}(v_j^n + v_{j+1}^n)}{\tau_{j+1/2}^*} - \left(\frac{x_t v_q}{J} \right)_{j+1/2}^n = 0. \quad (83)$$

На втором этапе предиктора в уравнении (81) учитывается диффузионный процесс и источник-ый член, т.е. берется уравнение

$$v_t = \frac{1}{J} \left(\frac{v_q}{J} \right)_q + g(v).$$

Оно, как и раньше, аппроксимируется в целых узлах

$$\frac{v_j^* - \frac{1}{2}(v_{j+1/2}^* + v_{j-1/2}^*)}{\frac{\tau}{2}} = \frac{1}{J_j^n h} \left(\frac{v_{q,j+1/2}^*}{J_{j+1/2}^n} - \frac{v_{q,j-1/2}^*}{J_{j-1/2}^n} \right) + g \left(\frac{v_{q,j-1/2}^* + v_{q,j+1/2}^*}{2} \right), \quad (84)$$

где $J_j^n = \frac{J_{j-1/2}^n + J_{j+1/2}^n}{2}$.

На шаге корректора аппроксимируется уравнение (80) в дивергентной форме

$$\frac{(Jv)_j^{n+1} - (Jv)_j^n}{\tau} - (x_t v^*)_{q,j} = \frac{1}{h} \left(\frac{v_{q,j+1/2}^*}{J_{j+1/2}^n} - \frac{v_{q,j-1/2}^*}{J_{j-1/2}^n} \right) + J_j^* g(v_j^*), \quad (85)$$

где $J_j^* = \frac{J_j^n + J_j^{n+1}}{2}$. Обозначим $\bar{a}_{j+1/2}^n = -x_{t,j+1/2}^n$. Это позволяет далее использовать ту же запись сеточной функции θ вида (55), сохраняющую монотонность. При этом уравнение (83) с конвективной частью записывается в виде

$$\frac{v_{j+1/2}^* - \frac{1}{2}(v_j^n + v_{j+1}^n)}{\tau_{j+1/2}^*} + \left(\frac{\bar{a} v_q}{J} \right)_{j+1/2}^n = 0. \quad (86)$$

5.6 Приведем некоторые результаты расчетов на адаптивных сетках для входных данных (73)–(75), взятых из [4]. На рисунке 11 а показаны траектории узлов подвижной сетки, которые использовались для расчета распространения фронта пламени в модельной задаче. Решение этой задачи тако-

во, что после некоторого промежутка времени, связанного с процессом зажигания, происходит выход на квазистационарный режим горения с почти постоянной скоростью распространения скачков температуры и концентрации. Эти скачки распространяются справа налево, и подвижная сетка хорошо отслеживает движение этих скачков.

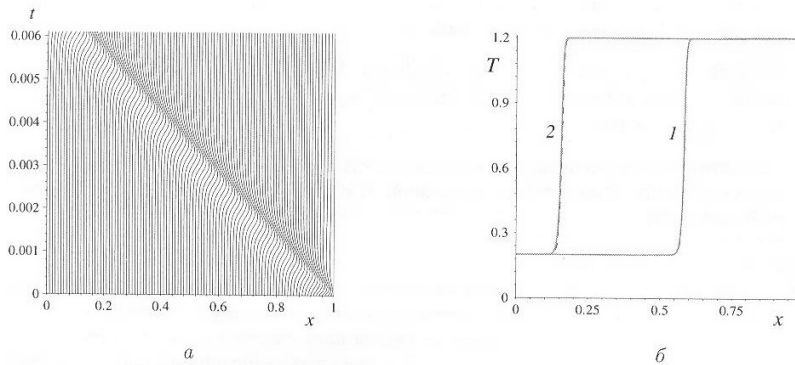


Рис. 11. *a* — траектории узлов сетки; *б* — графики температуры в момент времени $t = 0,003$ (1) и $t = 0,006$ (2), полученные на равномерной (сплошная линия) сетке с $N = 3000$ и на адаптивной (штриховая линия) сетке с $N = 300$

В этой задаче преимущество использования адаптивных сеток проявляется наиболее ярко. На рисунке 11 *б* показаны профили температуры в двух различных моментах времени. При этом расчет на адаптивной сетке выполнялся с числом узлов в 10 раз меньшим, чем на равномерной сетке. Тем не менее результат расчета на адаптивной сетке не уступает по точности полученному на равномерной. Причина этого кроется в том, что адаптивная сетка имеет локальные сгущения узлов в окрестности скачков температуры и концентрации, т.е. именно там, где требуется хорошая разрешимость.

Отметим также, что используемый метод эквираспределения дает существенно более гладкие сетки по сравнению с сетками, которые использовались в работе [5]. Следствием этого, а также использования описанных выше процедур монотонизации явились и более качественные профили численного решения.

