УДК 517.96

Б.Т.Калимбетов, Б.И.Ескараева

Международный казахско-турецкий университет им. К.А.Ясави, Туркестан
(E-mail: bkalimbetov@mail.ru)

Контрастные структуры в уравнениях с нулевым спектром предельного оператора и необратимым спектральным значением ядра

В статье рассмотрена задача Коши для систем интегро-дифференциальных уравнений при наличии нулевых точек спектра предельного оператора и особенностей в интегральном члене. Спектральные особенности интегрального оператора порождают в решении исходной задачи существенно особые сингулярности по малому параметру, которые и описывают внутренний пограничный слой. Для построения математической теории, формулировки критерия правильности математического описания пограничного слоя и развития регулярной теории для сингулярно возмущенных задач использована идея метода регуляризации. Показана процедура регуляризации интегрального оператора и доказана разрешимость итерационных задач.

Ключевые слова: пограничный слой, асимптотическое решение, возмущение, регуляризация, предельный оператор, итерационная задача.

Введение

Математическая теория пограничного слоя связана с правильным описанием сингулярной зависимости решения соответствующей задачи от малого параметра, т.е. со структурой решений по малому параметру. В свою очередь описание сингулярной зависимости решения от малого параметра связано со свойствами спектра предельного оператора или со свойствами корней характеристических уравнений, и, следовательно, в каждой задаче необходимо выделить базис сингулярностей. Спектр оператора, как мы знаем, может быть или дискретным, или непрерывным. Отсюда возникает дискретное или континуальное описание сингулярной зависимости от соответствующего малого параметра, которое требует различать дискретный или континуальный пограничный слой [1].

Приступаем к изучению математической теории пограничного слоя для линейной сингулярно возмущенной интегро-дифференциальной системы в случае, когда область, в которой изучается задача, в рассматриваемом случае это отрезок $[0,T]$, компактна. Задача с тождественной необратимостью предельного оператора рассмотрена в [2], где была изучена задача Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений со слабой нелинейностью, предельная система для которой, в отличие от настоящего случая, однородна. Кроме того, ненулевые точки спектра могли быть только в левой полуплоскости. Для решения построена асимптотика типа пограничных функций. Сингулярно возмущенные системы с необратимым предельным оператором в случае, когда собственные значения могут быть чисто мнимыми, были рассмотрены в [3–7]. Кроме того, в последнее время стали появляться статьи, посвященные исследованию сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных систем с быстро изменяющимися ядрами [8–14]. В этих исследованиях обнаружено, что интегральные операторы с быстро убывающим ядром порождают в структуре решения исходной задачи новый тип сингулярностей по малому параметру, которые и описывают контрастные структуры. В настоящей работе рассматривается интегро-дифференциальная система с нулевыми значениями спектра в дискретных точках и спектральными особенностями ядра интегрального оператора.

Постановка задачи

Рассматривается следующая задача:

$$L_\varepsilon y(t,\varepsilon) \equiv \varepsilon \frac{dy}{dt} - A(t)y + \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu(x)dx} K(t,s)y(s,\varepsilon)ds = h(t),\ y(0,\varepsilon) = y^0,\ t \in [0,T], \qquad (1)$$

где $y(t,\varepsilon) = \{y_1,...,y_n\}$, а $A(t)$, $K(t,s)$ — матрицы-функции размерности $(n \times n)$; $h(t) = \{h_1,...,h_n\}$ — известная вектор-функция; $y^0 \in C^n$ — постоянный вектор, $\mu(t) \in C^\infty[0,T]$ — скалярная функция; $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Требуется построить регуляризованную асимптотику решений при $\varepsilon \to +0$.

С целью получения асимптотических представлений для функции $y(t,\varepsilon)$ в виде ряда по степеням ε потребуем выполнения следующих условий:

i) $A(t)\in C^{\infty}([0,T],C^{n^2})$, $h(t)\in C^{\infty}([0,T],C)$, $K(t,s)\in C^{\infty}(0\le s\le t\le T,C^{n^2})$.

Спектр $\{\lambda_j(t)\}$ оператора $A(t)$ при каждом $t\in[0,T]$ удовлетворяет следующим требованиям:

ii) $\lambda_j(t)\ne 0$, $j=\overline{1,p}$, $\lambda_i(t)\equiv 0$, $i=\overline{p+1,n}$, $p<n$;

iii) $\lambda_m(t)\equiv\mu(t)=-tk(t), k(t)\ne 0$, $k(t)\in C^{\infty}([0,T],R^1)$, $\lambda_m(t)\ne\lambda_j(t)$, $j=\overline{1,n}$, $\forall t\in\left[0,T\right]$.

Здесь скалярная функция $\mu(t)$, называемая спектральным значением ядра интегрального оператора, обращается в нуль в точке $t=0$. Она индуцирует в решении задачи (1) дополнительные быстро изменяющиеся компоненты, т.е. существующие особые сингулярности.

О разрешимости предельной системы

Основная трудность, возникающая при решении задач с вырожденным предельным оператором, заключается в том, что вырожденная система

$$0=A(t)\overline{y}+h(t) \tag{2}$$

не имеет решений вообще или у нее их бесчисленное множество. Поэтому заранее не ясно, к какому решению системы (2) стремится истинное решение $y(t,\varepsilon)$ задачи (1) (при $\varepsilon\to+0$). Это приводит к тому, что мы не можем с самого начала сказать, какие ограничения следует наложить на область определения функции $h(t)$, чтобы такая постановка была корректной. Естественно, эта трудность была бы преодолена, если бы нам удалось каким-нибудь образом найти предельное решение задачи (1). В 1976 г. И.С. Ломовым эта трудность была преодолена сравнительно просто [3[. Как известно, в этом случае система (2) разрешима, если выполнено условие $h\perp KerA^*$ при каждом $t\in[0,T]$. Следует отметить, что если $h(t)$ не удовлетворяет этим условиям ортогональности, то решение задачи (1) при естественном предположении $\mathrm{Re}\lambda\le 0$, хотя и существует, но будет неограниченно возрастать при $\varepsilon\to+0$.

Предположим, что вырожденная система (2) имеет решение. В этом случае правая часть $h(t)$ этой системы должна быть ортогональной ядру оператора $A^*(t)$, т.е.

$$(h(t),d_i(t))\equiv 0;\quad i=\overline{p+1,n};\quad \forall t\in[0,T], \tag{3}$$

где $d_i(t)$ — собственные векторы матрицы $A^*(t)$, отвечающие нулевому собственному значению $\lambda_i(t)\equiv 0$ и образующие базис ядра оператора $A^*(t)$.

Предполагаем также, что матрица $A(t)$ является оператором простой структуры [9]. В этом случае существует полная система собственных векторов $\{c_i(t)\}$ матрицы $A(t)$, причем нулевому собственному значению $\{\lambda_i(t)\}$ кратности $n-p$ отвечает $n-p$ собственных векторов $c_i(t)$, $i=\overline{p+1,n}$. Вырожденная система (2) будет иметь семейство решений

$$\overline{y}(t,\alpha_{p+1},...,\alpha_n)=\alpha_{p+1}(t)c_{p+1}(t)+...+\alpha_n(t)c_n(t)+\tilde{y}_0(t), \tag{4}$$

зависящее от $n-p$ произвольных скалярных функций $\alpha_i(t)$, определенных на отрезке [0,T]. Здесь $\tilde{y}_0(t)$ — частное решение системы (2), отвечающее правой части $h(t)$. Составим следующую систему уравнений $(i=\overline{p+1,n})$

$$(-\frac{d\overline{y}(t,\alpha_{p+1}(t),...,\alpha_n(t))}{dt},d_i(t))=0, \tag{5}$$

в которой $\overline{y}(t,\alpha_{p+1},...,\alpha_n)$ есть семейство (4). Семейство (5) — это система обыкновенных дифференциальных уравнений (порядка $n-p$) относительно произвольных функций $\alpha_i(t)$, $i=\overline{p+1,n}$. Зададим для (5) начальные условия

$$\alpha_i(0)=\sum_{k=1}^{n}c_{ik}^{(-1)}(0)(y_k^0-\tilde{y}_{0k}(0)),\ i=\overline{p+1,n}, \tag{6}$$

где через $c_{ik}^{(-1)}(t)$ обозначены элементы матрицы $C^{-1}(t)$, обратной к матрице $C(t)$, столбцами которой являются собственные векторы $c_i(t)$, а y_k^0 и $\tilde{y}_{0k}(0)$ — компоненты соответственно векторов y^0 и

$\widetilde{y}_0(0),\ \ i,k=\overline{1,n}.$ Покажем, что если задача (5)–(6) имеет решение на отрезке $[0,T]$, то функция (4) является предельным решением исходной задачи.

Важно заметить, что для нахождения предельного решения нужно решить систему (5)–(6). Как было сказано выше, такое решение существует. Итак, пусть

$$\overline{y}=\varphi(t)\equiv\alpha_{p+1}(t)c_{p+1}(t)+\ldots+\alpha_n(t)c_n(t)+\tilde{y}_0(t) \qquad (4')$$

— предельное решение задачи (1), в котором функции $\alpha_{p+1}(t),\ldots,\alpha_n(t)$ удовлетворяют задаче (5)–(6).

Частичная регуляризация задачи

Введем регуляризирующие переменные по ненулевым точкам спектра оператора $A(t)$:

$$\tau_j=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\lambda_j(x)dx\equiv\varphi_j(t,\varepsilon),\quad j=\overline{1,p}.$$

Кроме того, введем дополнительные регуляризирующие переменные, порождаемые интегральным членом системы (1):

$$\tau_m=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\lambda_m(x)dx\equiv\varphi_m(t,\varepsilon),\quad \sigma=e^{\frac{\varphi_m(t)}{\varepsilon}}\int\limits_0^t e^{-\frac{\varphi_m(x)}{\varepsilon}}dx\equiv\psi_{m+1}(t,\varepsilon).$$

Вместо искомой функции $y(t,\varepsilon)$ задачи (1) рассмотрим функцию $\tilde{y}(t,\tau,\sigma,\varepsilon)$ большего числа переменных $\tilde{y}(t,\tau,\sigma,\varepsilon)\big|_{\tau=\frac{\psi(t)}{\varepsilon},\sigma=\psi(t)/\varepsilon}\equiv y(t,\varepsilon)$, где $\tau=(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_p,\tau_m)$, $\psi=(\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_p,\psi_m,\psi_{m+1})$.