Заключение

В работе предложен метод численного решения задач, уравнения которых содержат правую часть (источниковый член), зависящую нелинейным образом от решения и быстро меняющуюся в малых подобластях. Численный метод основан на явно-неявной конечно-разностной схеме предиктор-корректор. При моделировании проводится расщепление по физическим процессам, причем уравнение на первом шаге предиктора аппроксимируется явным образом в полуцелых узлах, а на втором — неявным образом в целых, при этом источниковый член включается во второй шаг предиктора. Предложен способ выбора схемного параметра, который позволяет избавиться от паразитных осцилляций, появляющихся при численных расчетах по другим схемам.

Построенная методика обобщена на случай адаптивных сеток, для построения которых использовался метод эквираспределения.

Разработанный метод численного решения отработан на модельных задачах, таких как линейное и нелинейное уравнения конвекции-диффузии с источниковым членом. Кроме того, решена модельная задача о горении двухкомпонентной смеси в канале постоянного сечения как на равномерной, так и на адаптивной сетках.

Результаты математического моделирования показали, что использование адаптивных сеток позволяет получать численное решение с таким качеством, которое может быть достигнуто на равномерных сетках только при числе узлов, на порядок большем.

References

1. Varnets Y., Maas U., Dibbl R. *Gorenje*. Physical and chemical aspects, modeling, experiments, formation of polluting substances. — М.: Phizmatlit, 2003.
2. Hakimzhanov G.S., Shokin Y.I. Differential of the scheme on adaptive grids: In 3ch. P. 1: Problems for the equations in private derivatives from one spatial variable. — Novosibirsk: NSU, 2005.

3. Zeldovich I.B., Barenblatt G.I., Librovich V.B., Mahviladze G.M. Mathematical theory of burning and explosion. — М.: Science, 1980.
4. Verwer J.G., Blom J.G., Sanz-Serna J.M. An adaptive moving grid method for one-dimensional systems of partial differential equations // J.Comput. Phys. — 1989. — Vol. 82. — №. 2.
5. Hakimzjanov G.S., Shokin Y.I., Barahnin V.B., Shokina N.Y. Numerical modeling of currents of a liquid with superficial waves. — Novosibirsk: Publishing house of the Siberian Branch of the Russian Academy of Science, 2001. — 394 p.

УДК 510–67 — 519.24, 519.6

О метриках для высказываний экспертов с вероятностями с привлечением моделей теории Setting metric's for expert statements with probabilities applied models theory

Викентьев А.А.

*Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Россия (E-mail: orumbayevan@mail.ru)*

Ықтималдықтары бар тұжырымдар есептеу формулаларымен берілген, эксперттер тұжырымдарына теория модельдерін қолданып, метриканы енгізу әдістері ұсынылды. Экспертті жүйелер мен білім базасын құруда, кластеризациялауда және эксперттердің ықтималды тұжырымдарын келістіру есептерінің шешімін табуда зерттеу қажет. Нәтижелер шексіз тасымалды формулаларға енгізіледі.

The paper discusses probabilities' logical expert statements represented as the formulas of Sentence Logic. Methods for setting metrics on such formulas are offered and the entered metric's properties are investigated. The research can be applied to solving the problems of the best reconciliation of expert statements, to constructing the decision functions in pattern recognition and building the expert systems.

Введение. В настоящее время проявляется все больший интерес к анализу экспертной информации, заданной в виде вероятностных логических высказываний экспертов, интересны исследования о высказываниях экспертов, представленных формулами исчисления высказываний с вероятностями. Возникают задачи об алгоритмах распознавания закономерностей, согласования логических (экспертных) знаний и их кластеризации [1–6]. Для этого необходимы метрики на знаниях. В работе рассматриваются логические высказывания экспертов, представленные формулами исчисления высказываний (ИВ) с вероятностями. Вопросами введения расстояний на высказываниях экспертов и их использовании занимаются профессор Г.С.Лбов [2], д.т.н. В.Б.Бериков [5, 6] и профессор Н.Г.Загоруйко. Для формул ИВ без вероятностей были введены различные метрики в [2–4].

В данной работе предлагаются способы задания расстояний на формулах-высказываниях с вероятностями с привлечением моделей теории, характеризующей изучаемую область. Устанавливаются свойства введенных расстояний. Для решения этой задачи используются вероятностный и теоретико-модельный подходы [2–5,7]. Результаты неоднократно доложены на международных конференциях в 2009, 2010 гг., в том числе на юбилейной конференции к 100-летию акад. Анатолия Ивановича Мальцева — выдающегося логика и алгебраиста, крупного ученого по алгебре, теории моделей, алгоритмам, нумерации, алгоритмическим проблемам и применениям методов математической логики.

Основные определения. Будем рассматривать знания экспертов, представленные формулами ИВ с вероятностями (вероятностные высказывания), т.е. высказывания вида « φ с вероятностью p_φ », где φ — формула ИВ. Используем записи для различных таких высказываний:

$$B_i = \langle \varphi, p_\varphi \rangle, B_j = \langle \psi, p_\psi \rangle.$$

Пусть Σ — база знаний, состоящая из формул ИВ (в Σ содержатся все формулы, с которыми будут работать эксперты). Можно предполагать в дальнейшем, что Σ конечно, хотя это и не обязательно,