Тогда для функции $\widetilde{y}(t,\tau,\varepsilon)$ естественно поставить следующую задачу:

$$\tilde{L}_\varepsilon\tilde{y}(t,\tau,\sigma,\varepsilon)\equiv\varepsilon\frac{\partial\tilde{y}}{\partial t}+D_\lambda\tilde{y}+\lambda_m(t)\frac{\partial\tilde{y}}{\partial\tau_m}+\left[\lambda_m(t)\sigma+\varepsilon\right]\frac{\partial\tilde{y}}{\partial\sigma}-A(t)\tilde{y}-$$
$$-\int\limits_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^t\mu(x)dx}K(t,s)\tilde{y}(s,\varphi(s,\varepsilon),\psi(s,\varepsilon),\varepsilon)ds=h(t),\quad \tilde{y}(0,0,0,\varepsilon)=y^0, \qquad (7)$$

где $D_\lambda\equiv\sum\limits_{j=1}^p\lambda_j(t)\dfrac{d}{d\tau_j}-A(t).$

Однако задача (7) еще не является «расширенной» по отношению к исходной задаче (1), так как в ней не произведена регуляризация интегрального члена

$$Iy=\int\limits_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^t\mu(x)dx}K(t,s)\tilde{y}\big(s,\varphi(s,\varepsilon),\psi(s,\varepsilon),\varepsilon\big)ds. \qquad (8)$$

Полная регуляризация задачи

Для регуляризации интегрального оператора (8) надо описать класс M_ε, асимптотически инвариантный (при $\varepsilon\to+0$), относительно оператора I (см. [1]).

Введем сначала класс U следующим образом.

Определение 1. Будем говорить, что функция $y(t,\tau,\sigma)=\{y_1,\ldots,y_n\}$ принадлежит классу U, если она представима в виде суммы

$$y(t,\tau,\sigma)=y_0(t)+\sum_{j=1}^p y_j(t)e^{\tau_j}+y_m(t)e^{\tau_m}+y_{m+1}(t)\sigma \qquad (9)$$

с коэффициентами $y_i(t),y_m(t),y_{m+1}(t)\in C^\infty[0,T],\quad i=\overline{0,p}.$

В качестве класса M_ε возьмем сужения класса U при $\tau=\psi(t)/\varepsilon$. Докажем, что $U\big|_{\psi(t)/\varepsilon}$ инвариантно относительно интегрального оператора I.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (i)–(iii). Тогда класс $M_\varepsilon=U\big|_{\psi(t)/\varepsilon}$ асимптотически инвариантен относительно интегрального оператора I.

Доказательство. Подставляя (9) в (8), будем иметь

$$I_0(t,\varepsilon)=e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_m(x)dx}\int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s\lambda_m(x)dx}K(t,s)y_0(s)ds,\quad I_m(t,\varepsilon)=e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_m(x)dx}\int_0^t K(t,s)y_m(s)ds;$$

$$I_j(t,\varepsilon)=e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_m(x)dx}\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s[\lambda_j(x)-\lambda_m(x)]dx}K(t,s)y_j(s)ds,\quad j=\overline{1,p};$$

$$I_{m+1}(t,s)=e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_m(x)dx}\int_0^t K(t,s)y_{m+1}(s)\left(\int_0^s e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau\lambda_m(x)dx}d\tau\right)ds.$$

Надо показать, что интегралы, содержащие экспоненты, разлагаются в асимптотический ряд по степеням ε (при $\varepsilon\to+0$). Применяя операцию интегрирования по частям, будем иметь

$$I_0(t,\varepsilon)\equiv I_0(t,\varphi(t,\varepsilon),\psi(t,\varepsilon),\varepsilon)=e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_m(x)dx}\int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s\lambda_m(x)dx}\left\{\left[K(t,s)-K_0(t,0)\right]+K_0(t,0)\right\}ds=$$

$$=\psi(t,\varepsilon)K_0(t,0)+e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_m(x)dx}\int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s\lambda_m(x)dx}K_0^1(t,s)sds=K_0(t,0)\psi(t,\varepsilon)+\varepsilon e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_m(x)dx}\int_0^t\frac{K_0^1(t,s)}{\mu(s)}d\left(e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s\lambda_m(x)dx}\right)=$$

$$=K_0(t,0)\psi(t,\varepsilon)+\varepsilon e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_m(x)dx}\left[\frac{K_0^1(t,s)}{\mu(s)}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s\lambda_m(x)dx}\Bigg|_{s=0}^{s=t}-\int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s\lambda_m(x)dx}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{K_0^1(t,s)}{\mu(s)}\right)ds\right]=$$

$$=K_0(t,s)\psi(t,\varepsilon)+\varepsilon\frac{K_0^1(t,t)}{\mu(t)}e^{\varphi_m(t,\varepsilon)}-\varepsilon\frac{K_0^1(t,0)}{\mu(0)}-\varepsilon e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_m(x)dx}\int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s\lambda_m(x)dx}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{K_0^1(t,s)}{\mu(s)}\right)ds,$$

где $K_0(t,s)=K(t,s)y_0(s),\quad K_0^1(t,s)=(K_0(t,s)-K_0(t,0))/s.$

Итак, после однократного интегрирования по частям выделяются внеинтегральные члены, которые при $\tau=\varphi$ имеют вид слагаемых сумм (9), а интегральный член снова является интегралом типа $I_j(t,\varepsilon).$ Многократное интегрирование по частям приводит к формальному ряду

$$I_0(t,\tau,\sigma,\varepsilon)=K_0(t,s)\sigma+\varepsilon\left[\frac{K_0^1(t,t)}{\mu(t)}-\frac{K_0^1(t,0)}{\mu(0)}e^{\tau_m}\right]+\sum_{k=2}^{\infty}\varepsilon^k\left[v_k(t)+v_k(t)\sigma+v_{km}(t)e^{\tau_m}\right],\qquad(*)$$

где $\tau=\varphi(t)/\varepsilon,\ I_j^0=1/\lambda_j(s),\ I_j^{m-1}=(1/\lambda_j(s))(\partial/\partial s)\cdot I_j^m,\quad m\geq 1,\quad j=1,2$.

Регуляризация интегралов $I_j(t,\varepsilon),\ j=\overline{1,p},$ производится в работе [3]:

$$I_j(t,\tau,\sigma,\varepsilon)=\varepsilon\left[\frac{K_j(t,t)}{\lambda_j(t)-\lambda_m(t)}e^{\tau_j}-\frac{K_j(t,0)}{\lambda_j(0)-\lambda_m(0)}e^{\tau_m}\right]+\sum_{k=2}^{\infty}\varepsilon^k\left[v_{kj}(t)e^{\tau_j}+v_{km}(t)e^{\tau_m}\right],$$

где $K_j(t,s)\equiv K(t,s)y_j(s),\ j=\overline{1,p}.$

Интеграл $I_m(t,\varepsilon)$ уже регуляризован, т.е.

$$I_m(t,\varepsilon)\equiv I_0(t,\tau,\sigma,\varepsilon)=e^{\tau_m}\int_0^t K_m(t,s)ds,$$

где $K_m(t,s)\equiv K(t,s)y_m(s).$

Интеграл $I_{m+1}(t,\varepsilon)$ запишем в следующем виде:

$$I_{m+1}(t,\varepsilon)\equiv I_{m+1}(t,\varphi(t,\varepsilon),\psi(t,\varepsilon),\varepsilon)=e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_m(x)dx}\int_0^t\left(\int_0^s e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau\lambda_m(x)dx}d\tau\right)d\left(\widehat{K}_{m+1}(t,s)\right)=e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_m(x)dx}\left(\widehat{K}_{m+1}(t,s)\int_0^s e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau\lambda_m(x)dx}d\tau\right)\Bigg|_{s=0}^{s=t}-$$

$$-e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_m(x)dx}\int_0^t \widehat{K}_{m+1}(t,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \lambda_m(x)dx}ds = e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_m(x)dx}\int_0^t \widehat{K}_{m+1}(t,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \lambda_m(x)dx}ds =$$

$$= e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_m(x)dx}\widehat{K}_{m+1}(t,t)\int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \lambda_m(x)dx}ds - e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_m(x)dx}\int_0^t \widehat{K}_{m+1}(t,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \lambda_m(x)dx}ds =$$

$$= \widehat{K}_{m+1}(t,t)\psi(t,\varepsilon) - e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_m(x)dx}\int_0^t \widehat{K}_{m+1}(t,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \lambda_m(x)dx}ds,$$

где $K_{m+1}(t,s) = K(t,s)y_{m+1}(s), \quad \widehat{K}_{m+1}(t,s) = \int_0^s K_{m+1}(t,s)ds.$

Произведя операцию интегрирования по частям, получим интеграл типа $I_0(t,\varepsilon)$. С учетом регуляризации интегрального члена $I_0(t,\varepsilon)$. Получим следующее разложение для интеграла $I_{m+1}(t,\varepsilon)$:

$$I_{m+1}(t,\varepsilon) \equiv I_{m+1}(t,\tau,\sigma,\varepsilon) = \widehat{K}_{m+1}(t,t)\sigma - \varepsilon\frac{\widehat{K}^1_{m+1}(t,t)}{\mu(t)} + \varepsilon\frac{\widehat{K}^1_{m+1}(t,0)}{\mu(0)}e^{\tau_m} - \widehat{K}_{m+1}(t,0)\sigma + \sum_{k=2}^{\infty}\varepsilon^k\left[v_k(t) + v_{km}(t)e^{\tau_m} + v_{k,m+1}(t)\sigma\right],$$

где $\widehat{K}^1_{m+1}(t,s) = (\widehat{K}_{m+1}(t,s) - \widehat{K}_{m+1}(t,0))/s.$

Покажем, например, что ряд (*) сходится асимптотически при $\varepsilon \to +0$. Его частичная сумма

$$S_N(t,\varepsilon) = \sum_{m=0}^{N-1}(-1)^m\varepsilon^{m+1}\left[\left(I_j^m(K_j(t,s)y_j^{(k)}(s))\right)_{s=t}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_j(x)dx} - \left(I_j^m\left(K_j(t,s)y_j^{(k)}(s)\right)\right)_{s=0}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_m(x)dx}\right]$$

удовлетворяет равенству

$$I_j(t,\varepsilon) = S_N(t,\varepsilon) + (-1)^N\varepsilon^N\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \lambda_j(x)dx}\frac{\partial}{\partial s}\left(I_j^{N-1}(K_j(t,s)y_j(s))\right)ds, \quad j = 1,2,...,p,m.$$

Интегрируя по частям интеграл, стоящий в правой части этого равенства, будем иметь

$$I_j(t,\varepsilon) - S_N(t,\varepsilon) = (-1)^N\varepsilon^{N+1}\int_0^t\left(I_j^N(K_j(t,s)y_j(s))\right)d\left(e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \lambda_j(x)dx}\right) = (-1)^N\varepsilon^N\left\{\left[\left(I_j^{N-1}(K_j(t,s)y_j(s))\right)_{s=t}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_j(x)dx} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left(I_j^N(K_j(t,s)y_j(s))\right)_{s=0}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_m(x)dx}\right] - \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \lambda_j(x)dx}\frac{\partial}{\partial s}\left(I_j^N(K_j(t,s)y_j(s))\right)ds\right\}, \quad j = 1,2,\ldots,p.$$

В силу бесконечной дифференцируемости функции $K_j(t,s)$ на $0 \le s \le t \le T$ и $\lambda_j(t)$, $j = 1,2,\ldots,p,m$, на $[0,T]$, а также в силу равномерной ограниченности экспонент функции, стоящие во внешней фигурной скобке последнего равенства, равномерно ограничены при $(t,\varepsilon) \in [0,1] \times Re\tau_j \le 0$, $j = 1,2,...,p,m$. Следовательно,

$$\left\|J_j(t,\varepsilon) - S_N(t,\varepsilon)\right\|_{C[0,1]} \le C_N\varepsilon^{N+1},$$

где $C_N > 0$ — постоянная, не зависящая от ε при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ ($\varepsilon_0 > 0$ — достаточно мало). Это означает, что ряд (9) сходится к интегралу $I_j(t,\varepsilon)$ асимптотически при $\varepsilon \to +0$. Но тогда образ $Iy(t,\varepsilon)$ разлагается в асимптотический ряд:

$$Iy(t,\tau) = \sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^{m+1}\left\{\left[\left(I_j^m\left(K_j(t,s)y_j(s)\right)\right)_{s=t}e^{\tau_j} - \left(I_j^m\left(G(t,s)y_j(s)\right)\right)_{s=0}e^{\tau_m} + \int_0^t K_j(t,s)y_j(s)ds\right]\right\},$$

где $\tau = \psi(t)/\varepsilon$. Тем самым доказано, что класс M_ε асимптотически инвариантен относительно интегрального оператора I. Теорема 1 доказана.

Построим теперь расширение оператора I.

Пусть дан ряд

$$\tilde{y}(t,\tau,\sigma,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k y_k(t,\tau,\sigma) \tag{10}$$

с коэффициентами $y_k(t,\tau) \in C^\infty([0,1],C^n)$.

Для произвольного элемента (9) пространство U можно записать, что

$$Iy(t,\tau,\sigma)=R_0 y(t,\tau,\sigma)+\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(R_{\nu+1}y(t,\tau,\sigma)\right)\cdot\varepsilon^{\nu+1},$$

где через R_ν обозначены операторы порядка ν, действующие в U и определяемые формулами

$$R_0 y(t,\tau)=e^{\tau_m}\int_0^t K(t,s)y_m(s)ds;$$

$$R_{\nu+1}y(t,\tau)=(-1)^\nu\Big[(I_0^\nu(K(t,s)y_0(s)))_{s=t}-(I_0^\nu(K(t,s)y_0(s)))_{s=0}e^{\tau_m}+ \qquad (11)$$
$$+(I_j^\nu(K(t,s)y_j(s)))_{s=t}e^{\tau_j}-(I_j^\nu(K(t,s)y_j(s)))_{s=0}e^{\tau_m}\Big],\quad (\varepsilon^{-1}\psi(t),\quad \nu\ge 1\ ).$$

С учетом этих формул результат подстановки ряда (10) в интегральный оператор (8) можно записать в виде

$$\tilde{I}\tilde{y}=\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\sum_{s=1,r-s\ge 0}^{r}R_{r-s}y_s(t,\tau)\Big|_{\tau=\varepsilon^{-1}\psi(t)}.$$

Определение 2. Формальным расширением оператора *I* назовем оператор

$$\tilde{I}\tilde{y}(t,\tau,\varepsilon)\equiv\tilde{I}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k y_k(t,\tau)\right)=\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\sum_{s=1,r-s\ge 0}^{r}R_{r-s}y_s(t,\tau)\Big|_{\tau=\varepsilon^{-1}\psi(t)}.$$

Хотя расширение оператора $\tilde{I}$ построено формально, им вполне можно пользоваться для вычисления асимптотического решения $y_{\varepsilon N}(t)$ задачи (1) конечного порядка $N<\infty$.

С учетом (11) «расширенную» задачу (7) запишем в следующем виде:

$$\tilde{L}_\varepsilon\tilde{y}(t,\tau,\sigma,\varepsilon)\equiv\varepsilon\frac{d\tilde{y}}{dt}+D_\lambda\tilde{y}+\lambda_m(t)\frac{d\tilde{y}}{d\tau_m}+\left[\lambda_m(t)\sigma+\varepsilon\right]\frac{d\tilde{y}}{d\sigma}-A(t)\tilde{y}+R\tilde{y}=h(t),\ \tilde{y}(0,0,0,\varepsilon)=y^0, \qquad (12)$$

где R — интегральный оператор, определенный выше.

Подставим ряд (10) в систему (12) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε; получим задачи

$$Ly_0\equiv L_0y_0-R_0y_0=h(t),\quad y_0(0,0,0)=y^0; \qquad (\varepsilon^0)$$

$$Ly_1\equiv-\frac{\partial y_0}{\partial t}-\frac{\partial y_0}{\partial\sigma}+R_1y_0,\quad y_1(0,0,0)=0; \qquad (\varepsilon^1)$$

$$Ly_k\equiv-\frac{\partial y_{k-1}}{\partial t}-\frac{\partial y_{k-1}}{\partial\sigma}+R_ky_{k-1},\quad y_k(0,0,0)=0;\ k\ge 2, \qquad (\varepsilon^k)$$

где $L_0\equiv\sum_{j=0}^{p}\lambda_j(t)\frac{\partial}{\partial\tau_j}+\lambda_m(t)\frac{\partial}{\partial\tau_m}=\lambda_m(t)\sigma\frac{\partial}{\partial\sigma}-A(t),\ R_0,R_1,\ldots$ — интегральные операторы, определенные соотношением (11).

Разрешимость итерационных задач

Каждая из итерационных задач имеет вид

$$(L_0-R_0)y(t,\tau,\sigma)=h(t,\tau,\sigma),\quad y(0,0,0)=y^0, \qquad (13)$$

где $h(t,\tau,\sigma)$ — соответствующая правая часть.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (i)–(iii), и правая часть системы (13) принадлежит пространству U. Тогда для разрешимости этой системы в U необходимо и достаточно, чтобы

$$\left\langle h(t,\tau,\sigma),\nu_k(t,\tau,\sigma)\right\rangle\equiv 0,\ k=\overline{1,n}\quad\forall t\in[0,T], \qquad (14)$$

где $\nu_k(t,\tau,\sigma)$, $k=\overline{1,n}$, — базис ядра сопряженного оператора

$$L^*\equiv\sum_{j=1}^{p}\bar{\lambda}_j(t)\frac{\partial}{\partial\tau_j}+\varepsilon\bar{\lambda}_m(t)\frac{\partial}{\partial\tau_m}+\bar{\lambda}_m(t)\sigma\frac{\partial}{\partial\sigma}-A^*(t).$$

Доказательство. Пусть $h(t,\tau,\sigma)=h_0(t)+\sum_{j=0}^{p}h_j(t)e^{\tau_j}+h_m(t)e^{\tau_m}+h_{m+1}(t)\sigma.$ Определим решение системы (13) в виде (9). Подставляя (9) в систему (13) и приравнивая коэффициенты при $e^{\tau_j}, e^{\tau_m}, \sigma,$ и свободные члены, получим следующие системы:

$$-A(t)y_0(t)=h_0(t); \tag{15}$$

$$\left[\lambda_s(t)I-A(t)\right]y_s(t)=h_s(t),\ s=\overline{1,n}; \tag{16}$$

$$\left[\lambda_m(t)I-A(t)\right]y_m(t)+\int_0^t K(t,s)y_m(s)ds=h_m(t); \tag{17}$$

$$\left[\lambda_m(t)I-A(t)\right]y_{m+1}(t)+\int_0^t K(t,s)y_{m+1}(s)ds=-K_0(t,0)+\widehat{K}_{m+1}(t,0), \tag{18}$$

где I — единичный оператор.

Рассмотрим систему (15). Как было отмечено выше, эта система имеет решение в виде (4). Система (17) есть интегральное уравнение Вольтерра второго рода с ядром $G(t,s)=\left[\lambda_m(t)I-A(t)\right]^{-1}K(t,s)$ и свободным членом $g_m(t)=\left[\lambda_m(t)I-A(t)\right]^{-1}h_m(t)$. Известно, что такие уравнения однозначно разрешимы в классе $C^\infty\left[0,T\right]$. Точно так же и система интегральных уравнений (18) является системой интегральных уравнений Вольтерра второго рода с ядром $G(t,s)=\left[\lambda_m(t)I-A(t)\right]^{-1}K(t,s)$ и свободным членом $g_{m+1}(t)=\left[\lambda_m(t)I-A(t)\right]^{-1}h_{m+1}(t)$.

Для вычисления решения системы (16) сделаем в ней преобразование

$$y_s(t)=C(t)\xi(t)\equiv\sum_{s=1}^{n}\xi_s(t)c_s(t), \tag{19}$$

где $\xi(t)=\left\{\xi_1,\ldots,\xi_n\right\}$ — новый неизвестный вектор; $C(t)=(c_1,...,c_n)$ — матрица из столбцов c_k, являющихся собственными векторами оператора $A(t)$. Подставляя (19) в систему (16), будем иметь

$$[\lambda_s(t)I-A(t)]C(T)\xi(t)=h_s(t).$$

Умножая слева это равенство на матрицу $C^{-1}(t)$ и учитывая, что $C^{-1}(t)A(t)C(t)=\Lambda(t)\equiv diag(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, будем иметь

$$(\lambda_s(t)-\lambda_1(t))\xi_1(t)=(h_s(t),d_1(t)).$$

Принимая во внимание, что $\lambda_i(t)\equiv 0,\ i=\overline{p+1,n}$ и $C^{-1}(t)h_s(t)=\left\{(h_s,d_1),\ldots,(h_s,d_n)\right\}$, запишем эту систему покомпонентно в виде

$$\begin{gathered}
\left(\lambda_s(t)-\lambda_1(t)\right)\xi_1(t)=(h_s(t),d_1(t));\\
\ldots\\
\left(\lambda_s(t)-\lambda_{s-1}(t)\right)\xi_{s-1}(t)=(h_s(t),d_{s-1}(t));\\
0\cdot\xi_s(t)=(h_s(t),d_s(t)),\\
\left(\lambda_s(t)-\lambda_{s+1}(t)\right)\xi_{s+1}(t)=(h_s(t),d_{s+1}(t));\\
\ldots\\
(\lambda_s(t)-\lambda_p(t))\xi_p(t)=(h_s(t),d_{p1}(t));\\
\lambda_s(t)-\lambda_{p+1}(t)=(h_s(t),d_{p+1}(t));\\
\ldots\\
\lambda_s(t)\xi_n(t)=(h_s(t),d_{n1}(t)).
\end{gathered} \tag{20}$$

Последние $(n-p)$ компоненты системы (20) однозначно разрешимы в классе $C^\infty[0,T]$, т.е.

$$y_i(t)=C(t)\xi_i(t)=\sum_{i=p+1}^{n}\frac{(h_s(t),d_i(t))}{\lambda_s(t)}c_i(t).$$

Первые p компоненты системы (20) разрешимы в классе $C^{\infty}[0,T]$ тогда и только тогда, когда $\left\langle h_k(t), d_j(t)\right\rangle \equiv 0, \quad j=\overline{1,p},$ что совпадает с условием (14). При этом она имеет решение

$$y_i(t)=\sum_{j=1}^{p}\left[\alpha_j(t)c_j(t)+\sum_{s=1,s\neq j}^{p}\frac{(h_s(t),d_i(t))}{\lambda_s(t)-\lambda_j(t)}c_j(t)\right],$$

где $\alpha_j(t)\in C^{\infty}\left(\left[0,T\right],C^1\right)$ — произвольные функции, $j=\overline{1,p}.$ Теорема 2 доказана.

При выполнении условий ортогональности (14) система (13) имеет следующее решение:

$$y(t,\tau,\sigma)=\sum_{j=1}^{p}\left[\alpha_j(t)c_j(t)+\sum_{s=1,s\neq j}^{p}\frac{(h_s(t),d_j(t))}{\lambda_s(t)-\lambda_j(t)}c_s(t)\right]e^{\tau_j}+\sum_{i=p+1}^{n}\frac{(h_s(t),d_i(t))}{\lambda_s(t)}c_i(t)+$$

$$+\left[g_m(t)+\int_0^t R(t,s)g_m(s)ds\right]e^{\tau_m}+\left[g_{m+1}(t)+\int_0^t R(t,s)g_{m+1}(s)ds\right]\sigma,$$

где $\alpha_j(t)\in C^{\infty}\left[0,T\right]$ — произвольные скалярные функции, $j=\overline{1,p}$; $R(t,s)$ — резольвента ядра $\lambda_m(t)I-A(t)^{-1}K(t,s).$

Список литературы

1 *Ломов С.А., Ломов И.С.* Основы математической теории пограничного слоя. — М.: Изд-во МГУ, 2011. — 456 с.

2 *Vasil'eva A.B.* On contrast structures of step type for a system of singularly perturbed equations, Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1994. — Vol. 34. — No. 10. — P. 1215–1223.

3 *Ломов С.А.* Обычная сходимость асимптотических рядов при наличии нулевых точек спектра // Вестн. МГУ. Сер. математика, механика. — 1987. — № 6. — С. 33–40.

4 *Сафонов В.Ф.* Асимптотическое решение сингулярно возмущенной нелинейной задачи с нулевой точкой спектра предельного оператора // Тр. Моск. энерг. ин-та. — 1978. — Вып. 357. — С. 95–97.

5 *Елисеев А.Г., Ломов С.А.* Теория сингулярных возмущений в случае спектральных особенностей предельного оператора // Матем. сб. — 1986. — Т. 131 (163). — № 4. — С. 544–557.

6 *Kalimbetov B., Temirbekov M., Khabibullayev Zh.* Asymptotic Solutions of Singular Perturbed Problems with an Instable Spectrum of the Limiting Operator, Abstract and applied analysis, — 2012. — No. 120192. — P. 16.

7 *Сафонов В.Ф., Туйчиев О.Д.* Регуляризация сингулярно возмущенных интегральных уравнений с быстро изменяющимся ядром // Дифференциальные уравнения. — 1997. — Т. 33. — № 9. — С. 1199–1211.

8 *Kalimbetov B., Safonov V.* A regularization method for systems with unstable spectral value of the kernel of the integral operator // Differential equations. — 1995. — Vol. 31. — P. 647–656.

9 *Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф.* Сингулярно возмущенные системы с контрастными структурами: Матем. сб. — 2005. — Т. 196. — С. 173–200.

10 *Kalimbetov B., Tashimov L., Imanbaev N., Sapakov D.* Regularized asymptotical solutions of integro-differential systems with spectral singularites, Advances in Difference Equations. — [ER]. Access mode: 2013:109 doi:10.1186/1687–1847.

11 *Калимбетов Б.Т., Иманбаев Н.С., Ниязымбетов А.Д.* Асимптотика решений сингулярно возмущенного интегро-дифференциального уравнения с быстро убывающим ядром // Вестн. Караганд. ун-та. — Сер. Математика. — № 4. — 2013. — С. 55–64.

12 *Калимбетов Б.Т., Иманбаев Н.С., Темирбеков М.А.* Алгоритм метода регуляризации для сингулярно возмущенной задачи с нестабильным значением ядра интегрального оператора // Вестн. Караганд. ун-та. — Сер. Математика. — 2013. — № 4. — С. 64–70.

13 *Калимбетов Б.Т., Ескараева Б.И., Темирбеков М.А.* Математическое описание внутреннего пограничного слоя для нелинейной интегро-дифференциальной системы // Вестн. Караганд. ун-та. — Сер. Математика. — 2014. — № 3 (75). — С. 77–87.

14 *Калимбетов Б.Т., Ескараева Б.И., Темирбеков М.А.* Дискретный пограничный слой в случае нулевых точек спектра для систем интегро-дифференциальных уравнений // Вестн. Караганд. ун-та. — Сер. Математика. — 2014. — № 3 (75). — С. 88–95.

Б.Т.Қалымбетов, Б.И.Есқараева

Шектік операторы нөлдік спектрлі және ядросының спектралдық мәндері кері қайтпайтын теңдеулерде қарама-қарсы құрылымдар

Мақалада шектік операторының спектрінде нөлдік нүктелері бар болатын және интегралдық мүшесі ерекшелікті интегро-дифференциалдық жүйелер үшін Коши есебі қарастырылды. Интегралдық оператордың спектралдық ерекшеліктері бастапқы есептің шешімінде кіші параметр бойынша ішкі шекаралық қабатты анықтайтын ерекше сингулярлықты тудырады. Сингуляр ауытқыған есептердің математикалық теориясын құруда, шекаралық қабатты есепке алудың математикалық дұрыстығын тұжырымдауда және регуляр ауытқыған теориясын дамытуда регуляризация әдісінің идеясы қолданылған. Интегралдық операторды регуляризациялау процедурасы және итерациялық есептердің шешімділігі дәлелденген.

B.T.Kalimbetov, B.I.Eskaraeva

Contrast structure in equations with zero spectrum of limit operator and irreversible spectral value of the kernel

In this paper we consider the Cauchy problem for systems of integro-differential equations at presence zeros in the spectrum of the limit operator and singularities in the integral term. Spectral singularities the integral operator gives in solving the original problem essentially singular singularities in the small parameter, which describes the inner boundary layer. For constructing mathematical theory, the formulation of the criterion of the correctness of the mathematical description of the boundary layer and the development of a regular theory for singularly perturbed problems we used the idea of regularization method. The procedure of regularization of the integral operator was Illustrated and the solvability of iterative problems was proved.

References

1 Lomov S.A., Lomov I.S. *Basics mathematical theory of the boundary layer*, Moscow: MSU Publ., 2011, 456 p.

2 Vasil'eva A.B. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1994, 34, 10, p. 1215–1223.

3 Lomov S.A. *Bull. MSU. Ser. mathematics, mechanics*, 1987, 6, p. 33–40.

4 Safonov V.F. *Proceedings Moscow Energy institute,* 1978, 357, p. 95–97.

5 Eliseev A.G., Lomov S.A. *Collection Mathematcs,* 1986, 131 (163), 4, p. 544–557.

6 Kalimbetov B., Temirbekov M., Khabibullayev Zh. *Abstract and applied analysis*, 2012, 120192, 16 p.

7 Safonov V.F., Tuychiev O.D. *Differential equation,* 1997, 33, 9, p. 1199–1211.

8 Kalimbetov B., Safonov V. *Differential equations*, 1995, 31, p. 647–656.

9 Bobodzhanov A.A., Safonov V.F. *Collection Mathematcs,* 2005, 196, p. 173–200.

10 Kalimbetov B., Tashimov L., Imanbaev N., Sapakov D. *Advances in Difference Equations,* [ER]. Access mode: 2013:109 doi:10.1186/1687–1847.

11 Kalimbetov B.T., Imanbaev N.S., Niyazymbetov A.D. *Bull. of the Karagand. un-ta,* Ser. Mathematics, 2013, 4 (72), p. 55–64.

12 Kalimbetov B.T., Imanbaev N.S., Temirbekov M.A. *Bull. of the Karagand. un-ta,* Ser. Mathematics, 2013, 4 (72), p. 64–70.

13 Kalimbetov B.T., Eskaraeva B.I., Temirbekov M.A. *Bull. of the Karagand. un-ta,* Ser. Mathematics, 2014, 3 (75), p. 77–87.

14 Kalimbetov B.T., Eskaraeva B.I., Temirbekov M.A. *Bull. of the Karagand. un-ta,* Ser. Mathematics, 2014, 3 (75), p. 88–95.